新阳光解题方法™
New Sunshine

NEW SUNSHINE 新阳光

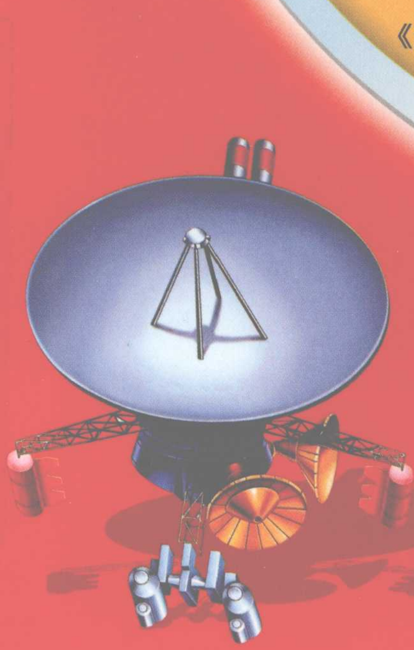
只有掌握正确的解题方法　考试才能取得高分

初中代数
解题方法与分析

开发智力·启迪思维
技巧分析·举一反三

《新阳光解题方法》编委会 编

NEW SUNSHINE 新阳光
请认准防伪标志



八年级

CHUZHONG DAISHU JIETI FANGFA YU FENXI

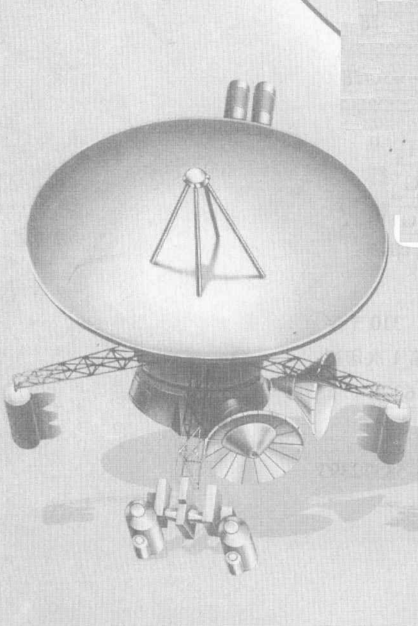
北京出版社出版集团
北京教育出版社

新阳光解题方法™
New Sunshine

只有掌握正确的解题方法 考试才能取得高分

初中代数
解题方法与分析

开发智力·启迪思维
技巧分析·举一反三



本册主编：苏爱芝

编　　委：丁乃福 王鑫荣 卢守富 刘 伟
苏爱芝 殷学峰 贾新华 崔 岩
崔 杰 鹿 静 韩金祥

北京出版社出版集团
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中代数解题方法与分析. 八年级/苏爱芝主编;《新阳光解题方法》编委会编. —北京：北京教育出版社，2008.5
(新阳光解题方法)
ISBN 978-7-5303-6309-6

Ⅰ.初… Ⅱ.①苏… ②新… Ⅲ.代数课—初中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035732 号

新阳光解题方法

初中代数解题方法与分析(八年级)

CHUZHONG DAISHU JIETI FANGFA YU FENXI(BA NIANJI)

《新阳光解题方法》编委会 编

北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
三河天利华印刷装订有限公司印刷
*
760×1 000　16 开本　18.125 印张　310 千字
2008 年 9 月第 1 版　2008 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5303-6309-6/G·6228
定价：17.80 元

质量监督电话：010-62380997　010-58572393

前言

初中数学我们主要学习的是代数与几何两大方面的基本知识.由于兴趣爱好、思维方式的差异等诸多原因,有的同学可能对几何更加擅长,而有的同学则对代数情有独钟.可以这么说,几何思维与代数思维是有区别的,但是它们又有相通的地方.总的来说,它们是相辅相成的关系,它们共同统一于数学这个整体.因此,要真正学好数学,代数与几何都要学好学精才行.

