东方考试教材
—考研系列

2006
考研数学最后冲刺

——全真模拟命题预测试卷及解答

（理工类）

全国考研数学辅导专家组　组编

黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编写

中国科学技术出版社

2006

考研数学最后冲刺

——全真模拟命题预测试卷及解答

（理工类）

全国考研数学辅导专家组　组编
黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编写

中国科学技术出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺——全真模拟命题预测试卷及解答(理工类)/黄先开,曹显兵,施明存,殷先军编写.—北京:中国科学技术出版社,2005

ISBN 7-5046-1505-6

Ⅰ.考... Ⅱ.①黄... ②曹... ③施... ④殷... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101469 号

策划编辑　肖　叶
责任编辑　胡　萍
封面设计　东　方
责任校对　张林娜
责任印制　安利平
法律顾问　宋润君

中国科学技术出版社
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码:100081
电话:010-62103210　传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.con.cn
科学普及出版社发行部发行
北京国防印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米　1/16　印张:16.5　字数:410 千字
2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印数:1—20 000 册　定价:25.00 元

使 用 说 明

为了加强对参加 2006 年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生复习的指导，强化模拟，实战训练，做好考前冲刺，我们特邀在考生中享有崇高威望的著名考研数学辅导专家、新生代领军人——**黄先开、曹显兵、施明存、殷先军**，严格按照**教育部**制订的《2006 **年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲**》，精心编写了《2006 **年考研数学最后冲刺**——全真模拟命题预测试卷及解答（理工类）》、《2006 **年考研数学最后冲刺**——全真模拟命题预测试卷及解答（经济类）》，每册均精心设计和编写了 24 套最后冲刺全真模拟命题预测试卷及解答。

考生在答题时应注意以下几点：

1. 可在系统复习、全面复习的同时，结合本最后冲刺试题，以巩固复习效果。

2. 答题前应作好充分准备，找类似“考场的环境”答题，答题时应完全进入“考试状态”，使自己置身于“真正在考试”的环境中。必须在规定的时间内答完每份试卷。

3. 切忌边答题边看答案，即使碰上一看就会的题，也必须按要求答完。

4. 答完每份试卷后，应参照答案自己评分。有条件的考生，最好请老师或他人为自己评分。

5. 答题后，应根据得分情况，找出差距，及时查缺补漏，直至验收合格。只有这样，答题时才能思路畅通，有的放矢。

本书是在分析、研究全国硕士研究生入学统一考试的特点和近几年全国硕士研究生入学统一考试数学试题的基础上，为参加 2006 年全国硕士研究生入学统一考试的考生做考前最后冲刺专门编写的，反映了最新考试精神和最新考试动态。特别需要指出的是，北京理工大学数学系硕士研究生马立娟、徐海宁对本书进行了逐题认真演算，在此，表示衷心感谢！

希望广大考生通过本书的模拟冲刺训练，能进一步提高自己的应试水平，增强竞争实力，在 2006 年考研决战中，过关斩将，脱颖而出！

全国考研数学辅导专家组

目　　录

2006年考研理工数学一最后冲刺试卷(一)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设函数$f(x)$在点$x=0$处有$f(0)=0,f'(0)=-1$,则$\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=$ ________.

(2) 设函数$y=y(x)$满足$xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$,且$y(1)=0$,则$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 设Σ为yOz平面上曲线$L:0\leqslant z\leqslant 1,y=1+z^2$绕$y$轴旋转一周所得的曲面,则$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$沿着曲面$\Sigma$上过点$(0,2,1)$与$y$轴正向一致的法线方向向量的方向导数为________.

(4) 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为三阶相似矩阵,$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$为$\boldsymbol{A}$的两个特征值,且$\boldsymbol{B}$的行列式为1,则行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

(5) 对某种电子装置的输出测量了4次,得到的观测值X_1,X_2,X_3,X_4,设它们是相互独立的同服从正态分布$N(1,\sigma^2)$的随机变量,则概率$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>1\}=$ ________.

(6) 设X,Y服从二维正态分布,$(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\frac{1}{2})$,则$D(3X-2Y)=$ ________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+1}}=$

(A)1　　(B)$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$　　(C)e　　(D)e^2　　[　　]

(8) 设函数$f(x)$满足关系式$f''(x)+\sin^2 f'(x)=\sin x$,且$f'(0)=0$,则

(A)$f(0)$是$f(x)$的极大值.

(B)$f(0)$是$f(x)$的极小值.

