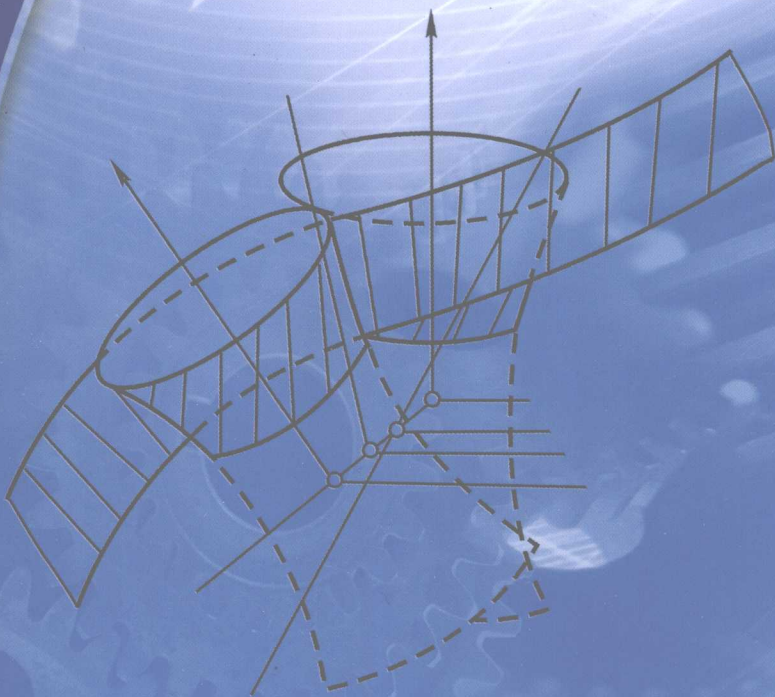


齿轮啮合原理

(第2版)

吴序堂 编著



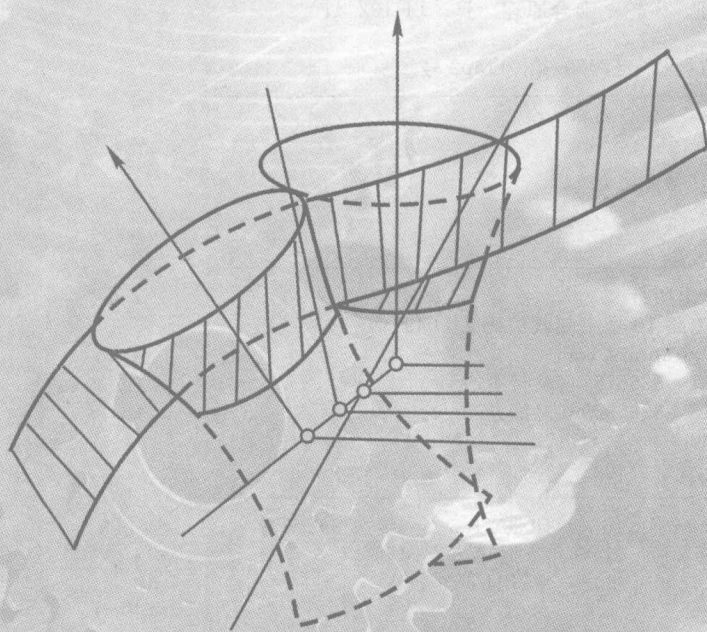
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



齿轮啮合原理

(第2版)

吴序堂 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书系统而扼要地论述了齿轮啮合的基本原理,并且适当介绍了国内外在这个领域的新成果。主要内容为平面啮合,螺旋面及其加工和空间啮合的基本原理,空间啮合的相对滑动及诱导法曲率,空间啮合的二次接触及其应用,准双曲面齿轮传动的基本原理等。

本书曾作为《齿轮设计丛书》之一在1982年由机械工业出版社出版。在第2版中根据齿轮啮合原理的发展和多年来的教学经验,对内容进行了调整和增删,特别是在基本理论的实际应用方面作了较多的增补,增加了综合实例和一定量的习题,使之更结合工程实际。因此,本书既可作为高等学校教学用书,也可供从事齿轮传动设计、制造、检测的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

齿轮啮合原理/吴序堂编著. —2版. —西安:西安交通大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-5605-3026-0

