吕品　　主编

辽宁科学技术出版社

初中数学竞赛指南

下册

CHUZHONGSHUXUEJINGSHAIZHINAN

初中数学竞赛指南

（下　册）

吕　　品　主编

马守成　王艺飞
刘人和　石懋山　编著
刚铁滨　邱兆福
高喜龙　蒋秀燕

辽宁科学技术出版社

1988·沈阳

初中数学竞赛指南

（下册）

Chuzhong Shuxue Jingsai Zhinan

吕　品 主编

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　朝阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：7 3/4　字数：170,000
1988年6月第1版　1988年6月第1次印刷

责任编辑：宋纯智　符　宁　　插　图：王凤祥
封面设计：冯守哲　　责任校对：周　文

印数：1—21,315

ISBN 7-5381-0231-0/O·20

定　价：1.95 元

目　录

第十讲　三角形的特殊点和线段

三角形的特殊点或巧合点，通常是指三角形的"心"。它们是三条特殊线段的交点，即三线共点的特例。研究这些特殊点和线段，对于我们如何证明或计算都有很大的帮助。下面我们将围绕这个问题了解它们的性质及其在解题中的作用。

一、基础知识

1．三角形的"五心"

（1）外心：三角形外接圆的圆心，它是三角形三边垂直平分线的交点。

（2）垂心：三角形三边上的高线的交点，该点是三个经过顶点和垂足的圆的交点。

（3）重心：三角形三边上的中线的交点，该点是三条特殊位置的塞瓦线的交点。

（4）内心：三角形内切圆的圆心，它是三角形三个内角平分线的交点。

（5）旁心：三角形的一个内角平分线（射线）与其它两个外角的平分线的交点。显然，这样的交点有三个，即三角形有三个旁心。

2．三角形五心的位置

（1）对于锐角三角形来说，外心、垂心、重心、内心

都在三角形的内部，旁心在三角形的外部。

（2）对于直角三角形来说，重心和内心都在三角形的内部，外心（即斜边的中点）和垂心（即直角的顶点）都在三角形的边上，旁心在三角形的外部。

（3）对于钝角三角形来说，重心和内心都在三角形的内部，外心、垂心和旁心都在三角形的外部。

（4）对于等腰三角形来说，外心、垂心、重心、内心及旁心都在等腰三角形的对称轴上，即五个特殊点共线。

（5）对于等边三角形来说，外心、垂心、重心、内心重合在其中心（正三角形外接圆的圆心），该点是等边三角形三条对称轴的交点。

等边三角形没有对称中心。

3。三角形“五心”的证明方法

由于三角形的“五心”都是在特定条件下形成的，因此我们在说明这些特殊的线段共点时，都是应用最基本的三线共点的证明方法。另外，根据从特殊到一般，一般到特殊的认识过程，我们可以用塞瓦定理等证明三角形的特殊点的存在。

通常使用的证明方法是：

（1）外心和垂心利用线段的垂直平分线的性质证明；

（2）重心利用平行四边形或相似形的性质证明；

（3）内心和旁心利用角平分线的性质证明。

二、关于外心、重心及其关系

外心和垂心的定义不同，性质各异，但它们都与圆有关。因此，反映三角形边角之间的关系都有类似的性质，它们是正弦定理的强化。强化了的正弦定理在几何证明题中相

当有用，使我们找到了用三角法证明几何问题的新途径.

1. 用几何方法证明正弦定理——外心问题

正弦定理的内容是三角形的各边与其所对的角的正弦的比相等，用式子表示为

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

强化后的正弦定理的形式是

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （其中 R 是三角形外 接圆的半径）

证明　设$\triangle ABC$的三边 a、b、c 所对应的角分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，其外接圆 O 的半径为 R.

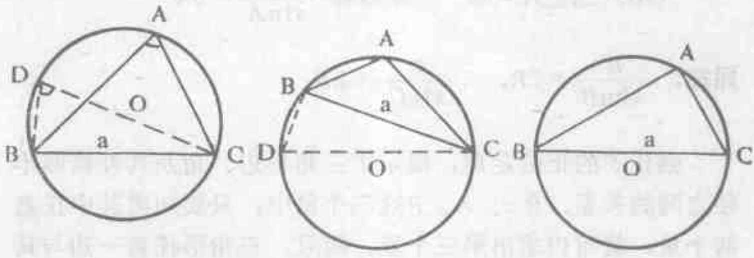

图　1

根据三边和三个角在表达式中的对称性，只要证明$\dfrac{a}{\sin A}=2R$就可以了.

