

TURING

图灵新知

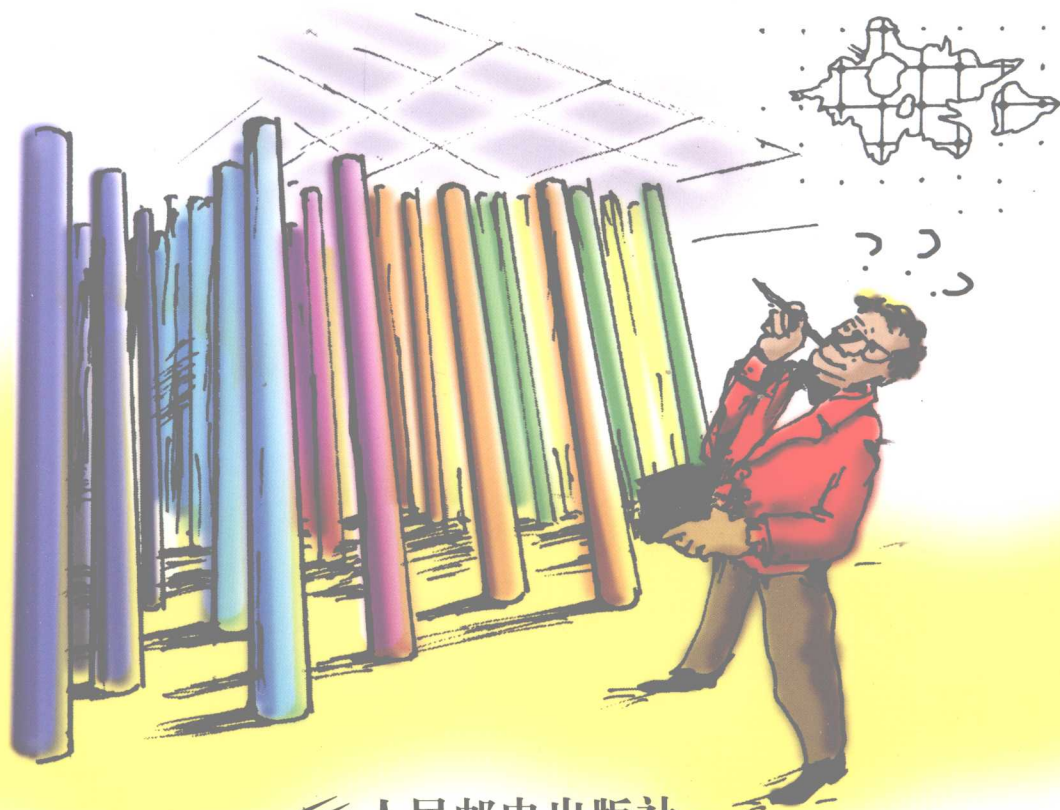
Mathematical Mind-Benders

令你苦思冥想的

数学趣题

[美] Peter Winkler 著

兰光强 孙立群 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

Mathematical Mind-Benders

令你苦思冥想的

数学趣题

[美] Peter Winkler 著

兰光强 孙立群 译



人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

令你苦思冥想的数学趣题/(美)温克勒(Winkler, P.)
著;兰光强,孙立群译. —北京:人民邮电出版社, 2009.7

(图灵新知)

书名原文: Mathematical Mind-Benders

ISBN 978-7-115-19559-3

I. 令… II. ①温… ②兰… ③孙… III. 数学—普及读物
IV. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第206532号

内 容 提 要

数学无处不在,影响着我们的生活.本书汇集了数十个来自生活的数学趣题,涉及各个数学领域.解答这些趣题不需要高深的数学知识,答案简单明了,但要得出答案却绝非易事,其中不少趣题甚至出自著名数学家之手,也有些来自世界各地的数学奥林匹克竞赛题库.全书各章的问题按照由简到难的顺序展开.各章最后给出了每个问题的背景,来源以及其详细的解答.

本书语言诙谐,解题方法独到,涉及较多数学知识,适合中学生及以上文化程度的数学爱好者阅读.这本书将帮助你颠覆直觉,激发想象力,领悟数学之美.

图灵新知

令你苦思冥想的数学趣题

-
- ◆ 著 [美] Peter Winkler
 - 译 兰光强 孙立群
 - 责任编辑 明永玲
 - 执行编辑 边晓娜
 - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
 - 邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
 - 网址 <http://www.ptpress.com.cn>
 - 北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
 - ◆ 开本: 700×1000 1/16
 - 印张: 13.5
 - 字数: 146千字 2009年7月第1版
 - 印数: 1-4 000册 2009年7月北京第1次印刷
 - 著作权合同登记号 图字: 01-2008-3332号
 - ISBN 978-7-115-19559-3/O1
-

定价: 29.00元

读者服务热线: (010) 51095186 印装质量热线: (010) 67129223

反盗版热线: (010) 67171154

版 权 声 明

Original English edition, entitled *Mathematical Mind-Benders* by Peter Winkler, ISBN: 978-1-56881-336-3, published by A K Peters, Ltd.

