高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 • 同济大学数学系编

九章丛书

工程数学

线性代数

（第五版）

同步辅导及习题全解

主　编　郭志梅　王曙东

副主编　周湘陵

◆知识点窍　◆逻辑推理　◆习题全解

◆全真考题　◆名师执笔　◆题型归类

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

线性代数（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　郭志梅　王曙东

副主编　周湘陵

编　委（排名不分先后）

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘　岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄　河	李思琦	刘　闯	侯朝阳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

为了帮助广大读者学好线性代数，我们根据原国家教委审定的普通高等学校线性代数课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本具有工具书性质的《线性代数（第五版）同步辅导及习题全解》。本书是同济大学应用数学系编写的《工程数学·线性代数》（第五版）相配套的辅导用书。

本书对教材中的重点、难点做了深刻的分析，各章具体体系是：知识结构网络图、知识点归纳、典型题型的解题方法及技巧、课后习题全解。全书共有六章，分别为：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换。

本书可作为高等院校本科学生的专业课辅导教材和参考用书，也可供考研复习使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数（第五版）同步辅导及习题全解 / 郭志梅，王曙东主编. —北京：中国水利水电出版社，2009

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5084-5981-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①郭…②王… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 161776 号

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **线性代数（第五版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　郭志梅　王曙东 副主编　周湘陵
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	148mm×210mm　32 开本　7.5 印张　308 千字
版　　次	2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	11.80 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

线性代数是大学数学课程中的一门重要的必修课程，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。然而由于线性代数自身的抽象性以及特有的语言符号系统，引入了许多新的概念和思维方式，且解题方法灵活多变，使得线性代数成为众多学习者的一大难关。

为了帮助广大读者学好线性代数，我们根据原国家教委审定的普通高等学校线性代数课程教学基本要求（教学大纲）和研究生入学考试教学大纲编写了这本具有工具书性质的《线性代数（第五版）同步辅导及习题全解》。本书按照《工程数学·线性代数》（第五版）（同济大学编，高等教育出版社出版）的章节顺序，分为六章。

各章具体体系及特点如下：

◆ **知识结构网络图**：以图表的形式概括各章知识点及其之间的联系，使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

◆**知识点归纳**：阐述每一章中重要的性质定理、公式和结论，并对一些难以理解但又是大纲所要求的考研经常涉及到的内容进行了详细的归纳和解释。目的是使读者站在一个更高的角度去分析问题、解决问题。

◆ **典型题型的解题方法及技巧**：本书尽可能地归纳了这门课程所涉及的重要题型，这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的，具有一定的代表性。读者通过对典型题型的“思路点拨”和例题的“逻辑推理”的理解，可以更好地掌握和理解此类题型的解法，从而达到举一反三、触类旁通的效果。

◆ **课后习题全解**：本书对所有课后习题均给出了详细的解答。为了使读者在解题之前能够对题型所涉及的知识点和解题方法有一个把握，我们还对大部分习题编写了“知识点窍”和“逻辑推理”。前者给出了习题所涉及的知识点，后者给出了此题的解题思路和方法。目的是提高读者的综合解题能力。

在成书过程中，编者参考了众多优秀的著作和教材，由于篇幅所限未能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢。

由于时间仓促和编者水平有限书中，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2008 年 12 月

目 录

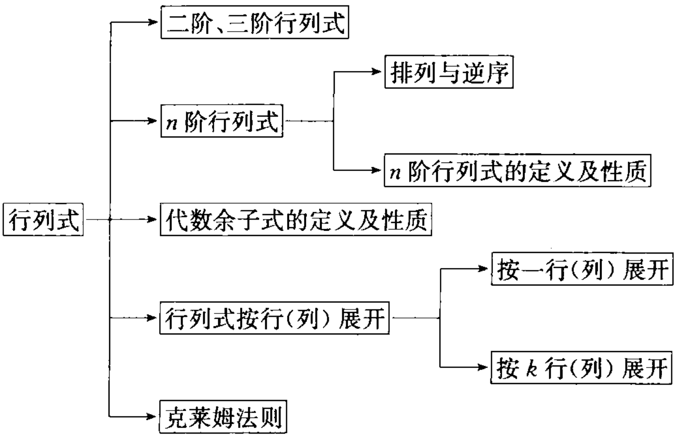
试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 行列式

学习指南

本章内容主要包括全排列及其逆序数，n 阶行列式的定义、基本性质，以及常见 n 阶行列式的计算方法，以及克拉默法则的应用. 其中对行列式的定义及其性质的掌握是重点，它是线性代数的一个基础部分.

