21世纪大学数学创新教材

线性代数

李书刚　编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学创新教材·

线性代数

李书刚　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据作者多年来讲授线性代数课程的讲义整理编写而成的.全书共分六章，分别为行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值特征向量和方阵的对角化、二次型、线性空间与线性变换.各章均配有一定数量的习题，并选编了20年来数学(一)考研试题.

本书可作为高等学校教材，也可供考研复习使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李书刚编.—北京：科学出版社，2008

21世纪大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-022863-5

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第133155号

责任编辑：张颖兵　梅　莹／责任校对：曾　莉

责任印制：董艳辉／封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉嘉捷印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年8月第　一　版　开本：B5(720×1000)

2008年8月第一次印刷　印张：12

印数：1—5 000　字数：231 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

线性代数是一门应用十分广泛的数学学科，也是大学本科段许多专业的一门重要基础理论课程.线性代数为研究和处理涉及许多变元的线性问题提供了有力的数学工具，这一工具在工程技术、经济科学和管理科学中都有广泛的应用.学习本课程可掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，培养应用线性代数的基本思想和基本方法，以及分析和解决问题的能力.

本书包括行列式，矩阵，线性方程组，矩阵的特征值、特征向量和方阵的对角化，二次型，线性空间与线性变换等六章.各章习题均分为 A 类、B 类.A 类为基础题，对巩固所学的内容十分有益.B 类汇编了自 1987 年以来数学一考研试题中的线性代数方面的大部分题目，学有余力的同学可以选做部分题目提高自己的解题能力.

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2008 年 6 月

目　　录

前言
第一章　行列式 …… 1
第一节　二阶、三阶行列式 …… 1
第二节　排列与逆序 …… 6
第三节　n 阶行列式 …… 8
第四节　行列式的性质 …… 13
第五节　行列式的计算 …… 18
第六节　行列式按一行(列)展开 …… 23
第七节　克莱姆(Cramer)法则 …… 30
习题一 …… 35
第二章　矩阵 …… 39
第一节　矩阵的概念 …… 39
第二节　矩阵的运算 …… 41
一、矩阵的加法和数与矩阵的乘法 …… 42
二、矩阵的乘法 …… 43
三、矩阵的转置 …… 48
四、方阵的幂与方阵的多项式 …… 49
第三节　分块矩阵 …… 50
第四节　逆矩阵 …… 55
第五节　初等矩阵 …… 61
第六节　矩阵的秩 …… 68
习题二 …… 71
第三章　线性方程组 …… 79
第一节　线性方程组的消元法 …… 79
第二节　n 维向量空间 …… 87
第三节　线性相关性 …… 89
一、线性组合与线性表示 …… 89
二、线性相关与线性无关 …… 91
三、关于线性组合与线性相关的定理 …… 96
四、向量组的秩 …… 100

第四节 线性方程组解的结构 …… 104
一、齐次线性方程组解的结构 …… 104
二、非齐次线性方程组解的结构 …… 108
习题三 …… 112
第四章 矩阵的特征值、特征向量与方阵的对角化 …… 120
第一节 向量的内积与正交向量组 …… 120
第二节 矩阵的特征值与特征向量 …… 125
第三节 相似矩阵与方阵的对角化 …… 129
一、相似矩阵及其性质 …… 129
二、n 阶矩阵与对角矩阵相似的条件 …… 130
三、实对称矩阵的对角化 …… 132
习题四 …… 137
第五章 二次型 …… 141
第一节 二次型及其标准形 …… 141
第二节 正定二次型 …… 152
习题五 …… 157
第六章 线性空间与线性变换 …… 159
第一节 线性空间的概念与性质 …… 159
第二节 线性空间的基与维数 …… 161
第三节 线性变换 …… 167
习题六 …… 171
习题参考答案 …… 173

第一章　行　列　式

第一节　二阶、三阶行列式

解方程是代数中一个基本的问题，为了研究一般的线性方程组的解，首先回忆一下中学里学过的解二元一次方程组与三元一次方程组的方法，由此引出二阶、三阶行列式的相关知识. 先看下面的例子.