I. 齿… II. 吴… III. 齿轮—啮合原理 IV. TH132.41

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第011502号

书 名 齿轮啮合原理(第2版)
编 著 吴序堂
责任编辑 任振国

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西丰源印务有限公司

开 本 727mm×960mm 1/16 印张 21.5 字数 392千字
版次印次 2009年3月第2版 2009年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-3026-0/TH·79
定 价 38.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

序 言

大部分关于齿轮的书都不外乎两种,实用派的书籍延续了这一学科的传统论述和简化方式,却已不再适用于现代应用;而理论派的书籍则以几乎是纯数学的方式考虑齿轮啮合的原理而忽略了应用方面的问题。

几年前我偶然见到了一本吴序堂教授的《齿轮啮合原理》,便立即为吴教授对这一课题的独特处理方式所吸引。该书用严密而精炼的语言阐述了齿轮啮合的原理,并兼顾了它们的广泛应用。我迫不及待地复印了这本书的前几章来阅读,但可惜当时这本书已经绝版。2008年初,我与吴教授早年的高材生,秦川机床工具集团董事长龙兴元先生会晤时谈到这本书,我们都迫切希望此书能够再版。吴教授欣然同意,并立即着手进行修订工作。

目前,机械传动系统的发展有两大源动力。其一是产品向高速、大功率密度、低噪音与振动、高寿命、高可靠性方向发展的需要;其二则是随着数控机床的出现,齿轮设计师们不再受到加工能力的束缚,佐以高级的设计分析程序,设计师们现在能够致力于设计出更精确合理的齿廓修形,以满足对齿轮传动的高性能要求。

为了充分理解用来解决齿轮设计难题的分析工具,并进一步领会新型高性能数控机床加工复杂齿廓的原理,现代技术人员不得不从传统教科书之外去寻找答案。

《齿轮啮合原理》从齿轮啮合的基本原理出发,应用空间齿轮啮合的基本原理,把齿轮设计、加工以及其它环节看作一个不可分割的整体,进而涵盖了对齿轮的各种传动形式的系统研究。二十五年前的初版曾是当时领先的著作,但是新的版本与现代应用技术更能密切结合。

吴序堂教授是齿轮界德高望重的老师,享有盛誉的专家,拥有四十余年的教学与咨询经验。他为中国辛勤培养出整整一代的齿轮工程师,他们现已成为活跃在国内外的技术骨干和专家。龙兴元先生与我希望通过这本书的修订与再版,使吴教授的专业学识能够在新一代的专业工程师中得到传承,培育出能担负中国基础工业发展之人才。

潘绍元 博士

Romax 科技有限公司创始人、首席执行官

2009年3月于英国诺丁汉

龙兴元

秦川机床工具集团董事长

2009年3月于中国宝鸡

PREFACE

Most books on gearing tend to fall in two different schools: the practical school that has maintained the traditional treatment of the subject with the same simplifications that are no longer appropriate for the modern applications, and the theoretical school that considers the principle of gearing almost as a branch of mathematics with little concern for applications.

A few years ago by chance I came across the book on *Principle of Gearing* by Prof. Wu Xutang. I was so attracted by the unique way Professor Wu addressed the subject—a rigorous and at the same time intuitive treatment of the principle of gearing without losing sight of its broad applications. I photocopied the first few chapters of the book and read these eagerly. The book had been out of print for a number of years. At the beginning of 2008 at a meeting hosted by Mr. Long Xingyuan, Chairman of QCMT&T, a past student of Prof. Wu, we both urged Prof. Wu to make the book available again. Prof. Wu undertook to provide a revised version.

There are two drivers of the current development in transmission. One is the ever increasing demand for high performance in terms of high speed, power density, lower noise and vibration, durability and reliability. The other is the impact of NC machine tools that free the gear designers, with the aid of sophisticated design analysis codes, to consider more complex tooth profile modifications that can meet these new challenges.

The modern engineers have to go beyond the traditional text books in order to understand fully the principle of the analysis tools used to solve the design problems, and for that matter, the powerful new NC machine tools used to generate complex tooth profiles.

Principle of Gearing takes a fundamental approach by considering the spatial gear meshing principle that is applicable to both gear design and manufacturing which are just two sides of the same coin, and much more besides. It even includes a systematic treatment of various gear drive forms. The book is even more relevant today than when it was first published 25 years ago—it was a book ahead of its time.

