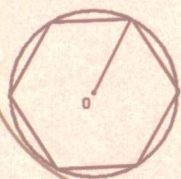


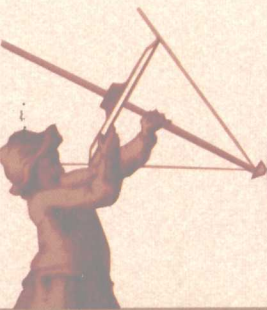
从割圆术 走向无穷小

——揭秘微积分

刘里鹏 著



Calculus



湖南科学技术出版社

从圆木 走向无穷小

① — 揭秘微积分 — ②

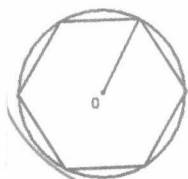


Calculus

第 1 版 1995 年 1 月第 1 次印刷
第 2 版 2005 年 1 月第 2 次印刷
第 3 版 2015 年 1 月第 3 次印刷
第 4 版 2020 年 1 月第 4 次印刷

从割圆术 走向无穷小 ——揭秘微积分

刘里鹏 著



湖南科学技术出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

从割圆术走向无穷小——揭秘微积分 / 刘里鹏著. —长沙: 湖南科学技术出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-5357-5737-1

I. 从… II. 刘… III. 微积分—研究 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 101031 号

从割圆术走向无穷小

——揭秘微积分

著 者: 刘里鹏

责任编辑: 赵 龙

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

印 刷: 衡阳博艺印务有限责任公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 衡阳市黄茶岭光明路 21 号

邮 编: 421008

出版日期: 2009 年 7 月第 1 版第 1 次

开 本: 850mm×1168mm 1/32

印 张: 9

字 数: 214000

书 号: ISBN 978-7-5357-5737-1

定 价: 22.00 元

(版权所有·翻印必究)

简介



本书打破模式化和形式化的编书体系，在逻辑化渐进式的编书理念指引下，对当今教材的结构进行了全面的革新，以兴趣为主导、以逻辑为基础，让大家在轻松学习微积分的同时深刻理解其本质，掌握其基本方法。

本书从古代“割圆术”的极限讲起，依照历史发展的时间顺序和学科发展的逻辑顺序全面解读微积分，从而揭示出微积分的本质，讲解微积分的基本知识和方法，然后揭示出“无穷小”这个概念的重要性。在此基础上，深入讲解高等微积分的知识，如傅立叶级数、椭圆积分和场论等。

微积分是当今大学一年级学生几乎必修的基础课程，但是本书起点低，具有科普的性质，适合具有高中学历者自学；又因为本书有教材的特点，尽量做到对知识的全面和深入讲解，所以可以作为大学生的课外补充材料，尤其是针对那些学习微积分时感到头疼的以及以前学习过微积分但是现在又还给老师的学生。

前言



先看一个有趣的问题——阿基里斯追龟问题。

如图 0-1 所示，假设有一个名叫阿基里斯的人位于 A 处，他沿着射线 AB 的方向追赶位于 B 处的乌龟，当他跑到 B 处时，乌龟在 C 处，当他跑到 C 处时，乌龟肯定在 C 的前方，设为 D 处。以此类推，当阿基里斯跑到 D 处的时候，乌龟又到了 E 处……这样以来，虽然乌龟的速度很小，但是阿基里斯不管怎么跑，总是在乌龟的后面，也就是他不可能追上乌龟。可是常识告诉我们他肯定能够追上乌龟，这是为什么呢？

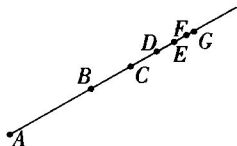


图 0-1 阿基里斯追龟问题示意图

上面的问题是否困惑了你，让你很难立刻作出合理的解释呢？而事实上，上面的问题用微积分的知识的确很好解释。那么是什么原因使得有的已经学习过微积分的读者不能够回答呢？

最简单的原因是课本上没有这方面的论述。

而其实很多数学科普著作都提到了上面的问题。

这就涉及“教材”和“科普”的问题。本书旨在把科普和教材结合起来，一方面让大家关注科普书籍，另一方面给教材的编写提供一个全新的视角。通过打破形式化的编书体系使得本书成为一次让微积分学习不失趣味性、逻辑性和深刻性的大胆尝试。