按$\angle A$分别是锐角、钝角和直角三种情况 讨论如下：

（i）当$\angle A<90°$时，锐角$\triangle ABC$的外接圆直径为CD，于是，在Rt$\triangle CDB$中，有 $\sin D=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{a}{2R}$.

$\because \angle A$和$\angle D$是同一条劣弧$\overset{\frown}{BC}$上所对的角，

$\therefore \angle A=\angle D$，有$\sin A=\sin D$

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin A}=2R$。

(ii) 当$\angle A>90^{\circ}$时，钝角$\triangle ABC$的外接圆直径为CD. 于是，在Rt$\triangle CDB$中，有 $\sin D=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{a}{2R}$.

$\because \quad \angle A$与$\angle D$互补，即$\angle D=180^{\circ}-\angle A$.

$\therefore \quad \sin D=\sin(180^{\circ}-A)=\sin A$,

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin A}=2R$.

(iii) 当$\angle A=90^{\circ}$ 显然有 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

同理，$\dfrac{b}{\text{shn}B}=2R$, $\quad \dfrac{c}{\sin C}=2R$.

强化了的正弦定理，揭示了三角形边、角及其外接圆半径之间的关系。在a、A、R这三个量中，只要知道其中任意两个量，就可以求出第三个量，而且，三角形任意一边与其对角正弦的比都等于其外接圆的直径. 因此，当命题中没有涉及$2R$但必须借助于$2R$去证明时，就可以充分利用这个等式，得到$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$. 这将成为我们解决问题的一个重要的工具.

例1 在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边，试证：

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

思路 等式左边的三角函数是三角形三个角的正弦，它们可以用三角形的边与外接圆的半径来表示，然后将含有a，b，c，$2R$的式子化简为零。

证明 根据正弦定理，得

$$\sin A=\frac{a}{k},\ \sin B=\frac{b}{k},\ \sin C=\frac{c}{k}.$$

$$\therefore\quad a\left(\frac{b}{k}-\frac{c}{k}\right)+b\left(\frac{c}{k}-\frac{a}{k}\right)+c\left(\frac{a}{k}-\frac{b}{k}\right)$$

$$=a\cdot\frac{b-c}{k}+b\cdot\frac{c-a}{k}+c\cdot\frac{a-b}{k}$$

$$=\frac{ab-ca+bc-ab+ca-bc}{k}=0\ (k=2R\neq 0).$$

例 2 在$\triangle ABC$中，a，b，c为三边，R为外接圆半径，则$\triangle ABC$的面积$S_\triangle=\frac{abc}{4R}$.

证明 根据三角形的面积定理，有

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$$

又 $$\frac{c}{\sin C}=2R,\text{ 得 }\sin C=\frac{c}{2R}$$

$$\therefore\quad S_\triangle=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

注 若用面积公式$S_\triangle=\frac{1}{2}ah_a$，推得

$$h_a=b\sin C.\ \text{可得 } S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

根据面积公式的对称性，$S_\triangle$有三个表达式：

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\ \sin A=\frac{1}{2}ca\ \sin B=\frac{1}{2}ab\ \sin C.$$

例 3 D为Rt△ABC斜边AB上任意一点，$\odot O_1$、$\odot O_2$分别是△ADC和△BDC的外接圆，它们的半径分别为r_1，r_2。求证：$\operatorname{tg}A=\frac{r_2}{r_1}$.

思路 由$\angle ACB=90°$，可知 $\operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}$.

而BC和AC分别是△BCD和△ACD的边，因此，可用强化后的正弦定理表示这两边，相信在此分式里可约去中间量.

证明 连结CD. 设 $\angle ADC=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，则 $AC=2r_1\sin\alpha$，$BC=2r_2\sin\beta$

又 $\alpha+\beta=180°$

$\therefore\ \sin\alpha=\sin(180°-\beta)=\sin\beta$,

在Rt△ABC中，由$\angle ACB=90°$，

得

$$\operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}=\frac{2r_2\sin\alpha}{2r_1\sin\beta}=\frac{r_2}{r_1}.$$

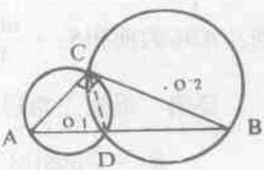

图 2

例 4 已知点O是△ABC的外心，连结AO、BO、CO并延长之，分别交对边BC、CA、AB于D、E、F，R是外接圆的半径。求证：$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$.