Prof. Wu Xutang is one of the most respected teachers and a renowned specialist in gear industry, with more than 40 years of experience in teaching and consultancy. He has contributed to the education of a whole generation of gear engineers in China who are themselves today's specialists in China and abroad. I hope that through this new version Prof. Wu's scholarship will reach and nurture a new generation of specialists who are to underpin the need of industrial development in China.

Dr. S.Y. Poon
CEO and Founder
Romax Technology Limited
Nottingham, UK

Xingyuan Long
Chairman of Board
Qinchuan Machine-tool&Tool Group Co. Ltd.
Baoji, China

第 2 版前言

本书原稿是作为机械制造及自动化专业的专业选修课及研究生教材编写的,后来作为《齿轮设计丛书》之一在 1982 年由机械工业出版社出版。所以本书的编写方针具有教科书的一些特点,如内容系统扼要,由浅入深,循序渐进,与生产实践紧密结合,照顾读者的基础,尽量不用过于艰深的数学工具等。因此,初版书出版之后,受到高等院校、工厂企业的广泛欢迎。以致时隔二十余年,此书在书店早已绝迹,而仍常有读者提出希望本书能修订再版,以满足他们研究齿轮时的需要。

在这种情况下,我们确定新版的修订原则如下。

1. 保持初版的特色,在结构上不作大的变动,但根据多年来齿轮啮合原理的教学经验,对其中不合教学规律、不易掌握的部分章节和内容进行了调整和增删。
2. 同样根据多年来教学中的反映,在啮合原理基本理论的实际应用方面作了较多的增补,如在几章中增加了几个大型的综合实例,以便全面了解如何综合运用有关的理论解决实际的问题;又如在各章后面增加了一定量的习题,这些习题中有的是从工厂的实际问题中提炼出来的,与一般的练习题性质有些不同,请读者注意。
3. 书中原采用的一些术语和符号,目前已有更通用的名称和符号的,修订时尽量作相应的修改,以方便读者阅读有关的文献。

二十多年来,国内已陆续有一些齿轮啮合原理的专著出版(参见参考文献),随着齿轮行业的发展,啮合原理领域出现的新理论、新进展也很多,至于与齿轮啮合原理有关的单篇论文,更是难以统计。本书仍保持上述的特色,以论述比较成熟的齿轮啮合的基本原理为主,对新的理论酌予补充,不作过多的罗列。实际上,读者在掌握了本书内容之后,也就为进一步钻研各种更专门的齿轮理论打下了基础。

多年来,不少使用本书进行教学的老师、同学以及工厂企业的技术人员,对本书提出了宝贵的意见,在西安交通大学攻读过硕士、博士学位的研究生也在钻研本书的过程中,发现了一些缺点,提出了改进意见。这些意见对于提高本书的质量有很大的价值。贺敬良、张瑞二位同志还为本书第 2 版作了若干计算及绘图工作,付出了辛勤的劳动,在此特对这些同志致以衷心的感谢。

本书难免仍会存在错误和不妥之处,诚恳地希望能继续得到广大读者的批评指正。

编 者

2008 年 8 月于西安交通大学

初版前言

齿轮是机器和仪器中应用最为广泛的一种机械传动元件,它可以传递两平行轴、相交轴和交错轴之间的回转运动,因此形式很多,如直齿圆柱齿轮、非圆齿轮、斜齿轮及螺旋齿轮传动,蜗轮蜗杆、锥齿轮及准双曲面齿轮等。不仅如此,随着现代化工业的飞速发展,对齿轮传动的性能和质量不断提出新的要求,也不断出现新的齿形。例如,近几年来出现的双圆弧齿轮、平面二次包络弧面蜗轮副等,已在一些机械行业中逐步推广应用,并获得了良好的效果。

机器的高速和大负荷,要求提高齿轮的制造精度和承载能力,都需要掌握齿轮啮合的基本原理,而目前一些有关齿轮传动的文献中用得较多的方法,是根据一种传动形式或齿形的特殊性质来研究这种齿轮。例如,就渐开线的特殊性质来研究渐开线齿轮等,因而得到的一些结论对于其它齿轮就不一定适用。在当前已经出现的形式繁多的齿轮传动和加工方法面前,这种研究方法已经不能完全适应生产的需要。实践的发展使得既有必要也有可能去研究齿轮啮合的普遍理论。由于这种理论的高度的概括和科学的抽象,可以更正确、更完善地反映齿轮啮合的本质,发现不少在研究个别齿轮传动时难以得到的规律,从而可以更深入和更有效地推动各种具体齿轮传动的研究工作。