(C) 点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值,点$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.　　[　　]

(9) 设直线L为$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$,　平面$\pi$为$4x-2y+z-2=0$,则

(A)L平行于π.　　(B)L在π上.

(C)L垂直于π.　　(D)L与π斜交.　　[　　]

(10) 设函数$f(x)$和$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且$f(x)<g(x)$,则必有

(A)$f(-x)>g(-x)$.　　(B)$f'(x)<g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.　　(D)$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.　　[　　]

(11) 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,则向量组$2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_2-\alpha_4$, $\alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_2+\alpha_3$, $2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$的秩是

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4.　　[　　]

(12) 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的三个线性

无关的解，则不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.　　[　　]

(13) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，记 $U=X-Y,V=X+Y$，则随机变量 U 和 V 必然

(A) 不独立.　　(B) 独立.

(C) 相关系数不为 0.　　(D) 相关系数为 0.　　[　　]

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 x，有

(A) $F(x)+F(-x)=1$.　　(B) $F(a+x)+F(a-x)=1$.

(C) $F(x+a)+F(x-a)=1$.　　(D) $F(a-x)+F(x-a)=1$.　　[　　]

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 12 分）

计算 $\iint\limits_D |3x+4y|\,dxdy$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

(16)（本题满分 12 分）

设 $f(u)$ 有连续的二阶导数且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

(17)（本题满分 12 分）

设 S 是上半空间 $z>0$ 中任意光滑闭曲面，S 围成区域 Ω，函数 $u=rk(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 在上半空间有连续的二阶偏导数，满足

$$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy=\iiint\limits_\Omega e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV,$$

求 $k(r)$.

(18)(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 是区间$[-\pi,\pi]$上的偶函数,且满足 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$. 证明:$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数展开式中系数 $a_{2n}=0\quad(n=1,2,\cdots)$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2+1$ 上任一点的切平面与曲面 $S: z=x^2+y^2$ 所围立体 Ω 的体积.

(20)(本题满分 8 分)

$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=l\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=l\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$, $l\neq 0$, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 10 分)

已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6, \\ -x_1-2x_2+ax_3=-3. \end{cases}$$

有无穷多解,而 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$分别是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1,-1,0 的三个特征向量,求 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 9 分)

设 $\xi=(X,Y)$ 服从在 D 上的均匀分布,其中 D 为 x 轴、y 轴及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形区域,求 $E(\xi)$ 和 $D(\xi)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是它的一个样本,令 $d=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$,试求 $E(d)$, $D(d)$.

2006年考研理工数学一最后冲刺试题(一)答案及解析

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) $\underline{\quad e^{-2} \quad}$

[解析]

$$\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{2f(x)}\cdot\frac{2f(x)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)}{\sin x}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}=e^{2f'(0)}=e^{-2}.$$

(2) $\underline{\quad -\frac{\pi}{4} \quad}$

[解析]

根据题设 $xy'(x)=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y(1)=0$,由分部积分法,有

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=xy(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xy'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

[注]本题若先求出 $y(x)$ 的表达式,再代入计算定积分,则计算过程将变得十分复杂.

(3) $\underline{\quad 0 \quad}$

[解析]

曲面 Σ 的方程为:$y=1+x^2+z^2$,过点$(0,2,1)$且与 y 轴正向一致的法线方向向量为 $\boldsymbol{n}=\{0,1,-2\}$,其单位法向量为 $\boldsymbol{n}_0=\{0,\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\}$,于是所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,2,1)}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,2,1)}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(0,2,1)}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)=0+4\cdot\frac{1}{\sqrt5}+2\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)=0.$$

(4) $\underline{\quad -1 \quad}$

[解析]

由题设,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行列式相等,$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=1$.

设 λ_3 为 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值,则有 $1=|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2\lambda_3$,于是 $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,必可对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

故 $\quad|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-1.$

(5) $\underline{1-\frac{1}{2^4}}$

[解析]

$$P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)>1\}=1-P\{\max(X_1,X_2,X_3,X_4)\leqslant 1\}$$
$$=1-P\{X_1\leqslant 1,X_2\leqslant 1,X_3\leqslant 1,X_4\leqslant 1\}$$
$$=1-P\{X_1\leqslant 1\}P\{X_2\leqslant 1\}P\{X_3\leqslant 1\}P\{X_4\leqslant 1\}$$
$$=1-\frac{1}{2^4}.$$

(6) $\underline{\ 7\ }$

[解析]

$$D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)-2\cdot 3\cdot 2\mathrm{cov}(X,Y)$$
$$=9\times 1+4\times 1-12\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=7$$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.)