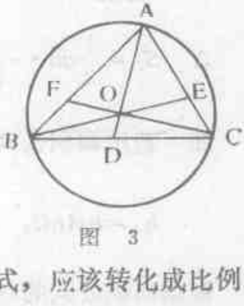

图 3

思路 一般证明线段的倒数关系式，应该转化成比例线

段间的关系式去考虑，有$\frac{R}{AD}+\frac{R}{BE}+\frac{R}{CF}=2$(一定是常数).再设法证明这些线段比的代数式的值为这个常数，下列证明方法是常用的，即由面积间的关系式得常数.

证明　由同底或等高易知，

$$\frac{AO}{AD}=\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_{\triangle ABO}+S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle ABC}} \quad ①$$

同理，

$$\frac{BO}{BE}=\frac{S_{\triangle BCO}+S_{\triangle BAO}}{S_{\triangle ABC}} \quad ②$$

$$\frac{CO}{CD}=\frac{S_{\triangle CAO}+S_{\triangle CBO}}{S_{\triangle ABC}} \quad ③$$

由①+②+③，得

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=\frac{2(S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle CAO})}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{2S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=2.$$

又　$OA=OB=OC=R$,

$$\therefore \quad \frac{R}{AD}+\frac{R}{BE}+\frac{R}{CF}=2,$$

即　$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$.

2. 垂心问题——史坦纳定理

三角形三条高线相交于一点的证明是通过$\triangle ABC$的垂心变为$\triangle A'B'C'$的外心来达到的。此时，$\triangle ABC$的三边是$\triangle A'B'C'$的三条中位线（如图4）.$\triangle ABC$的三条高是$\triangle A'B'C'$三边的垂直平分线.由三角形$A'B'C'$三边垂直平分线相交于一点，证明中位线构成的三角形的三条高也相交于一点.

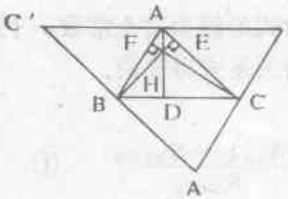

图 4

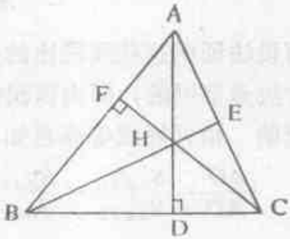

图 5

它给我们提供了证明三线共点的一种有效的方法。

（1）垂心涉及到的一些性质

①$\triangle ABC$任意两条高线AD、BE相交于H，则$CH\perp AB$。

②若H是$\triangle ABC$的垂心，则必有$AH\perp BC$，$BH\perp AC$，$CH\perp AB$，即A、B、C、H四点中，任意两点的连线必垂直于其余两点的连线。

③H是$\triangle ABC$的垂心，则有$\angle BHC=180°-\angle A$，$\angle CHA=180°-\angle B$，$\angle AHB=180°-\angle C$。

④平面上三三不共线的四个点A、B、C、H，若有一点H是其余三点连线所围成的三角形的垂心，那么四点中任意一点都必定是其余三点连线所围成三角形的垂心。例如，H是$\triangle ABC$的垂心，A是$\triangle HBC$的垂心，B是$\triangle HCA$的垂心，C是$\triangle HAB$的垂心。

⑤$\triangle ABC$中三边上的高AD、BE、CF相交于H，则有若干组相似的直角三角形。

⑥$\triangle ABC$中三边上的高AD、BE、CF相交于H，则有六个四点共圆的圆。

（2）用正弦定理证明：若H是$\triangle ABC$的垂心，则有

$$\frac{AH}{|\cos A|}=\frac{BH}{|\cos B|}=\frac{CH}{|\cos C|}=2R$$（R是△ABC外接圆的半径）

证明　如果在锐角△ABC中，H是垂心，D、E、F是垂足。

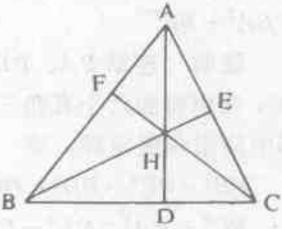

图　6

在△ABH中，根据正弦定理，得 $\frac{AH}{\sin ABH}=\frac{AB}{\sin AHB}$，

而　$\angle AHB=180°-\angle ACB$，

$\angle ABH=\angle ACF$，$\angle ACF=90°-\angle CAF$，又

$$\frac{AB}{\sin(180°-C)}=\frac{2R\sin C}{\sin C}=2R,\quad \frac{AH}{\sin(90°-A)}=\frac{AH}{\cos A},$$