近几年来,由于国内外大量科学技术工作者的努力,齿轮啮合原理的研究得到了迅速的发展,取得了不少重大的成果。

本书的目的是系统而扼要地论述齿轮啮合的基本原理,并且适当介绍一些国内外在这个领域的新成果。本书内容主要是平面啮合、螺旋面及其加工和空间啮合的基本原理,空间啮合的相对滑动及诱导法曲率,空间啮合的二次接触及其应用等。由于我们的目的是论述齿轮啮合的普遍理论,所以一些重要的齿轮传动只是作为普遍理论的实例而进行分析的,对于这些齿轮传动的更详细的分析可以参看有关的专著。只有最后一章——准双曲面齿轮传动的基本原理是例外,一则因为它是空间啮合的最普遍的形式,通过对它的分析可以加深对前面几章的理解,二则因为目前国内专门论述这种齿轮传动原理的著作不多,所以单独辟为一章。

本书的初稿是作为高等学校机器制造工艺及其设备专业的选修课和齿轮课题的研究生用的教材而编写的,书中广泛地吸收了西安交通大学机制教研室刀具教学小组和齿轮研究组多年来的研究成果及教学经验。现在修订出版,仍保留着教科书的由浅入深、循序渐进的特点,以便读者学习。

本书初稿承浙江大学叶显樵同志和郑州机械科学研究所张希康同志仔细审阅并提出了许多宝贵的修改意见；此外，西安交大机制教研室刀具小组的同志也审阅了本书的初稿，特别是乐兑谦老师，对不少章节提出了具体的修改意见，这些都对本书质量的提高起了很大的作用，特在此表示衷心的感谢。

本书牵涉的面较广而编者水平有限，书中一定有不少错误疏漏之处，热忱地希望广大读者批评指正。

编 者

1979年10月于西安交通大学

目 录

序 言

第 2 版前言

初版前言

第 1 章 平面啮合的基本原理

1.1 瞬心线	(1)
1. 相对运动及瞬心线方程式	(1)
2. 齿轮瞬心线的封闭条件	(6)
1.2 齿廓啮合基本定理	(11)
1.3 共轭齿廓的形成及其求法的基本概念	(13)
1. 包络法	(13)
2. 齿廓法线法	(13)
1.4 旋轮线与卡姆士定理	(14)
1. 旋轮线(Roulette)	(14)
2. 卡姆士(Camus)定理	(15)
1.5 平面坐标的变换	(16)
1. 齿轮与齿轮啮合	(16)
2. 齿轮与齿条啮合	(21)
1.6 共轭齿廓的求法——齿廓法线法	(23)
1. 齿轮与齿轮啮合	(23)
2. 齿轮与齿条啮合	(25)
1.7 根据已知的啮合线求共轭齿廓	(32)
1. 齿条齿廓的计算	(32)
2. 齿轮齿廓的计算	(34)
1.8 平面啮合共轭齿廓的曲率及其关系	(42)
1. 共轭齿廓的曲率	(42)
2. 共轭齿廓的曲率关系——欧拉-萨瓦里(Euler-Savary)公式	(45)
1.9 博比利厄(Bobillier)法则及其应用	(49)
1. 外摆线类旋轮线	(53)

2. 渐开线类旋轮线·····	(54)
1.10 平面啮合共轭齿廓的滑动率·····	(55)
1.11 过渡曲线·····	(58)
1.12 平面啮合的两类界限点·····	(62)
1. 曲率干涉界限点·····	(62)
2. 啮合界限点·····	(63)
1.13 综合实例·····	(65)
习题 1·····	(73)
第 2 章 螺旋面及其加工原理	
2.1 等升距圆柱螺旋面·····	(76)
1. 等升距圆柱螺旋面的形成及其方程式·····	(76)
2. 螺旋面的法线·····	(78)
3. 螺旋面沿自身的运动·····	(81)
4. 几种常用的螺旋面·····	(83)
2.2 刀具回转面与工件螺旋面的接触条件·····	(97)
2.3 已知工件螺旋面求刀具回转面截形·····	(100)
2.4 已知刀具回转面求它加工的工件螺旋面·····	(102)
2.5 盘形刀具加工螺旋面时的过渡表面及其消除办法·····	(110)
1. 过渡表面及其方程式·····	(110)
2. 过渡表面的消除·····	(112)
2.6 干涉现象及其校验·····	(114)
2.7 综合实例·····	(118)
习题 2·····	(123)
第 3 章 空间啮合的基本原理	
3.1 采用的坐标系及其变换·····	(126)
3.2 相对运动速度·····	(131)
3.3 相对螺旋运动及瞬轴面·····	(133)
3.4 空间啮合齿轮副的产形轮·····	(139)
3.5 啮合方程式·····	(145)
3.6 空间啮合运动的自由度·····	(147)
3.7 单自由度啮合计算及实例·····	(148)
1. 啮合方程式及其解法·····	(148)
2. 单自由度啮合的实例·····	(152)