同样也使得读者能够轻轻松松学好微积分。记得爱因斯坦在自序中这样回忆，他说他的成功多亏了几本科普书籍，“正是那些看似没有什么严密论证的书籍启发了我的好奇心”，他特别回忆的就是一本关于微积分的科普资料，是少年时代的兴趣使得他往科学高峰越爬越高，由此可以看出科普书籍对于学习有不可估量的价值。

本书的写作参考了很多文献资料，主要参考文献附于本书之后，在此向这些资料的作者或者译者表示真诚的感谢！另外我还要感谢我的爸爸、妈妈和姐姐，没有他们给我一个很安静的环境，本书的付梓是难以想象的。

由于笔者水平有限，错误和不当在所难免，关于本书的任何问题、意见或者是建议都可以通过 E-mail: lipeng.lew@gmail.com 与笔者联系，“独立之精神，自由之思想”，欢迎各位读者批评指正。

刘里鹏

2008年7月于河南信阳



目 录

(注:加“*”的章节供有兴趣和余力的读者参考)

第 1 章 导言——写在前面	(1)
1.1 本书的函数论	(2)
1.1.1 函数的代数意义	(2)
1.1.1.1 函数的定义	(2)
1.1.1.2 初等函数	(4)
1.1.2 函数的几何意义	(4)
1.1.2.1 笛卡儿的贡献	(4)
1.1.2.2 极坐标	(8)
1.1.3 函数的基本性质	(9)
1.1.3.1 有界性	(10)
1.1.3.2 周期性	(10)
1.1.3.3 奇偶性	(10)
1.1.3.4 单调性	(10)
1.1.3.5 显隐性	(11)
1.1.4 函数的简单衍生	(11)
1.1.4.1 反函数	(11)
1.1.4.2 复合函数	(12)
1.1.4.3 多元函数	(13)
1.1.5 矢量函数	(14)
1.1.5.1 矢量表示	(14)
1.1.5.2 矢量运算	(14)

1.1.5.3 场论初步·····	(19)
1.1.6 本书基本问题的提出·····	(21)
章末小阅读: 寻觅大学精神, 探索人文之路	
——读蔡元培先生《就任北京大学校长之演说》有感	
·····	(28)
第2章 感性认识——微积分起源 ·····	(34)
2.1 古代微积分思想的萌芽 ·····	(35)
2.1.1 微积分的哲学思想·····	(35)
2.1.2 刘徽的“割圆术”·····	(36)
* 2.2 微积分创立的社会背景 ·····	(39)
2.2.1 中世纪思想禁锢和大学的艰难发展·····	(39)
2.2.2 文艺复兴运动和思想的解放·····	(41)
2.2.3 资产阶级革命和生产力的发展·····	(42)
2.3 先驱者的贡献 ·····	(44)
2.3.1 微分的思想·····	(45)
2.3.2 积分的思想·····	(48)
章末小阅读: 为什么微积分没有在中国产生 ·····	(54)
第3章 感性跨越——站在巨人的肩膀上 ·····	(59)
3.1 牛顿的微积分 ·····	(60)
3.1.1 “独处”成就了牛顿, 牛顿验证了“独处”	
·····	(60)
3.1.2 牛顿的微积分著作简介·····	(61)
3.1.3 牛顿的其他成就·····	(64)
3.2 莱布尼茨的微积分 ·····	(65)
3.2.1 博览群书, 广交英才·····	(66)
3.2.2 莱布尼茨微积分思想的来源·····	(67)
3.2.3 “古怪的”微积分论文 ·····	(70)
3.2.4 莱布尼茨的其他贡献·····	(72)

3.2.5	莱布尼茨和牛顿	(73)
3.3	极限初步	(75)
3.3.1	极限的四则运算法则和夹挤原理	(75)
3.3.2	几类很重要的极限	(76)
3.4	导数	(78)
3.4.1	导数的本质	(78)
3.4.2	可导的条件	(80)
3.4.3	用定义求导数	(81)
3.4.4	四则运算求导法则	(82)
3.4.5	复合函数求导法则	(83)
3.4.6	初等函数的求导问题	(84)
3.4.7	函数领域的“不倒翁”	(85)
3.4.8	导数的几何意义与最值初步	(86)
3.4.9	偏导数及其简单应用	(88)
3.4.9.1	偏导数的意义	(88)
3.4.9.2	隐函数求导	(90)
3.4.9.3	曲线的切线与法平面	(91)
3.4.9.4	曲面的切平面与法线	(92)
3.4.9.5	正交曲面坐标系	(94)
3.5	再议最值	(97)
3.5.1	多元函数的最值	(97)
3.5.2	条件极值	(98)
3.6	微积分的本质	(99)
3.6.1	什么是微分	(100)
3.6.2	微分和导数的区别及微分简单应用	(101)
3.6.2.1	微分和导数的区别	(101)
3.6.2.2	微分的简单应用	(102)
3.6.3	什么是积分	(103)

