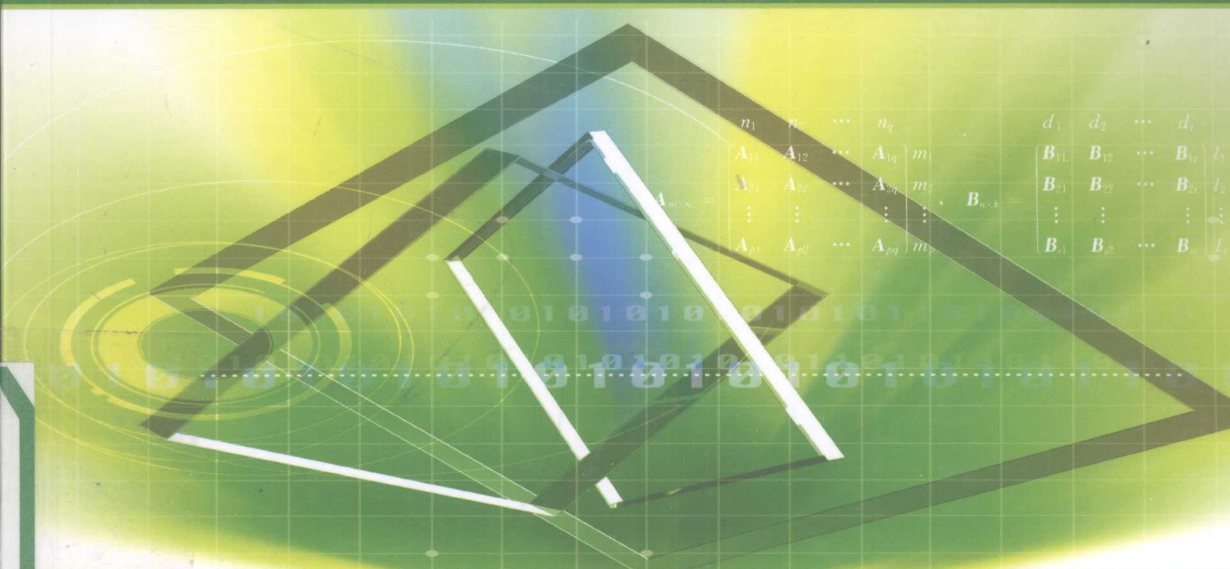
21世纪高等学校教材

线性代数

（第三版）

主编　靳全勤　张华隆



XIANXING DAISHU

上海交通大学出版社

21世纪高等学校教材

线性代数

（第三版）

靳全勤　张华隆　主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与矩阵对角化、对称矩阵与二次型、线性空间与线性变换简介。每章后都附有习题。书后附有答案。

本书内容符合教育部高等学校线性代数教学的要求，遵循循序渐进、由浅入深的原则。

本书可供高等院校理工、经济、工商管理等各专业作为教材使用，也可供电视大学和其他业余大学及科技工作者使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 靳全勤，张华隆主编. —3 版. —上海：上海交通大学出版社，2008

21 世纪高等学校教材

ISBN978-7-313-04064-0

Ⅰ. 线...　Ⅱ. ①靳...　②张...　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 021748 号

线 性 代 数

(第三版)

靳全勤　张华隆　主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)

电话:64071208　出版人:韩建民

上海崇明南海印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16　印张:12.25　字数:226 千字

2005 年 7 月第 1 版　2008 年 8 月第 3 版　2008 年 8 月第 4 次印刷

ISBN978-7-313-4064-0/O・174　定价:18.00 元

第三版前言

随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，许多实际问题得以通过离散化的数值计算而得到定量的解决。而线性代数正是实际问题离散化的数学基础。不仅如此，线性代数在训练学生的逻辑思维和推理能力、分析解决实际问题的能力方面也起着重要的作用。因此，线性代数成为理工、经济、工商管理等各专业大学生必修的重要数学基础课之一。

本书是作者多年的教学经验积累的结晶。主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与矩阵对角化、对称矩阵与二次型、线性空间与线性变换简介等。在本书编写过程中，我们遵循了由特殊到一般、由具体到抽象循序渐进、由浅入深的原则。本书充分注重数学概念理论的条理性，而不过分追求数学的严谨。

本教材自出版以来，得到广大读者、使用本书的同行们的厚爱和广泛好评，在此我们深表谢意。在广泛听取任课教师的意见和建议的基础上，我们对教材重新进行了修订编写，除了对原书在结构上做了适当的调整外，对部分习题、复习题也作了适当调整和修订。