知识结构网络图



知识点归纳

重要概念

1.(全)排列

由 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列的种类 $P_n = n!$.

2. 逆序和逆序数

在 n 个元素的任一排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中，若某两个元素的先后次序与标准次序不同，如若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数，记作$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 若 τ 为奇

数,则称$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$为奇排列;若τ为偶数,则称此排列为偶排列.

3. 对换

排列$(i_1,i_2,\cdots,i_t, \cdots, i_s,\cdots i_n)$中,交换任意两数$i_t$和$i_s$的位置,称为一次对换. 对换改变排列的奇偶数.

任意一个n元排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$经过若干次对换可变为$(1,2,\cdots,n)$样的标准排列,且所作的对换次数与排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$有相同的奇偶性. 即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

4. n阶行列式

由n^2个数a_{ij},$1\leqslant i,j\leqslant n$,排成的$n$行$n$列的方形阵列决定的一个数,这里的脚标$i,j$表示这个数的位置,定义如下:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p_1}} a_{2_{p_2}} \cdots a_{n_{p_n}}$$

或 $$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p_1}} a_{2_{p_2}} \cdots a_{n_{p_n}}$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个排列;t为这个排列的逆序数;$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$表示对$1,2,\cdots,n$的所有排列(共有$n!$个)取和. n阶行列式简记作$\det(a_{ij})$其中数a_{ij}为行列式D的(i,j)元.

5. 代数余子式

(1) 先列式按一行(列)展开

在n阶行列式中,把(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划去后,留下来的$n-1$阶行列式叫做(i,j)元a_{ij}的余子式,记作M_{ij},记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则A_{ij}叫做(i,j)元a_{ij}的代数余子式.

(2) 行列式按某k行(列)展开

在n阶行列式D中,任选k行、k列,位于这些行与列交叉处的k^2个元素按原来相对位置组成的k阶行列式M,称为D的一个k阶子式,在D中划去M所在的行与列后得到的$n-k$阶行列式N,称为M的余子式,如果M所在的行的序数是$i_1,i_2,\cdots,i_k$,所在列的序数是$j_1,j_2,\cdots j_k$,则称$(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$为$M$的代数余子式.

基本性质

1. 排列的性质

(1) 对换改变排列的奇偶性.

(2) 在全部n阶排列式中$(n\geqslant 2)$奇偶排列各占一半.

(3) 任意一个n阶排列可经过一系列对换成自然排列并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

2. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{T}$.

(2) 互换两行(列)后的行列式是原行列式的相反数.

(3) 行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k,等于 k 乘此行列式.

推论 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 两行(列)元素对应成比例的行列式为零.

推论 两行(列)元素完全相同的行列式为零.

(5) 若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

(6) 行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

(7) 拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例).

常用方法

1. 排列逆序数的计算

(1) $t(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

(2) $t(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ i_3$ 前面比 i_3 大的个数 $+ \cdots + i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

2. 行列式按行(列)展开的计算

(1) 行列式按一行(列)展开.

设 D 为阶行列式,则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

其中,A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某 k 行(列)展开:设 D 为 n 阶行列式,在 D 中任取 $k(k \leqslant n)$ 行,位于这 k 行中所有 k 阶子式(共有 C_n^k 个)为 $M_1, M_2 \cdots, M_s$,相应的代数余子式为 A_1,$A_2, \cdots A_s$,则 $D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_sA_s$.

注 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零,那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

3. 几种由定义可直接计算的特殊行列式

(1) 二阶行列式:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(2) 三阶行列式:$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3) 上三角形行列式:$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

(4) 下三角形行列式:$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

(5) 反上三角形行列式:$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(6) 反下三角形行列式:$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

4. 范德蒙德(Vader morde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \cdot \cdots (x_n - x_{n-1})$$

5. 克拉默(Cramer) 法则

(1) 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (b_i\text{ 不全为零})$$

的系数行列式$D\neq0$时,该方程组有唯一解. 即$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots x_n=\dfrac{D_n}{D}$.