3.6.3.1	微积分基本原理	(103)
3.6.3.2	不定积分	(104)
3.6.3.3	定积分	(105)
3.6.4	微积分的精髓	(106)
3.6.5	微积分的基本方法	(107)
3.7	积分的算法	(109)
3.7.1	凑微分法	(110)
3.7.2	换元积分法	(112)
3.7.3	分部积分法	(114)
3.7.4	综合积分法	(115)
3.7.5	极限积分法	(117)
3.8	微分方程初步	(117)
3.8.1	可分离变量微分方程	(118)
3.8.1.1	引例	(118)
3.8.1.2	可分离变量微分方程的一般解法	(118)
3.8.2	一阶线性微分方程	(120)
3.8.2.1	引例	(120)
3.8.2.2	一阶线性微分方程的一般解法	(120)
3.8.3	其他常见微分方程的一般解法	(121)
3.8.3.1	齐次微分方程的一般解法	(122)
3.8.3.2	可降阶高阶微分方程的一般解法	(122)
章末小阅读: 椭圆周长怎么计算		(124)
第4章	走向理性——逼近无穷小	(129)
4.1	第二次数学危机	(130)
4.1.1	贝克莱悖论	(130)
4.1.2	更加混乱的局面	(131)
4.2	分析的算术化	(132)
4.2.1	柯西的探索	(132)

4.2.2	数学分析的集大成者——维尔斯特拉斯	(134)
4.2.2.1	“兴趣是最好的老师”再次被应验	(134)
4.2.2.2	艰苦造就天才, 困难磨炼英雄	(135)
4.2.2.3	无与伦比的大学数学教师	(136)
4.2.2.4	神秘的 ϵ - δ 语言	(137)
4.2.2.5	到底什么是无穷小	(138)
4.2.2.6	处处连续但处处不可导函数存在吗	(140)
4.3	级数的发展与成熟	(142)
4.3.1	级数及其最初面临的困境	(142)
4.3.2	用定义判定级数敛散性及其简单应用	(143)
4.3.2.1	用定义判定级数敛散性	(143)
4.3.2.2	柯西审敛原理相关推广	(144)
4.3.2.3	莱布尼茨判别法及其相关推广	(146)
4.3.3	两个关于等比级数的有趣问题	(148)
4.3.3.1	0.9 比 1 小吗	(148)
4.3.3.2	阿基里斯是怎样追上乌龟的	(148)
4.3.4	函数展开成幂级数	(150)
4.3.4.1	中值定理	(150)
4.3.4.2	泰勒公式	(153)
4.3.4.3	泰勒公式的简单应用	(155)
4.3.4.4	泰勒级数	(156)
4.3.4.5	欧拉公式	(157)
章末小阅读: 傅立叶级数简介		(160)
第 5 章	理性发展——走向成熟	(167)
5.1	多元函数的积分	(168)
5.1.1	重积分	(168)
5.1.1.1	引例	(168)

5.1.1.2	重积分的定义和性质	(169)
5.1.1.3	重积分的计算	(171)
5.1.2	曲线积分	(173)
5.1.2.1	对弧长的曲线积分	(173)
5.1.2.2	对坐标的曲线积分	(175)
5.1.2.3	两类(型)曲线积分的联系	(176)
5.1.3	曲面积分	(178)
5.1.3.1	对面积的曲面积分	(178)
5.1.3.2	对坐标的曲面积分	(180)
5.1.3.3	两类(型)曲面积分的联系	(182)
5.2	再议场论	(182)
5.2.1	方向导数与梯度	(183)
5.2.1.1	引言	(183)
5.2.1.2	几何意义	(184)
5.2.1.3	哈密顿算子	(187)
5.2.1.4	物理意义	(188)
5.2.2	通量与散度	(190)
5.2.2.1	通量的回顾及其物理意义	(190)
5.2.2.2	散度的几何意义	(192)
5.2.2.3	散度公式之不严密推导	(193)
5.2.2.4	基于微积分基本方法和原理的散度公式 推导	(194)
5.2.2.5	散度公式在其他正交曲面中的表示	(196)
5.2.2.6	高斯定理的简单理解和奇妙推导	(197)
5.2.2.7	高斯定理在平面域上的表示	(199)
5.2.2.8	高斯定理的物理解释	(200)
5.2.3	环量与旋度	(201)
5.2.3.1	引例与环量	(201)