3.8	双自由度啮合计算及实例	(160)
1.	啮合方程式及其解法	(160)
2.	双自由度啮合的实例	(162)
3.9	三自由度啮合计算及实例	(172)
1.	三自由度啮合能够实现的条件	(172)
2.	三自由度啮合的实例——对角滚齿	(174)
3.10	点接触螺旋齿轮副的齿面计算	(177)
3.11	点接触滚刀齿面的计算	(185)
	习题 3	(193)

第 4 章 空间啮合的相对滑动及诱导法曲率

4.1	二阶曲面(密切抛物面)	(195)
4.2	相对曲面的诱导法曲率及诱导短程挠率	(197)
1.	点接触曲面的诱导法曲率及诱导短程挠率	(197)
2.	齿面的曲率干涉	(200)
3.	线接触齿面的诱导法曲率及诱导短程挠率	(201)
4.3	关于空间相对运动的基本知识	(202)
1.	两齿轮(坐标系)的相对运动速度	(202)
2.	矢量在动标中的变化量与在定标中的变化量的关系	(203)
3.	点的绝对速度和相对速度	(204)
4.	两齿轮(坐标系)的相对运动加速度	(207)
4.4	轴线固定的齿轮副共轭齿面的相对滑动	(210)
1.	滑动率及其矢量表示式	(211)
2.	滑动率的代数式	(215)
3.	几种常见传动情况的滑动率计算式	(216)
4.5	两类界限点的基本概念	(217)
1.	曲率干涉界限点	(218)
2.	啮合界限点	(218)
4.6	线接触共轭齿面的诱导法曲率及诱导短程挠率	(219)
1.	相对运动速度 $v^{(12)}$ 方向的诱导法曲率 $k_v^{(12)}$	(219)
2.	诱导法曲率的两个主值	(221)
3.	任意方向的诱导法曲率	(225)
4.	共轭齿面的诱导短程挠率	(227)
5.	滚动接触点处的 $k_n^{(12)}$ 及 $\tau_g^{(12)}$	(228)
4.7	界限点处的法曲率及其性质	(229)

1. 曲率干涉及曲率干涉界限点	(229)
2. 啮合界限点	(231)
3. 其它特殊情况	(232)
4.8 给定齿面作为 $\Sigma^{(2)}$ 时的诱导法曲率计算	(233)
4.9 诱导法曲率的另一种计算办法(巴克斯特方法)	(235)
1. 接触线方向角 θ_x	(236)
2. 接触点在 $\Sigma^{(1)}$ 上沿 y 轴方向的移动速度	(237)
3. x 轴和 y 轴方向的诱导法曲率及诱导短程挠率	(237)
4. 两类界限点的条件	(239)
5. 计算实例	(239)
习题 4	(243)

第 5 章 空间啮合的二次接触及其应用

5.1 空间啮合的二次接触及啮合界限	(245)
5.2 啮合界限点的另一表示法	(248)
5.3 啮合界限点处共轭齿面的相互关系	(250)
1. 第一次包络	(250)
2. 第二次包络	(252)
5.4 平面啮合的啮合界限点和二次包络	(255)
5.5 平面二次包络蜗轮副	(256)
1. 第一次包络	(256)
2. 第二次包络	(258)
3. 第一次包络时,蜗轮齿面 $\Sigma^{(1)}$ 上的曲率干涉界限线	(262)
4. 第一次包络时的 θ_v 角	(263)
5. 第一次包络时的 $k_g^{(12)}$	(263)
5.6 综合实例——TI 蜗杆传动	(264)
1. 斜齿渐开线圆柱齿轮的齿面	(264)
2. 坐标系及啮合方程式	(265)
3. 啮合面及蜗杆齿面方程式	(266)
4. 啮合界限线	(267)
5. 曲率干涉界限线	(267)
6. 诱导法曲率	(269)
7. 二次包络 TI 蜗杆传动	(270)
习题 5	(272)