本书从代数方面入手,对同学们的解题思维与方法进行系统有效的训练.何为代数? 这个概念很广,不是一言半语能讲清楚的,但是同学们要知道,初中代数的内容可以概括为三个方面,即数、式与方程,其中方程是核心内容,是学习的重中之重.本书以这三点为纲,融理论性与实践性、全面性与针对性、选拔性与实用性于一体,着重提高同学们对代数思维的理解与应用,拓展解题思路,提高解题技巧,找到规律性的解题方法,从而提高总体素质.

本书特色鲜明,主要表现为以下几个方面:

考点提示

严格以“新课标”的要求为出发点,从浩如烟海的考题中总结出常考点、易考点以及难点,分条罗列,言简意赅,使同学们紧扣学习重点,明确学习方向,做到有的放矢.

经典例题

用例子来讲方法,这样就更加直观形象.通过对经典例题的分析,帮助同学们理解数学中的常用方法,认识知识的形成过程,构建知识之间的联系;通过对经典例题的点评,帮助同学们找准解题的关键,避免进入思维误区,让同学们亲身体验数学解题、发展、深化的全过程,真正达到举一反三、触类旁通的目的.

前言

强化训练

学习了一套方法，要想真正理解与运用，必然有个巩固与练习的过程.本栏目的习题选编深入浅出，精要典型.边学边练，及时巩固，体现了方法与能力的完美结合，把同学们从“题海”里真正拯救出来.

学好代数是不容易的.但是只要同学们掌握科学的学习思维，运用科学的解题方法，积极思考，敢于创新，一定能起到事半功倍的效果，将自己的数学水平提升到一个新的境界.相信本书会对你们有所帮助！

由于各种原因，本书在编写过程中难免存在一些缺陷，恳请广大师生和家长提出宝贵意见，以便再版时修订完善.

目录

第一章　一次函数

1.1　变量及函数 ………………… 2
- 考点提示 ………………… 2
- 经典例题 ………………… 4
- 强化训练 ………………… 9
- 参考答案 ………………… 13

1.2　一次函数 ………………… 15
- 考点提示 ………………… 15
- 经典例题 ………………… 16
- 强化训练 ………………… 22
- 参考答案 ………………… 26

1.3　用函数观点看方程(组)与不等式 ………………… 29
- 考点提示 ………………… 29
- 经典例题 ………………… 31
- 强化训练 ………………… 37
- 参考答案 ………………… 40

第二章　数据的描述

2.1　几种常见的统计图表 ………………… 45
- 考点提示 ………………… 45
- 经典例题 ………………… 46
- 强化训练 ………………… 53
- 参考答案 ………………… 60

2.2　用图表描述数据 ………………… 62
- 考点提示 ………………… 62
- 经典例题 ………………… 63
- 强化训练 ………………… 68
- 参考答案 ………………… 73