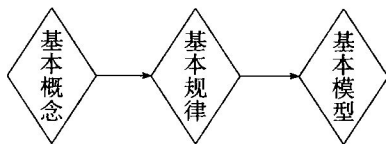
5.2.3.2	类比方法理解旋度	(202)
5.2.3.3	旋度的由来	(203)
5.2.3.4	斯托克斯公式	(204)
5.2.3.5	斯托克斯公式的物理解释	(205)
5.3	再议微分方程	(206)
5.3.1	线性齐次方程解的结构	(207)
5.3.2	常系数线性微分方程	(209)
5.3.2.1	常系数齐次线性微分方程的一般解法	(209)
5.3.2.2	常系数非齐次线性微分方程的一般解法	(211)
* 5.4	变分法简介	(215)
5.4.1	变分法起源	(215)
5.4.2	最简泛函的极值	(217)
5.4.3	欧拉方程	(218)
5.4.4	最值总结	(219)
* 5.5	欧拉积分简介	(222)
章末小阅读: 任意 N 边形面积的计算及简单应用		(224)
附录 A	常用表	(229)
A1	常见函数的导数表	(229)
A2	常见函数的微分表	(230)
A3	常见函数的积分表	(230)
A4	常见函数的幂级数展开式	(232)
附录 B	本书练习题及参考答案——测验自己收获 了多少	(234)
B1	练习题	(234)
B2	参考答案	(242)

附录 C	微积分学发展史大事年表		(252)
附录 D	本书中使用计算机软件的部分源程序及 结果		(256)
D1	“地图面积计算” C 语言程序及结果		(256)
D2	“椭圆周长计算” C 语言程序及结果		(261)
D3	“山峰”的 MATLAB 绘图源程序及结果		(263)
附录 E	微积分学部分中英文词汇对照		(265)
后记			(267)
参考文献			(272)

第1章 导言——写在前面

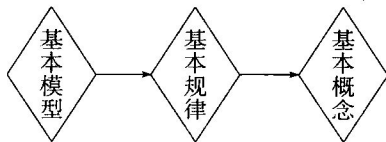
国际数学教育委员会前主席、数学家 H·弗赖登塔尔 (H·Freudenthal, 1908~1990) 有一句名言: “没有一种数学思想, 以它被发现时的那个样子发表出来。一个问题被解决以后, 相应地发展成一种形式化的技巧, 结果使得火热的思考变成了冰冷的美丽。”

关于形式化的编书体系和逻辑化的编书理念, 可以用图形表示如下:



形式化的编书体系

图 1-1 形式化的编书体系模型



逻辑化的编书理念

图 1-2 逻辑化的编书体系模型

本章主要以“函数”为例对本书的结构进行说明, 此外借助函数进行说明的另一目的是方便那些还不了解什么是函数的读



者，让他们能够更加轻松地读完此书。最后一节主要列出本书需要解决的问题，明确本书的一个基本任务——教会大家轻松掌握微积分的基本方法。

1.1 本书的函数论

前面我们大致分析了形式化的编书体系，指出其问题所在。然后介绍本书提出的逻辑化编书理念。本大节主要讲述函数论，旨在对逻辑化编书理念提出一种样本。

1.1.1 函数的代数意义

1.1.1.1 函数的定义

我们在旅行之前，自然需要考虑到使用什么交通工具。而交通工具的一个最主要的区别是“快慢”，即我们所熟悉的“速度”，可是怎样定量地表示速度呢？一个很自然的想法是比较在相同的时间里，不同交通工具的行驶路程，行驶路程越大表示速度越大；或者比较走相同的路程所用的时间，时间越少速度越大。这是小学生都知道的事情。

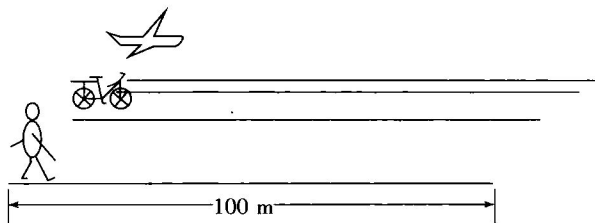


图 1-3 赛跑示意图

所以自然就有了速度的定义：速度 = $\frac{\text{两地之间的距离}}{\text{行驶距离所用时间}}$ ，为了简化表达式，人们习惯用速度、路程和时间等物理量（或其