例 1　求解二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+3y=7,\\3x-y=5.\end{cases}$$

解　用代入消去法，在第二个方程中解出 y，即 $y=3x-5$，代入第一个方程得到

$$2x+3(3x-5)=7,$$

整理得 $11x=22$，于是 $x=2$. 再将 $x=2$ 代入 $y=3x-5$，求得 $y=1$. 于是上述方程组有唯一一组解

$$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$$

大家不难想象这种代入消去法也可以用来求解一般的三元一次线性方程组. 这个方法虽然简单有效，但也有很大的局限性. 局限之一，当未知数个数比较多时，运算会变得十分复杂，运算量也很大. 比如，要求解一个有 100 个未知数的线性方程组，得先利用其中一个方程式将第一个未知数用其他 99 个未知数表示出来，再分别代入其余的方程式，使原方程组化成只有 99 个未知数的方程组，再用同样的办法得到一个只含有 98 个未知数的方程组. 如此重复，一直做到只含有一个未知数的情形，这时求出这个一元一次方程的解，再返回去依次求出所有未知数来. 局限之二是不能给出一个规范化的公式，这对于从理论上分析线性方程组带来极大的不便.

为了克服上述局限，我们来分析下列二元一次方程组的解法：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}$$

用 a_{22} 乘第一式两边，用 $-a_{12}$ 乘第二式两边，再将两式相加，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

用类似办法消去 x_1，解得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

我们注意到，上面的解的分母由方程组的未知数的系数构成，若把这 4 个系数按它们在方程组中的位置，排成两行两列（横排称行，竖排称列）的数表，即用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

式中，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为二阶行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为**二阶行列式的值**. 于是二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，上述解中的分子也可以写成二阶行列式的形式，即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则上述二元一次方程组的解 x_1，x_2 可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

上式即为二元一次线性方程组的求解公式.值得注意的是分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**);x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式;x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 2 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=-3,\\ 2x_1+x_2=-2.\end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

所以该方程组有解,且有

$$D_1=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3-4=-7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6-(-6)=0.$$

因此,方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{7}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{0}{7}=0.$$

类似地,对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}$$

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

表示的代数和式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

称为**三阶行列式的值**.

上述定义表明三阶行列式的值可按图 1.1 的“**对角线法则**”计算. 其遵循的规律为三条实线看做是平行于主对角线的连线,实线上连接的三个元素的乘积取正号;三条虚线看做是平行于副对角线的连线,虚线上连接的三个元素的乘积取负号. 然后取这六项之和即为三阶行列式的值.

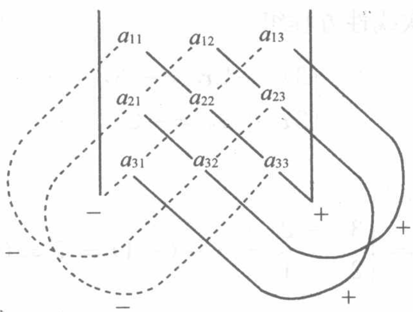

图 1.1

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

可用对角线法则计算出 D_1, D_2, D_3 的值,当系数行列式 $D\neq 0$ 时,上述三元一次线性方程组的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 3 计算三阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则,得

$$A=1\times 0\times 1+(-1)\times 4\times 2+2\times 3\times 1$$

$$-2\times0\times2-(-1)\times3\times1-1\times4\times1$$

$$=-3.$$

例 4 解下列方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11,\\3x_1-2x_2+4x_3=11.\end{cases}$$