第三章　整　式

3.1　整式加减 ………………… 78
- 考点提示 ………………… 78
- 经典例题 ………………… 80
- 强化训练 ………………… 85

目录

参考答案 …………………… 90

3.2 整式的乘法 ……………… 93

考点提示 …………………… 93

经典例题 …………………… 96

强化训练 …………………… 101

参考答案 …………………… 107

3.3 乘法公式 ………………… 111

考点提示 …………………… 111

经典例题 …………………… 112

强化训练 …………………… 120

参考答案 …………………… 125

3.4 整式的除法 ……………… 128

考点提示 …………………… 128

经典例题 …………………… 129

强化训练 …………………… 132

参考答案 …………………… 135

3.5 因式分解 ………………… 137

考点提示 …………………… 137

经典例题 …………………… 141

强化训练 …………………… 149

参考答案 …………………… 153

第四章 分 式

4.1 分式 ……………………… 158

考点提示 …………………… 158

经典例题 …………………… 159

强化训练 …………………… 165

参考答案 …………………… 170

4.2 分式的运算 ……………… 173

考点提示 …………………… 173

经典例题 …………………… 176

强化训练 …………………… 181

参考答案 …………………… 186

4.3 分式方程 ………………… 190

考点提示 …………………… 190

经典例题 …………………… 191

强化训练 …………………… 199

参考答案 …………………… 204

第五章 反比例函数

5.1 反比例函数 ……………… 211

考点提示 …………………… 211

经典例题 …………………… 211

强化训练 …………………… 219

参考答案 …………………… 225

5.2 实际问题与反比例函数 … 230

考点提示 …………………… 230

经典例题 …………………… 230

强化训练 …………………… 232

参考答案 …………………… 236

目录

第六章　数据的分析

6.1　数据的代表 …………………… 240
考点提示 …………………… 240
经典例题 …………………… 242
强化训练 …………………… 249
参考答案 …………………… 259
6.2　数据的波动 …………………… 263
考点提示 …………………… 263
经典例题 …………………… 264
强化训练 …………………… 272
参考答案 …………………… 272

第一章 一次函数

一、新课标及中考考纲要求

1. 以探索实际问题中的数量关系和变化规律为背景，经历“找出常量和变量，建立并表示函数模型，讨论函数模型，解决实际问题”的过程，体会函数是刻画现实世界中变化规律的重要数学模型；

2. 结合实例，了解常量、变量和函数的概念，体会“变化与对应”的思想，了解函数的三种表示方法，能利用图象数形结合地分析简单的函数关系；能用适当的函数表示法刻画某些实际问题中的函数关系，能确定简单的整式、分式和简单应用题中的函数的自变量取值范围，并会求出函数值；结合对函数关系的分析，尝试对变量的变化规律进行初步预测；

3. 理解正比例函数和一次函数的概念，会画它们的图象，能结合图象讨论这些函数的基本性质，能利用这些函数分析和解决简单的实际问题；

4. 通过讨论一次函数与方程(组)及不等式的关系，从运动变化的角度，用函数的观点加深对已经学习过的方程(组)及不等式等内容的认识，构建和发展相互联系的知识体系.

二、考点分析

从近几年全国各省市的中考题来看，一次函数部分主要考查以下几个方面：

1. 平面直角坐标系中各象限和坐标轴上的点的坐标的特点，关于坐标轴对称以及关于原点对称的点的特征，求线段的长度，几何图形的面积，求某些点的坐标；

2. 对解析式中只含有一个自变量的简单函数，会求它们的自变量的取值范围和函数值；会求实际问题中自变量的取值范围；

3. 能结合生活实际分析问题，列出函数解析式，并结合实际问题确定自变量的取值范围；

4. 会用待定系数法求正比例函数、一次函数的解析式,并画出它们的图象,能结合图象对简单的实际问题进行信息分析,考查学生数形结合思想的应用能力;根据函数增减性确定 k、b 的符号,函数图象经过的象限,解答题中常常考查图象与图象、图象与坐标轴围成的图形面积等;

5. 考查一次函数与今后要学习的反比例函数、二次函数和其他代数、三角函数、几何知识的综合运用;

6. 一些生活中的实际问题,如经济效益问题、几何图形的变化问题、利润问题、销售问题、物体的运动变化规律问题等可以建立函数模型,利用函数关系式解决问题.

函数知识是历年来中考的热点与难点,属于必考内容.本章知识学得好坏,直接关系到以后数学的学习,应给予足够重视.函数具有承上启下的作用,题型灵活多样,常与其他代数、几何以及三角函数知识联系起来,作为中考数学的压轴题,因此函数在中考数学中所占分值较高,具有非常重要的地位.

本章中主要考查学生运用数形结合思想、函数思想、转换与化归思想以及建立适当的数学模型解决问题的能力.

三、重点难点

一次函数的图象和性质是本章考查的重点;从实际问题中抽象出一次函数模型,再用函数的规律解决这些实际问题是本章的难点.