$$\therefore\quad \frac{AH}{\cos A}=\frac{AH}{|\cos A|}=2R.$$

如果$\angle A$是钝角，$\cos A<0$，$|\cos A|>0$．同样有$\frac{a}{|\cos A|}=2R$．

根据对称性，同理有　$\frac{b}{|\cos B|}=2R$，　$\frac{c}{|\cos C|}=2R$．

当$\angle A=\mathrm{Rt}\angle$时，$\cos 90°=0$，因为分母不得为零，所以把分式改写成整式，$AH=2R|\cos A|=0$．这恰好反映垂心$H$与直角顶点$A$重合的事实。

因此，在实际应用中，我们可以用下面的表达式：

$AH=2R\cos A(0°<A\leqslant 90°)$，$AH=-2R\cos A\,(90°<A<180°)$．

（3）史坦纳定理

过任意一点P，作△ABC各边BC、CA、AB的垂线PD、

PE、PF，D、E、F 为垂足，则有

$$BD^2+CE^2+AF^2=DC^2+EA^2+BF^2$$

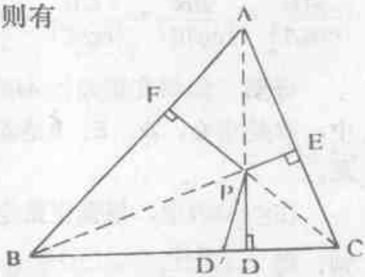

图 7

证明 连结 PA、PB、PC，在所得的六个直角三角形中应用勾股定理，有

$$PB^2-PC^2=BD^2-DC^2,$$
$$PC^2-PA^2=CE^2-EA^2,$$
$$PA^2-PB^2=AF^2-FB^2.$$

将上面三个等式相加，再整理得

$$BD^2+CE^2+AF^2=DC^2+EA^2+BF^2$$

史坦纳定理的逆定理：

在$\triangle ABC$的边 BC、CA、AB （或延长线）上各取一点 D、E、F．若 $DB^2-DC^2+EC^2-EA^2+FA^2-FB^2=0$， 则过$D$、$E$、$F$所作边$BC$、$CA$、$AB$的垂线相交于一点。

证明 由于垂直于AC、BC的垂线 PE、PD 相交于一点 P，过P作 $PD'\perp BC$，D' 是垂足。利用原命题的结论和逆命题的题设，可以证明$BD'=BD$，有D'与D重合。

利用史坦纳定理的逆定理，证明三角形三边的垂直平分线相交于一点是很显然的，因为$BD=DC$，$CE=EA$，$AF=FB$，所以$DB^2-DC^2+EC^2-EA^2+FA^2-FB^2=0$，即三边中垂线相交于一点。

三角形的垂心也满足史坦纳定理的逆定理。

史坦纳定理和下面将要提到的塞瓦定理，不仅为研究三角形的特殊点提供了简练的证明方法，而且也为证明共点线问题提供了重要的依据和思维方法。

例 5 如果三角形的垂心分每条高为两部分，则两部分

的乘积是一个常数。

证明 如图在确定的$\triangle ABC$中，AD、BE、CF是高，H为垂心。则 $AH=2R|\cos A|$，$BH=2R|\cos B|$，$CH=2R|\cos C|$。

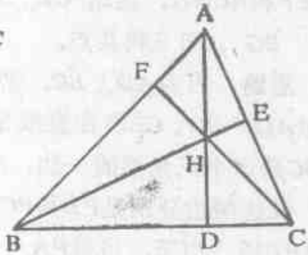

图 8

在$\triangle BHD$中，有 $HD=BH\cdot\sin(90°-C)=BH\cdot|\cos C|$
$=2R\cdot|\cos B|\cdot|\cos C|=2R|\cos B\cdot\cos C|$。又$AH=2R|\cos A|$。

$\therefore$ $AH\cdot HD=4R^2|\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C|$，