第 6 章 准双曲面齿轮传动的基本原理

6.1	准双曲面齿轮副的瞬轴面	(274)
6.2	准双曲面齿轮副分度圆锥参数的计算	(276)
6.3	螺旋角及压力角	(281)
6.4	极限压力角及极限齿线曲率	(285)
6.5	瞬时轴与分度平面的相对位置	(289)
1.	瞬时轴与分度平面的夹角 i_k	(289)
2.	瞬时轴在分度平面上的投影与齿线方向 t 的夹角	(290)
6.6	啮合面与分度平面的交线在 P 点的切线与齿线 t 的夹角	(290)
6.7	齿面上瞬时接触线方向与 $v^{(12)}$ 的夹角	(294)
6.8	法向截面内啮合面在 P 点的切线与分度平面的夹角	(296)
6.9	法向诱导法曲率 $k_N^{(12)}$	(298)
6.10	其它方向的诱导法曲率及诱导短程挠率	(300)
习题 6	(301)

附录

A.1	矢量运算	(302)
A.2	矩阵浅说	(312)
A.3	曲面法曲率的基本知识	(317)

参考文献	(328)
------	-------	-------

第 1 章 平面啮合的基本原理

随着机器工业的迅速发展,各种新型齿轮和齿轮加工新工艺的应用也日益增加。单就齿廓形状来说,目前除了渐开线之外,其它齿形也用得越来越广泛。为了适应这种发展趋势,有必要研究齿轮啮合的一般理论,探讨它们的共同规律,作为研究各种具体的齿轮传动特性和加工方法的基础。本章介绍的就是平面啮合的基本原理。

所谓平面啮合,是指轴线平行的直齿齿轮副啮合,由于这种齿轮副在垂直于它们轴线的任一截面中的啮合情况是完全一样的,所以只需研究其中一个截面的情况,即平面上的啮合情况即可。

1.1 瞬心线

1. 相对运动及瞬心线方程式

设有两个直齿齿轮,它们的轴线平行,在垂直于轴线的一个截面内,齿轮的中心为 O_1 及 O_2 (图 1-1),齿轮的瞬时角速度为 ω_1 及 ω_2 ,从起始位置起的转角为 φ_1 及 φ_2 ,则

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

瞬时传动比 i_{12} 为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} \quad (1-1)$$

如果齿轮副不是以等传动比传动,则 i_{12} 是个变数,它可以表示为齿轮 1 的转角 φ_1 的函数,即

$$i_{12} = f(\varphi_1) \quad (1-2)$$

当传动比是常值时

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

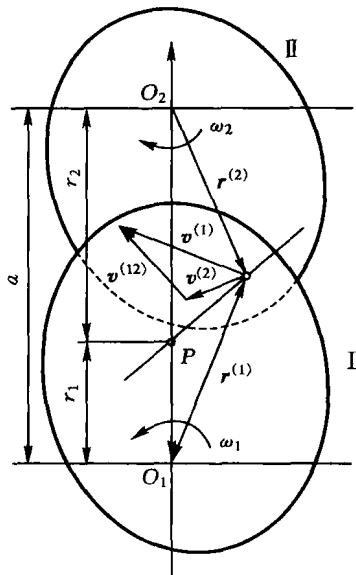


图 1-1 两齿轮的相对运动

设平面 I 随同齿轮 1 绕 O_1 旋转, 瞬时角速度用矢量表示为 $\omega^{(1)\text{①}}$; 平面 II 随同齿轮 2 绕 O_2 旋转, 瞬时角速度矢量为 $\omega^{(2)}$, $\omega^{(1)}$ 及 $\omega^{(2)}$ 的模就是上述的 ω_1 及 ω_2 。在任意一点 M 处, 齿轮 1 对于齿轮 2 的相对运动速度矢量 $v^{(12)}$ 的求法如下:

M 点随 I 转动时的线速度矢量 $v^{(1)}$ 为

$$v^{(1)} = \omega^{(1)} \times r^{(1)}$$

M 点随 II 转动时的线速度矢量 $v^{(2)}$ 为

$$v^{(2)} = \omega^{(2)} \times r^{(2)}$$

上面二式中, $r^{(1)} = \overrightarrow{O_1M}$, $r^{(2)} = \overrightarrow{O_2M}$ 。

相对运动速度 $v^{(12)}$ 即为

$$v^{(12)} = v^{(1)} - v^{(2)} = \omega^{(1)} \times r^{(1)} - \omega^{(2)} \times r^{(2)} \quad (1-3)$$