其中 $$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

反之,如果非齐次线性方程无解或有两个不同解,则它的系数行列式必为零.

(2) 齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$的系数行列式$D\neq0$,则方程组有唯一零解,即$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

反之,如果齐次线性方程组有非零解,则系数行列式$D=0$.

注 ① 克拉默法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

②n元非齐次线性方程组,当系数行列式$D\neq0$时有唯一解,当系数行列式$D=0$时克拉默法则失效,方程组可能有解,也可能无解.

③n元齐次线性方程组,当系数行列式$D\neq0$时有唯一零解,当系数行列式$D=0$时,齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

典型题型的解题方法及技巧

题型Ⅰ:计算排列的逆序数

【思路点拨】 在求排列$j_1,j_2,\cdots,j_n$的逆序数时,可以从第2个数开始,依次统计$j_i(i=2,3,\cdots,n)$与其前面的数构成的逆序个数(即前面比j_i大的数的个数)τ_i,则排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数为$\tau_2+\tau_3+\cdots+\tau_n$.

例 1.1 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)6　3　2　1　4;

(2)1　3　5　$\cdots(2n-1)$　2　4　$6\cdots(2n)$.

解: (1)$\tau(6\ 3\ 2\ 1\ 4)=1+2+3+1=7$, 为奇排列.

(2) 该排列的前n个数$1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$之间不构成逆序,后n个数$2\ 4\ 6\cdots(2n)$之间也不构成逆序,只有前后n个数之间才构成逆序,因此排列的逆序

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

数为

$$\tau = \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n + \tau_{n-1} + \tau_{n+2} + \cdots + \tau_{2n}$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

于$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性讨论如下：

当 $n = 4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n = 4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

综上所述，当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

题型 Ⅱ：低阶(3－5 阶)行列式的计算

【思路点拨】 可采用两种方法：

方法一：根据行(或列)元素的特点，利用行列式的性质化为上(或下)三角形行列式.

方法二：根据行列式按一行(或列)展开公式降价求解.

例 1.2 计算下列行列式

(1) $D = \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$ (2) $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

【逻辑推理】 数字型行列式的计算一般采用把某行(或列)元素中除去某一元素外的其他元素，用行列式的性质都化为零，再利用按行(或列)展开的性质，降低行列式的阶数进行计算.

解： (1) $D = \begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 100\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 2000.$$

(2) 因为该行列式的第 4 列含有 0 元素，且 $a_{21} = 1$，所以，可用行列式的性质把第 4 列的元素 a_{11}、a_{41} 化为 0，再按第 4 列展开.

$$D=\begin{vmatrix}5&-14&-2&0\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\1&6&6&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\-3&5&2\\1&6&6\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}5&-14&2\\2&-9&0\\16&-36&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-9\\16&-16\end{vmatrix}$$

$$=144.$$

题型Ⅲ:n阶行列式的计算

【思路点拨】 n阶行列式的计算方法主要有以下几种:

1. 直接按定义计算,特别是对于非零元素特别少(一般小于$2n$个)的题适用.

2. 利用行列式的性质或重要公式定理化为三角行列式.

3. 利用行列式按行(列)展开定理进行降阶.

4. 升降法. 为了对要计算的行列式进行化简. 根据行列式的特征,有时可把原行列式在保值的情况下加上一行一列再进行计算. 常见的加边法如下:

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\0&a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

5. 递推公式法. 把一个n阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式$D_n=k_1D_{n-1}+k_2D_{n-2}$或$D_n=aD_{n-1}+b$,再根据此关系式递推求得所给$n$阶行列式的值.

6. 拆分法. 行列式拆分成若干个同阶行列式之和,然后求出各行列式的值,再求出原行列式的值.

7. 利用数学归纳法进行计算或证明.

以上方法中,前三种是主要的方法. 在具体解题过程中要根据所求行列式的特征运用其中一种或综合运用多种方法求解.