Copyright © 2007 by A K Peters, Ltd., All rights reserved.

本书简体中文版由A K Peters, Ltd. 授权人民邮电出版社独家出版，在全球范围内发行。

版权所有，侵权必究。

这本书的真正作者是世界各地寄给我这些精彩趣题的人们，其中包括许多我前一本书^①的读者、新英格兰地区（New England）的朋友和同事们。特别要感谢达特茅斯学院的 Albert Bradley 第三世纪理科奖教金的创办人。

然而我还要把每一部分都献给我的父亲 Bernard Winkler 博士和母亲 Miriam Winkler 博士。他们原本只希望他们的第一个孩子成为一个对社会有用、有贡献的人，没想到他最后成了一名数学工作者。

① 指作者写的 *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection* 一书。

前言

数学不是在畅通无阻的公路上小心行走，而是在陌生荒野上探险，而探险者常常会迷失方向。

——W. S. Anglin

本书为数学爱好者、趣题爱好者和爱好挑战的人所写，尤其是为那些认为数学世界是有序的、合理的和直观的，并随时准备学习新知的人所写！

要想欣赏这些趣题，并解答出来，必须喜欢数学（但是这还不够）。你需要知道点和直线是什么，素数是什么，并且必要时还要知道掷2个骰子都掷出6点的概率是多少。更重要的是，你要知道证明某个事实意味着什么。

你不需要对数学有专业的了解，也不需要动用电脑、计算器和微积分书，但是得动脑子。在某些情况下，你学的数学课程越多，得到正确答案的可能性反而会越少。甚至在另一些情况下，你可以读懂答案，却不敢相信它们。

趣题来自世界各地和各行各业的人。自从我的前一本趣题书出版以来，许多人给我寄来一些趣题，有新的也有旧的。前不久，我很惊喜地发现，我的尚未出版的趣题集无论是在篇幅上还是在质量上都已经相当可观，而收集这么多趣题以前要花费我大约20年的时间。

我的前一本书的读者会发现一些不同。这些趣题更像是一

个惊喜；实际上，一些趣题取自我给为伽德纳举办的第七次聚会（The Seventh Gathering for Gardner）所写的文章“Seven Mathematical Puzzles You Think You Must Not Have Heard Correctly”。我比以前更关注趣题的来源了。因此，除了一些我自己设计出来的趣题，对于其他趣题我尽最大努力给出了正确出处。我听从了一些读者的建议，在给出答案时尽可能地启发读者这些答案是怎么得到的，但是，在许多情况下，我要么不能令人信服地做到这一点，要么是连自己也说不清楚。

这些趣题和答案都是用我自己的语言给出的，因此我要对其中的错误和含糊不清的表述负全部责任。我敢说肯定会有一些错误和含糊的表述的。

本书节选的趣题应当是很雅致和有趣的；答案很简单也很明了，但得到这些答案需要花一番功夫；趣题应当体现一些数学思想，但是不需要高等数学知识来理解或解答。更重要的是，这样一本趣题集可以帮助人们颠覆直觉，激发大脑的想象力。但每个趣题真的都能完全符合这些标准吗？肯定不能。然而这里真的有一些宝贝，其中任何一件都可以给你带来快乐和启发，而这些远远超出了本书的低廉价格。不信你可以试试下面这些例子：土豆上的曲线，不谨慎的轮盘赌博，爱在 Kleptopia，蠕虫和水，有问题的组合锁，盒子中的名字，变色龙，面包房里的平衡，坚定的眨眼者，红骰子和蓝骰子，下落的 Alice，圆圈上的 Alice，桌子上的硬币，盒中盒，易受影响的思考者，棋盘上的旅鼠，帽子和无穷，砖塔，冰淇淋蛋糕，曲线和三个投影，压扁一个多边形，如此等等。

编排上，这些趣题是按照方便的原则归入各个章节中的，

也大体考虑到了它所属的数学领域。问题的答案放在每章（第11章除外）的末尾。我希望读者对每个问题都能思考一下，至少是粗略地思考片刻，不希望读者读完这些问题的题目时，答案就已经在同一页出现了。问题的背景和来源将与答案一起给出。