本书此次修订工作主要由张华隆、周朝晖完成，靳全勤对修订计划、修订稿进行审定。

再次感谢广大读者和使用本书的同行提出的宝贵和中肯的意见。

由于编者水平有限，书中不妥之处，恳请读者批评指正。

作者于上海 同济园

2008年5月

目　　录

第 1 章　行列式

行列式是线性代数一重要的概念和工具，在线性方程组理论、矩阵对角化和正定二次型的讨论中起着重要作用。本章主要介绍概念、性质和计算。作为应用，最后讨论线性方程组的克莱姆法则。

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二、三阶行列式

在中学我们已经知道，要解二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1\text{-}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, & (1\text{-}2) \end{cases}$$

通常采用消元的方法。

式(1-1)$\times a_{22}$－式(1-2)$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \tag{1-3}$$

式(1-2)$\times a_{11}$－式(1-1)$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1。 \tag{1-4}$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，由式(1-3)和式(1-4)得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}。$$

我们看到，x_1，x_2 表达式的分母 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 完全由方程组的系数确定。

定义 1.1　设 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 排成 2 行、2 列(横排为行，竖排为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-5}$$

则称表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为数表式(1-5)所确定的二阶行列式，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1-6}$$

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。

注 1:行列式(1-6)中的数 a_{ij}($i=1,2;j=1,2$)称为行列式的元素;元素 a_{ij} 的下标 ij 表示该元素所在的位置,通常第一个下标 i 称为行标,第二个下标 j 称为列标,a_{ij} 表明该元素位于第 i 行、第 j 列的交叉位置。行的顺序由上往下依次增大,列的顺序由左往右依次增大。

注 2:行列式中数表的行数与列数相同,通常把行列式中左上角元素与右下角元素的连线称为主对角线;而把右上角元素与左下角元素的连线称为副对角线。由定义知,二阶行列式的值等于其主对角线上的元素之积 $a_{11}a_{22}$ 减去其副对角线上元素之积 $a_{12}a_{21}$。亦即计算二阶行列式的值遵循所谓的"对角线"法则。如图 1-1 所示,实线表示主对角线,虚线表示副对角线。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

注 3:两个不同行列式的值可能相等,例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times3=-2,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\times6-2\times7=-2。$$

利用二阶行列式定义式(1-6),二元线性方程组式(1-1)、式(1-2)的解可表示为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}。$$

其中 x_1,x_2 的分母 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组式(1-1)、式(1-2)的系数行列式;x_1 的分子 D_1 是用方程组的常数项 b_1,b_2 替换 D 中的第一列元素 a_{11},a_{21} 所得的行列式,x_2 中的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 代替 D 中第二列元素 a_{12},a_{22} 所得的行列式。

定义 1.2 设 9 个数排列成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}, \tag{1-8}$$

称式(1-8)为数表式(1-7)所确定的三阶行列式。

三阶行列式的计算也遵循所谓的"对角线"法则:三阶行列式为六项乘积的代数和,三项取正号,三项取负号。如图 1-2 所示:位于实线上三个元素之积取正号,而位于虚线上三个元素之积取负号。

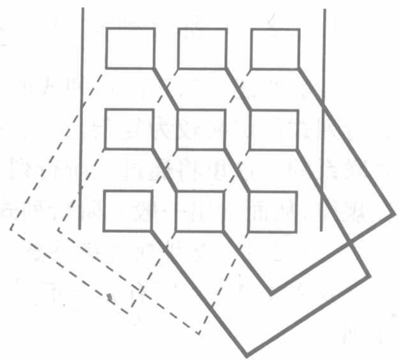


图 1-2

如果三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$,类似于二元线性方程组的情形,可以用消元法得到:$x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}, x_3=\dfrac{D_3}{D}$。其中 $D_i(i=1,2,3)$为用方程组的常数项 b_1,b_2, b_3 替代系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中第 i 列所得的行列式。

例 1.1 解线性方程组:$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 2x_1+5x_2=3。 \end{cases}$

解:由于系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$,根据对角线法则,$D=1\times5-2\times2=1, D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1\times5-3\times2=-1, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-2\times1=1$,所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$,

$x_2=\frac{D_2}{D}=1$。

例 1.2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$。

解:由对角线法则

$D=1\times(-1)\times(-2)+0\times1\times0+2\times1\times1-0\times(-1)\times1-1\times1\times1-2\times0\times(-2)=3$。