如果从 O_2 向 O_1 引一个矢量 a , 它的模就是中心距 a , 则

$$r^{(2)} = r^{(1)} + a$$

所以 $v^{(12)}$ 又可写成

$$v^{(12)} = (\omega^{(1)} - \omega^{(2)}) \times r^{(1)} - \omega^{(2)} \times a = \omega^{(12)} \times r^{(1)} - \omega^{(2)} \times a \quad (1-4)$$

式中的 $\omega^{(12)}$ 称为相对角速度, 而且

$$\omega^{(12)} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)} \quad (1-5)$$

M 点的位置不同, 该点处的相对运动速度 $v^{(12)}$ 也不同。对于 $v^{(1)} = v^{(2)}$ 的点, $v^{(12)} = 0$ 。由于这点的 $v^{(1)}$ 与 $v^{(2)}$ 方向相同, 模也相等, 它必定在中心连线 O_1O_2 上 (否则 $v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 的方向就不可能相同), 设它为图 1-1 中的 P 点, 而 $O_1P = r_1$, $O_2P = r_2$, 则从 $v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 的模相等的条件可知, $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ 。

所以瞬时传动比成为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1-6)$$

注意, 不要把矢量 $\omega^{(1)}$ 、 $\omega^{(2)}$ 与标量 ω_1 、 ω_2 (即 $\omega^{(1)}$ 、 $\omega^{(2)}$ 的模) 相混, 也不要使径矢 $r^{(1)} = \overrightarrow{O_1M}$, $r^{(2)} = \overrightarrow{O_2M}$ 与 $r_1 = O_1P$, $r_2 = O_2P$ 相混。

P 点处的相对运动速度 $v^{(12)}$ 既为零, 则它也就是两平面 (齿轮) 的瞬时相对运动中心 (瞬心), 而且

$$v^{(12)} = \omega^{(12)} \times \overrightarrow{PM} \quad (1-7)$$

这可以证明如下: 由图 1-1, 有

$$r^{(1)} = \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{PM}$$

$$r^{(2)} = \overrightarrow{O_2P} + \overrightarrow{PM}$$

① 角速度矢量的方向用右手法则确定, 即如果以右手四指指向转动方向, 则大拇指就是角速度矢量的方向。

代入式(1-3),得

$$\mathbf{v}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \overrightarrow{O_1 P} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \overrightarrow{PM} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \overrightarrow{O_2 P} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \overrightarrow{PM}$$

而 $\boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \overrightarrow{O_1 P} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \overrightarrow{O_2 P}$, 所以得到

$$\mathbf{v}^{(12)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \overrightarrow{PM} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \overrightarrow{PM} = \boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \overrightarrow{PM}, \text{即式(1-7).}$$

由此可知,任意点 M 处的相对运动速度 $\mathbf{v}^{(12)}$, 就等于这一点以角速度 $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ 绕 P 转动时的线速度。由此又可知, $\mathbf{v}^{(12)}$ 是与 MP 垂直的。

由于 P 点在联心线 $O_1 O_2$ 上, 而且 $\frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{r_2}{r_1} = i_{12}$, 当传动比 i_{12} 是变数时, 在齿轮传动过程中, P 点的位置也是在 $O_1 O_2$ 上变动的。 P 点在平面 I 及平面 II 上的轨迹就称为齿轮 1 及齿轮 2 的瞬心线(图 1-2)。

在齿轮传动中, 常把齿轮的瞬心线称作节曲线, 两者的含义是一样的。本书下面的瞬心线称做节曲线也是可以的。

由于两瞬心线在任意瞬时都只接触在一点(瞬心), 而在接触点处它们的相对运动速度又等于零, 所以它们作相对的纯滚动。如果把两个瞬心线做成摩擦轮并且让它们作纯滚动, 那么它们的运动规律和两个齿轮的运动规律是一样的。