同理，$BH\cdot HE=4R^2|\cos A\cos B\cos C|$，

$CH\cdot HF=4R^2|\cos A\cos B\cos C|$。

这里，$4R^2$是常数，且关于三个顶点是对称的，所以这个乘积与三高所在位置无关。对于这个确定的三角形来说，每条高被垂心所分成的两部分的乘积是一个常数。

例 6 在$\triangle ABC$的边 AB、AC 上向形外分别作正方形

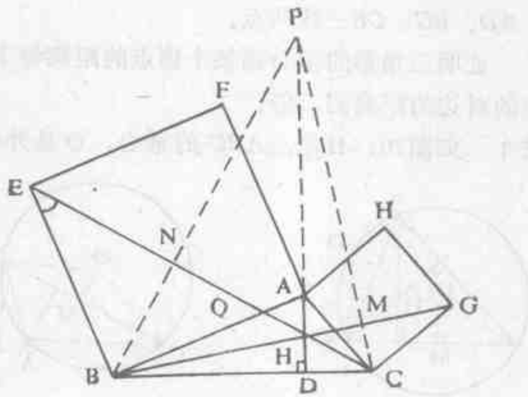

图 9

$ABEF$和$ACGH$，连结 CE、BG．又作BC 边上的高AD，则AD、BG、CE三线共点．

思路　因为$AD\perp BC$，若证AD、BG、CE三线共点，可猜想AD、BG、CE所在直线是某个三角形的高所在的直线，且BC是这个三角形的一边，而另外两边应分别与CE和BG垂直，设这两边分别是PB和PC，则P 应在DA的延长线上，由$\triangle APB\cong\triangle BCE$，可得$PA=BC$．

证明　延长DA到P，使$AP=BC$，连结PB、PC．

$\because$　$\angle CBA=PAF$，

$\therefore$　$\angle CBE=\angle PAB$．

又　$BE=AB$，则$\triangle ABP\cong\triangle BEC$，有$\angle ABP=\angle BEC$．

设CE交AB于Q，PB交CE于N，PC交BG于M．

在$\triangle BEQ$和$\triangle NBQ$中，有 $\angle BNQ=\angle QBE=90°$，

$\therefore$　$CE\perp BP$．

同理，$BG\perp CP$于M．

则PD、BM、CN为$\triangle PBC$的三条高，它们必交于点H．

$\therefore$　AD、BG、CE三线共点．

例 7　证明三角形的垂心到某个顶点的距离等于外心到这个顶点的对边的距离的二倍．

证法 1　如图10，H是$\triangle ABC$ 的垂心，O是外心，OM

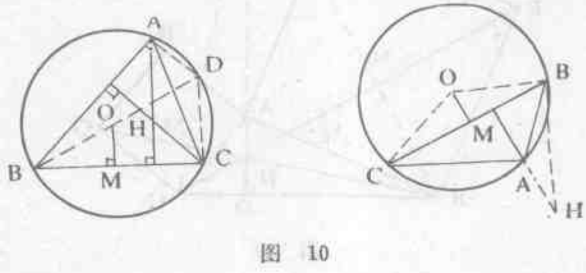

图　10

$\perp BC$，M是垂足．

当$\angle A$为锐角时，作直径 BD，则 OM 是 $\triangle BCD$ 的中位线，有 $OM \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DC$．

又$\because AD \perp AB$，$CH \perp AB$，

$\therefore AD \parallel HC$ $\therefore$四边形$AHCD$是平行四边形．

从而 $AH = DC$ $\therefore AH = 2 \cdot OM$．

当$\angle A$为直角时，H与A两点重合，显然有 $AH = 2 \cdot OM = 0$，结论成立．

当$\angle A$为钝角时，有$\angle BOM = 180° - \angle A$，在$Rt\triangle BOM$中，$\therefore OM = R\cos(180° - A) = R|\cos A| = \frac{1}{2}AH$．

$\therefore AH = 2 \cdot OM$．因此，命题得证．

证法 2　如图11，连结MN，则MN是$\triangle ABC$的中位线，有$MN \parallel AC$

又$OM \parallel AH$．$ON \parallel CH$，

$\therefore \triangle OMN \backsim \triangle HAC$．

因此，得$\frac{OM}{HA} = \frac{ON}{HC} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$

也就是$AH = 2 \cdot OM$，$CH = 2ON$．

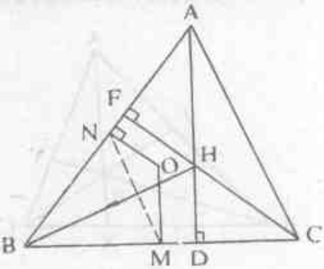

图　11

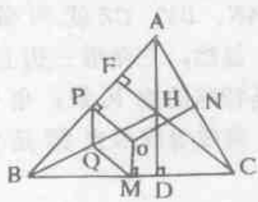

图　12