1.1.2 n 阶行列式的定义

如前所述,二、三阶行列式的定义遵循所谓的"对角线"法则,但一般 n 阶($n\geqslant4$)行列式的定义较为复杂。二、三阶行列式的表达式是通过方程求解的结果而建立联系的。这里将通过三阶行列式的表达式结构特征,来揭示行列式表达式的内在规律,从而给出一般 n 阶行列式的定义。

1.1.2.1 全排列与逆序数

定义 1.3 将所有 n 个不同元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列(也简称排列)。

n 个不同元素的所有不同形式的全排列的总数,通常用 P_n 表示。

不难得到 P_n 的计算公式为

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\times2\times1=n!$$

下面考虑将 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个数作全排列,则总共有 $n!$ 种不同的排列方式。若规定从小到大的排列(指排列 $123\cdots(n-1)n$)为标准次序,于是这 n 个数的任一排列中,当某两个数的先后次序与标准次序不同时,就说该排列有 1 个逆序。一个排列中的所有逆序的总数称为该排列的逆序数。

(1) 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列。

(2) 设 $P_1P_2\cdots P_n$ 为 n 个数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列,计算该排列逆序数 t。

考虑数 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 P_i 大又排在 P_i 前面的数有 t_i 个,则 P_i 这个数的逆序数是 t_i。所有数 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n,$$

就是这个排列的逆序数。

例 1.3 求排列 54312 的逆序数,并指出该排列的逆序数。

解:首位数 5,其逆序数为 0;

4 的前面且比 4 大的数有一个,其逆序数为 1;

3 的前面有两个数 5 和 4,且都比 3 大,其逆序数为 2;

1 的前面有三个数,5,4 和 3,且都比 1 大,其逆序数为 3;

2 的前面有四个数,5,4,3 和 1,比 2 大的数有 3 个,其逆序数为 3,于是这个排列 54312 的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 2 + 3 + 3 = 9,$$

为奇排列。

定理 1.1 一个排列中,若交换其中任意两个数的位置(其他数不动),则排列改变奇偶性。

证明:

(1) 先证明相邻两个数 a 与 b 交换次序的情形。

设原排列为

$$\cdots ab \cdots,$$

a,b 交换次序后的排列为

$$\cdots ba \cdots。$$

这里"…"表示其余数不变动。若 $a<b$,则 ab 是标准次序,交换后,ba 构成了一个逆序。而这两个数与其他数的逆序数在新、老两个排列中没有变化,故新排列比原排列的逆序数增加 1。若 $a>b$,则 ab 构成一个逆序;交换后,ba 是标准次序,因而不构成逆序,此时,交换后的新排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1。因此,不论哪种情况,只要相邻两个数次序交换,必改变排列的奇偶性。

(2) 再证交换不相邻的两个数次序的情形。

不妨设 a 与 b 之间有 S 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_S$。原排列为

$$\cdots a i_1 i_2 \cdots i_S b \cdots,$$

a,b 交换(其余不动)后的新排列为

$$\cdots b i_1 i_2 \cdots i_S a \cdots。$$

这个改变可看成是:先将原排列中 a 与右边的 $S+1$ 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_S,b$ 实施 $S+1$次相邻两数交换次序,得到

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_S b a \cdots,$$

然后再将该排列中的数 b 与左边的 S 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_S$ 实施 S 次相邻两数交换次序,即得

$$\cdots b i_1 i_2 \cdots i_S a \cdots。$$

这样从原排列到新排列总共实施了 $2S+1$ 次(奇数次)相邻两数交换次序,故改变了排列的奇偶性。

推论 奇排列变成标准排列的交换次数是奇数,偶排列变成标准排列的交换次数为偶数。

证明:定理 1.1 表明,交换的次数就是排列的奇偶性产生变化的次数。而标准

排列逆序数为 0(偶排列),因此推论成立。

推论 当 $n \geqslant 2$ 时,在 n 个不同数组成的所有全排列中,奇排列与偶排列各占一半,均为 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明:对于任意一个排列 $P_1P_2P_3\cdots P_n$,交换 P_1,P_2(其余不动)可得到一个新排列 $P_2P_1P_3\cdots P_n$。

由定理 1.1 可知,这两个排列的奇偶性不同。由此可知,在由 n 个不同数组成的所有全排列中,每个奇排列与唯一一个偶排列对应,同时,每个偶排列与唯一一个奇排列对应。所以,奇偶排列各占一半。

1.1.2.2 三阶行列式表达式的结构

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}。$$

容易看出:

(1) 上式右端共有 6 项相加减,每项都是三个数的乘积,这三个数位于行列式的不同行、不同列。每个数均有两个下标,每项中除正负号可写成 $a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3}$,第一个下标(行标)排成标准次序 123,而第二个下标(列标)排成 $P_1P_2P_3$,而这个排列正是 1,2,3 三个数的某个排列。1,2,3 的所有全排列共有 6 种,正好对应三阶行列式表达式中所包含的 6 项,即列标排列 $P_1P_2P_3$ 对应 1,2,3 三个数的所有全排列。

(2) 6 项中有 3 项取正,另外 3 项取负,与列标的排列对应:

取正三项的列标排列为 123,231,312(均为偶排列);

取负三项的列标排列为 132,213,321(均为奇排列)。

若 t 表示列标排列的逆序数,则各项所取正负号可表示为$(-1)^t$。

由上述分析可知,三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3},$$

其中 $P_1P_2P_3$ 表示 1,2,3 的一种全排列,t 是排列 $P_1P_2P_3$ 的逆序数,而 $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有全排列 $P_1P_2P_3$ 取和。

这就是三阶行列式表达式的结构特征。此特征可推广到一般情形,从而引出 n 阶行列式的定义。

1.1.2.3 n 阶行列式的定义

定义 1.4 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由数表中位于不同行、不同列的 n 个数作乘积,并赋以符号$(-1)^t$,得到如下形式的项:

$$(-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}, \tag{1-9}$$

其中 $P_1P_2\cdots P_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 的某一个全排列,t 为该排列的逆序数。这样的全排列总共有 $n!$ 种,故形如式(1-9)的项总共有 $n!$ 项。对这 $n!$ 项求和

$$\sum (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n},$$

得出的结果称为 n 阶行列式,并记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}。$$

由数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$构成的 n 阶行列式常简记为 $\det(a_{ij})$或者$|a_{ij}|_{n\times n}$。当 $n=2$ 或 $n=3$ 时,就得到前面定义的二、三阶行列式;而当 $n=1$ 时,一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$,此时要注意行列式符号与绝对值符号的区别,以免混淆(行列式$|a_{ij}|_{n\times n}$ 中的每一个数 a_{ij} 通常称为行列式的一个元素)。

通常二、三阶行列式的计算由“对角线”法则会方便直观一些,而当 $n\geqslant 4$ 时,n 阶行列式的计算不遵循对角线法则,除了定义式之外,可寻求其他便捷的计算方法。

先证明几个特殊行列式的结果。

例 1.4 证明 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中未写出的数都是零。这类行列式称为下三角行列式，其特征是主对角线以上的数全取零，它的值等于主对角线上所有数的积。

证明：根据 n 阶行列式定义

$$D=\sum(-1)^t a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}。$$

由于在上三角行列式中，对任意 $j>i$ 恒有 $a_{ij}=0$，故 D 的计算式中各项的乘积因子 a_{iP_i}，只有当其下标满足 $P_i\leqslant i$ 时，该因子才有可能不为零。由 $P_i\leqslant i(i=1,2,\cdots,n)$ 可得

$$P_1\leqslant 1,P_2\leqslant 2,\cdots,P_n\leqslant n。$$

在所有排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个标准次序排列 $123\cdots n$，此时 D 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，该项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，因此

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

类似于下三角行列式，可证明下述几种特殊行列式的结果。

(1) 上三角行列式(未写出的元素全为零，下同)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

(2) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n。$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \therefore & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n。$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$；　　(5) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$。

2. 用行列式方法求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+\ y=-1, \\ 5x+2y=8 \end{cases}$；　　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4, \\ x_1\qquad\ +x_3=3。 \end{cases}$

3. 求下列各排列的逆序数：

(1) 34215；　　(2) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$。

4. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

5. 证明

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}。$$

1.2　行列式的性质

行列式性质是计算行列式的重要基础和依据。这一章的重点，主要是熟悉行列式的性质，并能利用这些性质进行简单行列式的计算或证明。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式。

性质1　行列式与它的转置行列式相等，$D=D^{\mathrm{T}}$。

完成性质1的证明之前，先证明下述引理。

引理　设$(-1)^t a_{1P_1}\cdots a_{iP_i}\cdots a_{jP_j}\cdots a_{nP_n}$是行列式 D 的定义式中任一项，则成立

$$(-1)^t a_{1P_1}\cdots a_{iP_i}\cdots a_{jP_j}\cdots a_{nP_n}=(-1)^S a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中 t 是排列 $P_1\cdots P_i\cdots P_j\cdots P_n$ 的逆序数，$q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一全排列，S 是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数。