(7) 应选(B)

[解析]

$$\mathrm{I}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1 x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

(8) 应选(C)

[解析]

由已知关系式,知 $f''(0)=0$,且 $f'''(x)=\cos x-2\sin[f'(x)]\cdot f''(x)$,

从而 $f'''(0)=1>0$,即 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内单调递增. 在 $x=0$ 的左侧,$f''(x)$ 为负;在 $x=0$ 的右侧,$f''(x)$ 为正,故$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) 应选(C)

[解析]

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$,从而有 $\boldsymbol{l}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$, 此直线 L 垂直于平面 π.

(10) 应选(C)

[解析]

由题设 $f(x)$、$g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f(x_0)<g(x_0)$,而

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0),$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

从而(C) 成立. 对(A)、(B)、(D) 可举反例说明不成立.

对(A),取 $f(x)=x^2-1,g(x)=x^2,f(x)<g(x)$,但

$$f(-x)=x^2-1,g(-x)=x^2,f(-x)<g(-x);$$

对(B),取 $f(x)=-\mathrm{e}^{-x},g(x)=\mathrm{e}^{-x},f(x)<g(x)$,但

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x},g'(x)=-\mathrm{e}^{-x},f'(x)>g'(x);$$

对(D),取 $f(x)=1, g(x)=2, f(x)<g(x)$,但

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x,\ \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = 2x,\ 若\ x<0,\ 则\ \int_0^x f(t)\mathrm{d}t > \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

(11) 应选(C)

[解析]

$$\mathrm{r}(2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2-\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \xlongequal{记} \mathrm{r}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5),$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5] = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因 $\quad \mathrm{r}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=4$,

故 $\quad \mathrm{r}[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5] = \mathrm{r}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$ 应选(C).

(12) 应选(B)

[解析]

由 $1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$ 知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关,不能作为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系,故应选(B).

(13) 应选(D)

[解析]

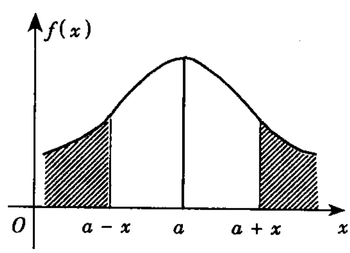
由于 $\mathrm{cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=E(UV)=E(X-Y)(X+Y)=E(X^2)-E(Y^2)=0$,

从而有 $\rho=\dfrac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0$,故选(D).

(14) 应选(B)

[解析]

由于 $X\sim N(a,\sigma^2)$,故 X 的密度函数 $f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 对称,且



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

故 $\quad F(a+x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{a+x} f(t)\mathrm{d}t,$

$$F(a-x)=\int_{-\infty}^{a-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{a+x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t,$$

$$F(a+x)+F(a-x)=\int_{-\infty}^{a+x} f(t)\mathrm{d}t+\int_{a+x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1.$$

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.)

(15)[解析]

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则 $D: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1$,于是

$$\iint_D |3x+4y|\,dxdy = \int_0^{2\pi} |3\cos\theta + 4\sin\theta|\,d\theta \int_0^1 r \cdot r dr$$

$$= \frac{5}{3}\int_0^{2\pi} \left|\frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta\right| d\theta = \frac{5}{3}\int_0^{2\pi} |\sin(\theta+\theta_0)|\,d\theta,$$

其中 $\sin\theta_0 = \frac{3}{5}, \cos\theta_0 = \frac{4}{5}$，由周期函数的积分性质，有

原式$= \frac{5}{3}\int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} |\sin t|\,dt = \frac{5}{3}\int_0^{2\pi} |\sin t|\,dt = \frac{10}{3}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{20}{3}.$

(16)[解析]

令 $u = e^x \sin y$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y = uf'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)u^2 + f'(u)u,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y f'(u) + e^x \cos y f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = -uf'(u) + f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}.$

由已知条件，得 $f''(u)e^{2x} = e^{2x}f(u)$，即 $f''(u) - f(u) = 0$.

此二阶常系数方程的特征方程是 $\lambda^2 - 1 = 0$，特征根 $\lambda = \pm 1$，故 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$.