解 按照对角线法则,得

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}$$

$$=2\times4\times4+(-1)\times(-2)\times3+(-1)\times3\times(-2)$$

$$-(-1)\times4\times3-(-1)\times3\times4-2\times(-2)\times(-2)$$

$$=60\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\11&4&-2\\11&-2&4\end{vmatrix}$$

$$=4\times4\times4+(-1)\times(-2)\times11+(-1)\times11\times(-2)$$

$$-(-1)\times4\times11-(-1)\times11\times4-4\times(-2)\times(-2)$$

$$=180,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&11&-2\\3&11&4\end{vmatrix}$$

$$=2\times11\times4+(-1)\times3\times11+4\times(-2)\times3$$

$$-(-1)\times11\times3-4\times3\times4-2\times(-2)\times11$$

$$=60,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}$$

$$=2\times4\times11+4\times3\times(-2)+(-1)\times11\times3$$

$$-4\times4\times3-(-1)\times3\times11-2\times11\times(-2)$$
$$=60.$$

因此,原方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{180}{60}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{60}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{60}{60}=1.$$

用行列式来表示二元一次方程组和三元一次方程组的解具有简单明了的优点,我们希望也能用它来将更一般的线性方程组的解表示出来,为此先介绍有关全排列的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

第二节 排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的准备,我们先来讨论一下排列的性质.

定义 1 由 1, 2, …, n 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如,1234 及 2341 都是 4 级排列,45321 是一个 5 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个**逆序**,一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

例如,4 级排列 2431 中,21, 31, 43, 41 是逆序,2431 的逆序数就是 4. 而排列 45321 的逆序数是 9.

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n),$$

如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数则称为**奇排列**,是偶数或 0 则称为**偶排列**.

前面提到的 4 级排列 2431 是偶排列,5 级排列 45321 是奇排列. 排列 $123\cdots n$ 是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,称为**自然排列**. 由于它的逆序数是 0,因此是偶排列. 其他的排列或多或少地会破坏自然顺序,逆序数是对这种破坏程度的一种刻画.

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,其他数码位置不变,得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换,称为一个**对换**,记为对换$(i_s, i_t)$.

例如,对排列 23451 施以对换(1, 4)后得到排列 23154.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证 先看一个特殊的情形,即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\cdots\cdots jk \cdots\cdots \tag{1}$$

经过对换(j, k)变成

$$\cdots\cdots kj \cdots\cdots \tag{2}$$

这里"……"表示那些不动的数. 显然,在排列(1)中如j, k与其他的数构成逆序,则在排列(2)中仍然构成逆序,如不构成逆序则在(2)中也不构成逆序,不同的只是j, k的次序,如果原来j, k组成逆序,那么经过对换,逆序数就减少一个;如果原来j, k不组成逆序,那么经过对换,逆序数就增加一个. 不论增加1还是减少1,排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此,在这个特殊的情形,定理是对的. 再看一般的情形. 设排列为

$$\cdots\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots\cdots \tag{3}$$

经过对换(j, k),排列(3)变成

$$\cdots\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots\cdots \tag{4}$$

不难看出,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现. 从(3)出发,把k与i_s对换,再与i_{s-1}对换……也就是说,把k一位一位地向左移动,经过$s+1$次相邻位置的对换,排列(3)就变成

$$\cdots\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots\cdots \tag{5}$$

从(5)出发,再把j一位一位地向右移动,经过s次相邻位置的对换,排列(5)就变成了(4). 因此j, k对换可以通过$2s+1$次相邻位置的对换来实现. $2s+1$是奇数,相邻位置的对换改变排列的奇偶性. 因此排列(3)(4)的奇偶性相反. □

定理 1.2 由$1, 2, \cdots, n$这n个自然数组成的n级排列一共有$n!$个,其中奇偶排列各占一半. 任意一个n级排列都可以经过一系列对换变为自然排列,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证 n级排列总数为$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$,设其中奇排列为$p$个,偶排列为$q$个. 设想将每一个奇排列都施以同一的对换,例如都作对换$(1, 2)$,则由定理1可知p个奇排列全部变为偶排列,于是$p\leqslant q$;同理,如将全部偶排列也都施以同一对换,则q个偶排列全部变为奇排列,于是又有$q\leqslant p$,所以得出$p=q$,即奇偶排列数相等,各为$\dfrac{n!}{2}$个.