这些问题都很难，你可以为你解决了其中任何一个而感到自豪，有时候甚至可以以能欣赏问题的答案而自豪。

祝你好运！正如人们在物理趣题世界里所说的那样，解题愉快！

Peter Winkler

目 录

第1章	热身运动	\ 1
第2章	展开想象力	\ 13
第3章	数字难题	\ 31
第4章	蚂蚁Alice历险记	\ 53
第5章	啰嗦的题外话: HIPE游戏	\ 67
第6章	2维和3维空间	\ 75
第7章	线和图	\ 95
第8章	游戏和策略	\ 107
第9章	旧题新解	\ 127
第10章	重大挑战	\ 157
第11章	未解决和刚解决的问题	\ 181
后记		\ 193
参考书目		\ 195
索引		\ 203

第1章

热身运动

大脑，我们认为自己在思考的器官。

——Ambrose Bierce (1842—1914), 《魔鬼辞典》

我们从一些（相对）简单的问题开始，给你一个延伸脑力的机会。这些问题不需要太复杂的数学知识，只需要一些逻辑思考。

成长过半

普通孩子通常在多大年龄时身高达到他（或她）成年时身高的一半？

弹子袋

有 15 个袋子，你至少需要多少颗弹子，才能使每个袋子里弹子的数目不同？

2 的幂次

“两对双胞胎的二倍”是多少个人？^①

^① 由于英汉两种语言的差异，这个问题翻译成汉语有点难以理解，英语中的双胞胎有单数和复数之分。——译者注

转铅笔

有一只横截面为五边形的铅笔，其中一面印有厂商的标记。如果在桌子上转动铅笔，那么铅笔停下来时标记朝上的概率是多少？

肖像画

一个参观者指着墙上的肖像画问画中人是谁，画展主办者说：“我没有兄弟姐妹，但是这个人的父亲是我父亲的儿子。”问画中人是谁？

奇怪的序列

在下面所画的序列中，下一个符号应该是什么？

N Y X M

语言参数

有一个语言参数，对西班牙人、俄罗斯人或希伯来人来说是 1，对德国人来说是 7，而对法国人来说是 14，那么对英国人来说它是多少？

对日期的注意

每个月的 13 号是不是更有可能是星期五，或者只是看起来如此？

现在到了该让题目变得更难一些的时候了。

公平游戏

你怎样才能通过抛掷一枚变形的硬币来做一个公平的决定呢？

土豆上的曲线

给你两颗土豆，请证明你可以在每颗土豆表面上画一条封闭曲线，使得这两条曲线作为三维空间中的曲线完全相同。

最后再看三个概率方面的问题。解答这三个问题需要少量的计算。

在温布尔登获胜

由于具有短暂的魔力，你进入了温布尔登网球锦标赛单打决赛，将对阵小威廉姆斯或者费德勒。但是，你的魔力坚持不了整场比赛。当魔力消失时，你希望比分是多少，才能使你险胜的机会最大？

意大利面条圈

将 50 根煮熟的意大利面条的 100 个端点两两随机地系在一起。整个过程中你一般能得到多少个面条圈？

不谨慎者的轮盘赌博

Elwyn 在赌城拉斯维加斯参加一个数学会议。趁下一个报告还没有开始，他口袋里揣着 105 美元来到赌场。他漫步走到轮盘赌桌前，看到轮子上有 38 个数字（0, 00, 1 到 36）。如果

他在其中一个数字上下 1 美元赌注，那么他有 $1/38$ 的概率赢得 36 美元（而他下的 1 美元赌注则会进入赌场金库）。否则他将输掉 1 美元。

Elwyn 有足够的时间来下完 105 次每次 1 美元的赌注。所以，他开始行动了。你认为 Elwyn 能够赢钱（超过赌本 105 美元）的概率大概是多少？比如，会比 10% 大吗？

问题的出处及解答

成长过半

年轻孩子的父母都知道这个答案：两岁大（即第2个和第3个生日之间）！是的，人的成长是高度非线性的。本问题由瑞典Chalmers大学的Jeff Steif提供。

弹子袋

14颗弹子就够了。把1个空袋子放入装有1颗弹子的袋子，然后将这2个袋子放入第3个装有1颗弹子的袋子，再把这3个袋子放入第4个装有1颗弹子的袋子，依次下去，直至装完，使得第 i 个袋子总共装有 $i-1$ 颗弹子（和 $i-1$ 个袋子）。

如果你没有想到把袋子放入袋子（或者想到了，但却认为是骗人的把戏）你则需要至少 $0+1+\cdots+14=15\times 7=105$ 颗弹子。

本题是来自普罗维登斯市罗得岛州的Dick Plotz提供的。

2的幂次

答案是8。引号里面的内容看起来有4个2：“两”，“对”，“双胞胎”，“二倍”。这会使一些人认为答案是 $2^4=16$ 个人。但是一个双胞胎（twin）是一个人，这是个经典的困扰。