(17)[解析]

由高斯公式，得

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz = \iiint_\Omega e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz,$$

由 Ω 的任意性，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (z > 0),$$

由复合函数求导法得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\frac{du}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr}.$$

同理 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)\frac{du}{dr}.$$

于是 $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = e^r.$

这是可降阶的二阶线性方程，两边乘 r^2 得

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = r^2 e^r,$$

积分得 $r^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\int r^2\mathrm{e}^r\mathrm{d}r=r^2\mathrm{e}^r+2\mathrm{e}^r(1-r)+C_1$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\mathrm{e}^r+2\mathrm{e}^r\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\right)+\frac{C_1}{r^2},$$

再积分得 $u(r)=\mathrm{e}^r-\dfrac{2}{r}\mathrm{e}^r-\dfrac{C_1}{r}+C_2$,

因此 $k(r)=\dfrac{u(r)}{r}=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^r-\dfrac{2}{r^2}\mathrm{e}^r-\dfrac{C_1}{r^2}+\dfrac{C_2}{r}$.

(18)[**解析**]

由于 $f(x)$ 为偶函数,所以

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x\right].$$

对于右端前一个积分,令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$,后一个积分,令 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$,则

$$\begin{aligned}a_{2n}&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi+2nt)\mathrm{d}t\right]\\&=(-1)^n\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(2nt)\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(2nt)\mathrm{d}t\right]\\&=(-1)^n\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right]\cos(2nt)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由题设 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=0$,所以 $a_{2n}=0,n=1,2,\cdots$.

(19)[**解析**]

(Ⅰ)先求切平面方程.设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上任意点,则 $z_0=x_0^2+y_0^2+1$,Σ 在点 M_0 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x_0,2y_0,-1\}$,切平面方程是

$$z=z_0+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)\text{ 即 }z=1-x_0^2-y_0^2+2x_0x+2y_0y.$$

(Ⅱ)求切平面与 S 的交线及切平面与 S 所围立体 Ω 在 xOy 平面的投影区域.

切平面与 S 的交线 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=1-x_0^2-y_0^2+2x_0x+2y_0y.\end{cases}$

在 xOy 平面的投影是

$$x^2+y^2=1-x_0^2-y_0^2+2x_0x+2y_0y\text{ 即 }(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1.$$

它围成的区域记为 D,即 Ω 在 xOy 平面的投影区域.

(Ⅲ)求 Ω 的体积 V.

$$\begin{aligned}V&=\iint_D[(1-x_0^2-y_0^2+2x_0x+2y_0y)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\{1-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal[v=y-y_0]{u=x-x_0}\pi-\iint_{u^2+v^2\leqslant1}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\pi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r^2r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

(20)[**解析**]

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,用 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 左乘有

$$k_1(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

即 $k_2l\boldsymbol{\alpha}_1+k_3l\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，也即 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

再用 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 左乘，得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，故必有 $k_3=0$，进而可推得 $k_2=0,k_1=0$，

由定义知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(21)[**解析**]

化增广矩阵为阶梯形，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\2&a+4&-5&6\\-1&-2&a&-3\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&3\\0&a&-7&0\\0&0&a+1&0\end{array}\right).$$

由于方程组有无穷多解，得 $a=-1$ 或 $a=0$.

当 $a=-1$ 时，三个特征向量 $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 线性相关，不合题意，舍去；

当 $a=0$ 时，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，故 $a=0$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$，

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}$.

(22)[**解析**]

由二维均匀分布的定义，知 (X,Y) 的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

X 与 Y 的边缘分布密度分别为

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2-2x, & 0<x<1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\frac{1}{2}y, & 0<y<2,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是，有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2(2-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18}$.

同理　$EY=\frac{2}{3}, DY=\frac{2}{9}$.

因此　$E(\xi)=(EX,EY)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3}), D(\xi)=(DX,DY)=(\frac{1}{18},\frac{2}{9})$.

(23)[**解析**]

$$E(d)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\mid X_i-\mu\mid=E\mid X-\mu\mid=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-\mu\mid \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mid t\mid \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与 X 同分布,所以

$$D(d)=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\mid X_i-\mu\mid\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\mid X_i-\mu\mid$$

$$=\frac{1}{n}D\mid X-\mu\mid=\frac{1}{n}[E\mid X-\mu\mid^2-(E\mid X-\mu\mid)^2]$$

$$=\frac{1}{n}\left[DX-(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma)^2\right]=\frac{1}{n}(\sigma^2-\frac{2}{\pi}\sigma^2)=(1-\frac{2}{\pi})\frac{\sigma^2}{n}.$$