1.1 变量及函数

考点提示

1. 变量与常量

在一个变化过程中,发生变化的量为变量,始终不变的量为常量.如:$S=\pi R^2$ 中的 π 为常量,R 为变量.

2. 函数与自变量

一般地,在一个变化过程中,如果有两个变量 x 与 y,并且对于 x 的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值与其对应,那么就说 x 是自变量,y 是 x 的函数.

3. 自变量的取值范围的确定

(1)整式函数时,自变量的取值范围是全体实数.

(2)实际问题中的函数自变量的取值范围是使实际问题有意义.

4. 函数的图象

对于一个函数,如果把自变量 x 和函数 y 的每一对对应值分别作为点的横坐标和纵坐标,在平面直角坐标系内就有一个相应的点,所有这些点的集合就是这个函数的图象.

5. 根据函数的解析式画函数图象的一般步骤

(1)列表:列表给出自变量与函数的一些对应值,列表时要注意根据自变量的取值范围取值,通常把自变量 x 的值放在表的第一行,其对应函数值放在第二行,自变量 x 应按从小到大的顺序去取值.

(2)描点:以表中每对对应值为坐标,在平面直角坐标系内描出相应的点,描点时一定要把关键的点准确地描出,点取得越多,图象越准确.

(3)连线:按照自变量从小到大的顺序把所描各点用平滑的曲线连接起来.

6. 函数图象上的点 $P(x,y)$ 与函数自变量及其对应函数值的关系

(1)图象上的每一个点的横坐标 x 和纵坐标 y 一定是这个函数的自变量 x 和函数 y 的一组对应值;

(2)以自变量 x 的一个值和函数 y 的对应值分别为横坐标、纵坐标的点必在这个函数图象上.

7. 函数图象上的点与函数解析式之间的关系

(1)函数图象上的任意一点 $P(x,y)$ 中的 x,y 必须满足函数的解析式.

(2)满足函数解析式的任意一对 x,y 的值组成的一个点 (x,y) 必在此函数的图象上.

例如:点 $P(m,n)$ 在函数 $y=-2x+3$ 的图象上,则一定有 $n=-2m+3$;反过来,如果某一点 $P(m,n)$ 满足 $n=-2m+3$,则点 P 一定在函数 $y=-2x+3$ 的图象上.

(3)判定点 $P(x,y)$ 是否在函数图象上的方法:

将这个点的坐标 (x,y) 代入函数的解析式,如果满足函数的解析式,这个点就在这个函数的图象上;如果不满足函数的解析式,这个点就不在函数的图象上.

例如:已知点 $P(1,3)$ 满足关系式 $y=2x+1$,则点 $P(1,3)$ 一定在函数 $y=2x+1$ 的图象上,点 $Q(2,3)$ 不满足关系式 $y=2x+1$,则点 Q 不在函数 $y=2x+1$ 的图象上.

8. 关于函数的表示法

(1)解析法:用含自变量的代数式表示函数的方法就是解析法,这个式子叫做

函数的解析式. 如 $y=2x+3$, $y=2x^2-1$, $y=-\frac{4}{x}$ 等,都是函数的解析式. 它的优点是简明扼要、规范准确,便于分析推导函数的性质,不足之处是有些函数的关系不能或很难用解析式表示.

(2)列表法:把自变量 x 的一些值和函数 y 的对应值列成一个表来表示函数关系的方法叫做列表法,其优点是能明显地显现出自变量对应的函数值,不足之处是一般只能列出部分自变量与函数的对应值,难以从表格中看出自变量与函数间的对应关系.

(3)图象法:用图象表示函数关系的方法叫做图象法. 图象法的优点是形象、直观,能清晰地显现函数的一些性质,如对称性、增减性、最大(或最小)值等,不足之处是所画的图象是近似的、局部的,从图象观察的结果也是近似的关系.