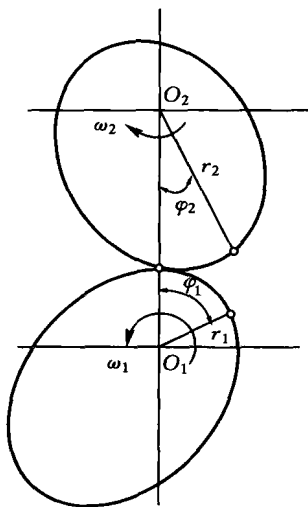


图 1-2 瞬心线

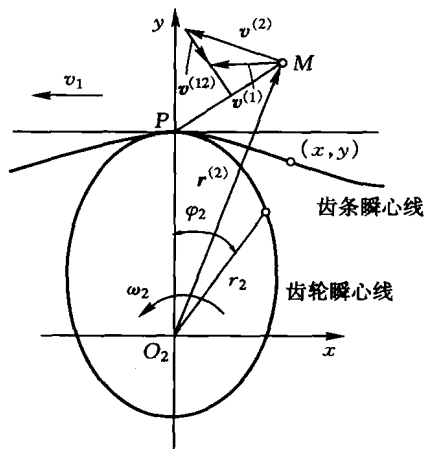


图 1-3 齿条与齿轮啮合

下面来求瞬心线的方程式。首先, 因

$$r_1 = a - r_2 = a - i_{12} r_1$$

所以

$$r_1 = \frac{a}{1 + i_{12}} = \frac{a}{1 + f(\varphi_1)} \quad (1-8)$$

由于中心距 a 是常值,所以上式就表示齿轮 1 的瞬心线方程式(r_1, φ_1)。

齿轮 2 的瞬心线方程式(r_2, φ_2)可由式(1-1)及(1-8)知道为

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a - r_1 = a \frac{i_{12}}{1 + i_{12}} = a \frac{f(\varphi_1)}{1 + f(\varphi_1)} \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{i_{12}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{f(\varphi_1)} d\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式(1-8)及(1-9)是两瞬心线的极坐标方程式,它们的极角大小分别等于两齿轮的转角值 φ_1 及 φ_2 ,而在作出瞬心线的形状时则要注意,根据图 1-1 规定的转动方向,齿轮 1 的 ω_1 是逆时针方向转动的,所以它的极角应该是从起始位置 O_1P 起顺时针方向量取 φ_1 角;同样,因齿轮 2 的 ω_2 是顺时针方向转动的,所以它的极角应该是从起始位置 O_2P 起逆时针方向量取 φ_2 角,如图 1-2 所示。

齿条与齿轮啮合时的情况也可以用类似的方法分析(图 1-3)。设齿条平移的瞬时速度矢量为 $\boldsymbol{v}^{(1)}$,它的模为 v_1 ;齿轮转动的瞬时角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$,它的模为 ω_2 ,则定义齿条与齿轮的瞬时传动比 i_{12} 为

$$i_{12} = \frac{v_1}{\omega_2} = \psi(\varphi_2)$$

上式表示当传动比 i_{12} 是变数时,把它表示为齿轮转角 φ_2 的函数。

齿条与齿轮在任意点 M 处的相对运动速度 $\boldsymbol{v}^{(12)}$ 为

$$\boldsymbol{v}^{(12)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \boldsymbol{r}^{(2)} \quad (1-10)$$

和齿轮副啮合时相似,此时,相对运动速度 $\boldsymbol{v}^{(12)} = 0$ 的瞬心一定位于通过 O_2 并且与 $\boldsymbol{v}^{(1)}$ 垂直的直线上,设这一点是 P ,而 $O_2P = r_2$,则

$$\omega_2 r_2 = v_1$$

所以

$$r_2 = \frac{v_1}{\omega_2} = \psi(\varphi_2) = i_{12} \quad (1-11)$$

同样可以证明,在任意一点 M 处的相对运动速度,就等于这一点以角速度 $-\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 绕 P 点转动时的线速度。

当传动比 i_{12} 是变数时,从上式可知 r_2 是变化的,即在传动过程中 P 点的位置是变动的,而它在齿条和齿轮平面上的轨迹分别是它们的瞬心线。同样,两瞬心线是作相对纯滚动的。

现在来求齿条和齿轮的瞬心线方程式。从式(1-11)可以看到,当把传动比 i_{12} 表示为齿轮转角 φ_2 的函数 $\psi(\varphi_2)$ 时,该式也就是齿轮 2 的瞬心线方程式(r_2, φ_2)。

以 O_2 为原点作在空间固定的坐标系(O_2-x, y),则因 $r_2\omega_2 = v_1$,可以写成

$$r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dx}{dt}$$