我们通过对排列的级数作数学归纳法,来证明任意一个n级排列都可以经过一系列对换变成$12\cdots n$.

1级排列只有一个,结论显然成立.

假设结论对$n-1$级排列已经成立,现在来证对n级排列的情形结论也成立.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，如果 $j_n=n$，那么根据归纳法假设，$n-1$ 级排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换也就把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $12\cdots n$. 如果 $j_n\neq n$，那么对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作对换 (j_n, n)，它就变成 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$，这就归结成上面的情形，因此结论普遍成立. □

例 1 求排列 45312 的逆序数.

解 在排列 45312 中，4 排在首位，逆序数为 0；5 前面没有比它本身更大的数，故逆序数为 0；3 前面比 3 大的数有两个即 4 和 5，故逆序数为 2；1 前面的数都比 1 大，故逆序数为 3；2 前面比 2 大的数为 4，5 和 3，故逆序数为 3. 于是这个排列的逆序数为

$$N(45312)=0+0+2+3+3=8.$$

例 2 如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 s，排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数是多少？

解 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中任意两个不同的数码 i_j 和 i_k 必在且仅在 $i_1i_2\cdots i_n$ 或 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 中之一构成一个逆序，同时这两个排列的逆序总数为

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

因此，$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 的逆序数为

$$N(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-s.$$

第三节 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究二阶、三阶行列式的结构. 由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

所以不难看出：

(1) 二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列，当 j_1j_2 取遍了 2 级排列，即 12，21 时，即得到二阶行列式的所有项(不包含符号)，共为 $2!=2$ 项.

三阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包含符号)，共为 $3!=6$ 项.

(2) 每一项的符号是这样确定的，当这一项中元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 如在上述二阶行列式中，当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号；在上述三阶行列式中，当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号.

因此，二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

式中，$\sum$ 表示对 1，2 两个数的所有排列取和. 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

式中，$\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列取和. 仿此，我们可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 由 n^2 个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 因此，n 阶行列式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

式中，$\sum$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取和.

行列式有时简记为 $|a_{ij}|$. 特别地，一阶行列式 $|a|$ 就是 a.

下面来看几个例子.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式，其展开式应有 $4! = 24$ 项，但是由于行列式中许多元素为 0，所以不等于 0 的项数就大大减少了. 具体地，展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

显然，如果 $j_1 \neq 4$，那么 $a_{1j_1} = 0$，从而这个项就等于 0，因此只需考虑 $j_1 = 4$ 的那些项；同理，只需考虑 $j_2 = 3$, $j_3 = 2$, $j_4 = 1$ 这些列指标的项. 这就是说，行列式中不为 0 的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项，而 $N(4321) = 6$，这一项前面的符号应该是正的. 所以

$$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中 $a_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$.

解 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由于 D 中有许多元素为 0，所以 D 中有许多项为 0. 我们先来看一下 D 中哪些项不

为 0,然后再来决定它们的符号.一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行,但第一行中只有 a_{11} 不为 0,因而 $j_1=1$;一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行,第二行中虽有 a_{21}, a_{22} 两个元素,但因 a_{11} 取自第一列,所以第二个元素不能取自第一列,于是第二个元素只能取 a_{22},因而 $j_2=2$.这样推下去,可得 $j_3=3$, $j_4=4$, $\cdots$, $j_n=n$. 因此,D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为 0,其他项均为 0.由于 $N(12\cdots n)=0$,所以这一项应取正号,于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

我们称上面形式的行列式为**下三角形行列式**.同理可得**上三角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

式中,$a_{ii}\neq 0(i=1, 2, \cdots, n)$.

特别地,**对角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三角形行列式及对角形行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.这一结论在今后计算行列式的值时可直接使用.

由行列式定义不难得出,一个行列式若有一行(或一列)中的元素皆为 0,则此行列式必为 0.

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1}$$

式中,$i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.