例 1 (1)在坐标平面内有一点 $M(a,b)$,已知 $ab=0$,那么点 M 的位置在 ( )

A 原点　　B x 轴上　　C y 轴上　　D 坐标轴上

(2)若点 $P(a,a-b)$ 在第四象限,则点 $Q(b,-a)$ 在 ( )

A 第四象限　　B 第三象限　　C 第二象限　　D 第一象限

(3)已知点 $P(a+b,ab)$ 在第二象限,则点 $Q(a,b)$ 在 ( )

A 第一象限　　B 第二象限　　C 第三象限　　D 第四象限

分析

本题主要考查平面直角坐标系中点的符号特征与所在象限、坐标轴的关系.

解 (1)$\because ab=0$, $\therefore a=0$ 或 $b=0$.

$\therefore M(a,b)$ 在坐标轴上,故选 D.

(2)$\because$ 点 $P(a,a-b)$ 在第四象限,

$\therefore \begin{cases} a>0, \\ a-b<0. \end{cases}$

$\therefore b>a>0$, $-a<0$.

$\therefore$ 点 $Q(b,-a)$ 在第四象限,故选 A.

(3)$\because$ 点 $P(a+b,ab)$ 在第二象限,

$\therefore \begin{cases} a+b<0, \\ ab>0. \end{cases} \quad \therefore a<0, b<0.$

$\therefore$ 点 $Q(a,b)$ 在第三象限，故选 C.

总结：确定点在坐标系内的位置要准确把握坐标轴上的点及各个象限内点的特征.

例 2 矩形的周长为 16，则矩形面积 S 与一边长 x 之间的函数关系式是________，自变量的取值范围是________.

分析

矩形面积 = 长 × 宽，矩形面积为 S，周长为 16，一边长为 x，则另一边长为 $8-x$，所以 $S=x(8-x)$.

$\because \begin{cases} x>0, \\ 8-x>0, \end{cases} \quad \therefore 0<x<8.$

解 $S=x(8-x)$，即 $S=-x^2+8x$.

$\because \begin{cases} x>0, \\ 8-x>0, \end{cases} \quad \therefore 0<x<8.$

总结：整式函数的自变量取值范围是全体实数；实际问题中的函数自变量的取值范围是使实际问题有意义.

例 3 下列变量之间的关系中，不是函数关系的是 ( )

A 圆的面积与半径

B $y=|x|$ 中的 y 与 x

C 抛出的物体离地面的高度与抛出物体的时间

D $y=\pm x$ 中的 y 与 x

分析

A 项中，圆的面积与半径是两个变量，给半径一个值，就可以得到一个面积值，所以 A 项是函数关系；B 项中 y 与 x 也是两个变量，对于每一个 x 的取值，都可以得到一个 y 值，所以 B 项是函数关系；C 项中物体抛出的高度与时间也是两个变量，随着时间的变化都有一个确定的高度与之对应，所以 C 项是函数关系；D 项中，两个变量 x,y，对于每一个不为零的 x 的值，y 都有两个值与之对应，故 D 项不是函数关系.

解 D

总结：判断一个关系式是否是函数关系式一定要紧扣定义，抓住两个要点：一

要看是否有两个变量,二要看对于一个变量的每一个取值,另一个变量是否有唯一确定的值与之对应,两个条件缺一不可.

例 4 (山西)已知点$A(-1,2)$,将它先向左平移2个单位长度,再向上平移3个单位长度后得到点B,则点B的坐标是________.

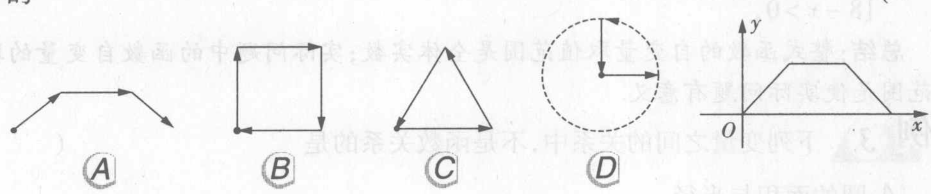
分析

点$A(-1,2)$先向左平移2个单位长度,其横坐标减少2,纵坐标不变;再向上平移3个单位长度后,其横坐标不变,纵坐标增加3,故B点坐标为$(-3,5)$.