特征题1: 如果一个行列式所有行(或列)对应元素相加后相等,可把所有行(或列)加到第一行(或第一列),然后提取公因子后再化简计算.

例1.3 计算n阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$$

【逻辑推理】 该行列式的每行元素之和为$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-m}$

解：将第 2，3，⋯，n 列都加到第 1 列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+x_2+\cdots+x_{n-m} & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-m} & x_{2-m} & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-m} & x_2 & \cdots & x_{n-m} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \vdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^{n-1}(x_1+\cdots+x_n-m)$$

点评：类似地，常见计算题，如

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$ 等等，均可用上述方法计算.

特征题 2：对于非零元素特别少的行列式，可直接利用行列式的定义求解.

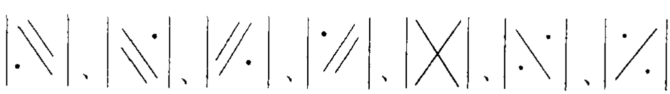
例 1.4　计算下列行列式.

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (a_{ij}\neq 0,\ i=k,\ j=k+1, \\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4. \\ a_{5t}\neq 0,\ t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5). \end{array}$$

解：由行列式定义，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成. 第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}. 同法可求第 3、4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}，a_{45}. 第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号. 由于行下标已按自然顺序排，而列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号. 因除这一项外，其他不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{45}a_{51}$.

特征题 3："两条线的行列式". 对于形如



的所谓两条线的行列式，可以直接展开降价.

例 1.5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$

解：按第 1 列展开得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix}+b_n(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

例 1.6　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

解：按第 1 列展开得

$$D_n=b\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}+a(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a^n$$

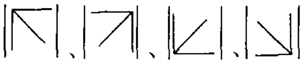
$$=b^2(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}a^{n-2}+(-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a^n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-2}(a^2-b^2)$$

特征题 4：“三线型”行列式．对于除某一行、某一列和对角线或次对角线不为零外，其余元素均为零的行列式，称为“三线型”行列式．求解方法是化为三角形行列式再计算．

例 1.7　计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\quad(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$$

【逻辑推理】　对于形如的所谓箭形(或爪形)行列式,可以直接利用行列式的性质化为三角或次三角形列式来计算.

解:

$$D_{n+1}\xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1-\frac{1}{a_n}c_{n+1}}]{\substack{c_1-\frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1-\frac{1}{a_2}c_3}}\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}-\cdots-\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

例 1.8　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

【逻辑推理】　对于形如的所谓三对角行列式,可直接展开得到两项递推关系式,然后变形进行两次递推或利用第二数学归纳法证明.

解: 按第 1 行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}+ab(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

可得 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$

由于 $n=1$ 时,$D_1=a+b$, $n=2$ 时,$D_2=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$, 可递推得

$$\begin{aligned} D_n-aD_{n-1}&=b(D_{n-1}-aD_{n-2}) \\ &=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3}) \\ &=\cdots \\ &=b^{n-2}(D_2-aD_1) \\ &=b^n \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}D_n &= aD_{n-1}+b^n = a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n\\ &= a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n\\ &= \cdots = a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\\ &= a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n\end{aligned}$$

题型Ⅳ:范德蒙德行列式在计算中的应用

【思路点拨】 当所求的行列式与范德蒙德行列式相似时,可通过添加或拆分某些行(或列),达到可利用范德蒙德行列式的目的.

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

【思路点拨】 D_n 不是范德蒙德行列式,但可考虑构造 $n+1$ 阶的范德蒙德行列式来间接地求出 D_n 的值.

解: 构造 $n+1$ 阶范德蒙德行列式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

将 $f(x)$ 按第 $n+1$ 列展开得

$f(x) = A_{1,n+1} + A_{2,n+1}x + \cdots + A_{n,n+1}x^{n-1} + A_{n+1,n+1}x^n$

其中 x^{n-1} 的系数为 $A_{n,n+1} = (-1)^{n+(n+1)}D_n = -D_n$

又根据范德蒙德行列式的结果知

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

由上式可求得 x^{n-1} 的系数为 $-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$

故有 $D_n = (x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com