转铅笔

我的同事Laurie Snell让我注意到了这个问题。你是不是也错了？听起来答案像是 $1/5$ ，但是因为5是奇数，铅笔会有一个

面朝下而一个边朝上。所以答案是 0 或 $2/5$ ，这取决于你对“向上”的解释，但一定不会是 $1/5$ 。

这个题目出自 Chamont Wang 的颇具争议的书 *Sense and Nonsense of Statistical Inference* [58]。

肖像画

这是一个古老的经典问题，出自 Raymond Smullyan 的著作 *What is the Name of This Book* [55]。由于画展主办人没有兄弟姐妹，“我父亲的儿子”只能是主办人自己，因此肖像画上的是主办人的儿子。

奇怪的序列

这个问题是一家环境保护机构的律师 Keith Cohon 告诉我的。这个序列是想表示旋转前的字母，即 ZYXW，但是 Z（顺时针或者逆时针）旋转了 90° ，且接下来的字母比前一个字母多旋转 90° 。因此下一个符号应该是 $<$ 或 $>$ ，表示放倒的 V。

语言参数

答案是 7。这个奇怪的问题是佐治亚理工学院毕业生 Teena Carroll 设计的。实际上，这个问题几乎不能算是数学问题。题目所要求的参数是用给定的语言表示第一个多音节正整数的那个数字。而 7 正是英语中第一个多音节发音的正整数。

对日期的注意

令人惊奇的是，这是真实的。我只能说这个问题最早被

Bancroft Brown（和笔者一样，是达特茅斯学院的数学教授）发现。他在 *American Mathematical Monthly*[11] 上发表了她的计算结果。我现在的同事 Dana Williams 提请我注意到了这个事实。

不难验证，以公历的 400 年为一个周期中的 4 800 个月为例，其中有 688 个月的 13 号正好是星期五，有 687 个月的 13 号是星期天或星期三，有 685 个月的 13 号是星期一或星期二，以及有 684 个月的 13 号是星期四或星期六。为证实此事，你要记得能被 100 整除的年份还需要能被 400 整除才是闰年，比如 2000 年就是闰年，而 1900 年不是。

关于 13 号是星期五的迷信的起源，通常可以追溯到法国国王菲利浦四世（菲利浦大帝）下达解散圣殿骑士团的日期。

顺便说一句，受过专门训练的人（至少像普林斯顿著名的学者 John H. Conway 那样的人）能够很快地确定历史上任何日期所对应的是星期几，甚至可以指出过去历书上的错误。对于那些懒惰的或者是得过且过的普通人，则要记住一个有用的事实：每年的 4 月 4 日、6 月 6 日、8 月 8 日、10 月 10 日、12 月 12 日、5 月 9 日、9 月 5 日、11 月 7 日、7 月 11 日，还有二月份的最后一天都对应一个星期中的同一天（如果你碰巧每天从早到晚玩双骰子游戏，你就更容易记住这些日期）。在 2007 年，这些日期都是星期三，每过一年，向前推进一天，而在闰年的前一年则向前推进两天。

公平游戏

抛掷变形的硬币两次，希望得到一次正面和一次反面。如

果第一次正面朝上，称结果为正；如果第一次反面朝上，则称为反；如果结果出现两次正或两次反，则重复试验。

这个问题是洛杉矶的西方学院的 Tamas Lengyel 提醒我注意的，问题的解决归功于当代伟大的数学家和计算机科学先驱约翰·冯·诺伊曼。事实上，有时称它为“冯·诺伊曼技巧”。解决这个问题主要基于以下事实：即使硬币是变形的，连续不断地抛掷之间仍是（至少应该是）独立的事件。当然还要求变形的硬币至少有可能以任何一面着地！

如果你想用尽量少的抛掷次数来做出决定，上面的程序还可以进一步改进。例如，如果你前两次抛掷得到两个正，后两次得到两个反，那么你就可以结束游戏，并称结果为正（显然，两次反之后两次正的结果称为反）。

还可以做更多的改进。实际上，Serban Nacu 和 Yuval Peres 的一篇文章 [44] 给出了结束抛掷过程的方法，使得做出决定需要的平均抛掷次数最小，而不管硬币着地时正面朝上的概率有多大。

顺便说一下，怎样从各种各样的、受污染的随机源数据中提取公正的、随机的部分，在计算理论中是非常重要的，同时，也是许多研究的主题，并且是近年来的重大突破。

土豆上的曲线

将两个土豆贴在一起！换言之，把其中一颗土豆看成另一颗的影子，然后表面贴在一起转动。则在各自表面上形成的曲线满足问题的要求。

这个精彩的问题可以在 *The Mathemagician and Pied*