解 $(-3,5)$

总结:解决本题的关键是先画出坐标系,在坐标系内找到点A,再按题意解答.此题主要考查学生数形结合思想的运用,看似简单,实则很重要,是以后进行函数图象平移的重要基础.

例 5 (枣庄)图1.1-1(2)是韩老师早晨出门散步时,离家的距离y与时间x的函数图象.若用黑点表示韩老师家的位置,则韩老师散步行走的路线可能是图(1)中的 (　　)



(1)　　　　　　　　　　(2)

图1.1-1

分析

由图象可知某段时间内韩老师离家的距离是一个常数,故联想到此时韩老师可能在以家为圆心的圆弧上散步,分析四个选项知D项符合题意.

解 D

总结:图象信息题,仔细读图,从图中获取需要的信息是解决问题的关键.

例 6 (德阳)某车间的甲、乙两名工人分别同时生产同种零件,他们一天生产零件y(个)与生产时间t(时)的函数关系如图所示.

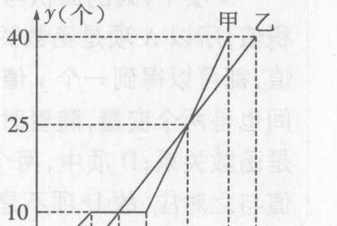


图1.1-2

(1)根据图1.1-2填空:

①甲、乙中,________先完成一天的生产任务;在生产过程中,________因机器故障停止生产________小时.

②当 $t=$________时,甲、乙生产的零件个数相等.

(2)谁在哪一段时间内的生产速度最快?求该段时间内,他每小时生产零件的个数.

分析

从图象上可以看出图象上的每一个点表示的是一天工作中某一时刻完成的零件个数.

解 (1)①甲 甲 2 ②3 或5.5

(2)甲在4~7时的生产速度最快,

$\because \dfrac{40-10}{7-4}=10$, $\therefore$ 他在这段时间内每小时生产零件10个.

总结:解决此类问题的关键是识图,弄清两人生产的零件个数随时间的变化而变化的规律.

例 7 请画出 $y=x^2-4x+3(x>0)$ 的图象.

分析

用描点法画函数图象应注意以下几点:

(1)列表时要根据自变量的取值范围取值,从小到大或自中间向两边选取,取值要有代表性,尽量使画出的函数图象能反映出函数的全貌;

(2)描点时要以表中每对对应值为坐标,点取得越多,图象越精确;

(3)连线时要用光滑的曲线把所描的点顺次连接起来.

解 列表:

x	0	1	2	3	4	…
y	3	0	−1	0	3	…

画函数图象,如图1.1−3.

总结:画函数图象时,一定要注意自变量的取值范围,本题中自变量的取值范围是 $x>0$,所以在(0,3)处画的是空心圆圈,和不等式的解集在数轴上的表示一样,表示图象不包括这个点.

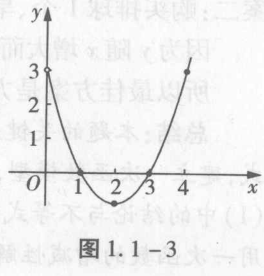


图1.1−3

例 8 某学校团支部组织该校团员参加登山比赛,比赛奖次所设等级分为:一等奖1人,二等奖4人,三等奖5人,

团支部要求一等奖奖品单价比二等奖奖品单价高15元,二等奖奖品单价比三等奖奖品单价高15元.现设一等奖奖品的单价为x元,团支部购买奖品总金额为y元.

(1)求y与x的函数关系式.

(2)由于团支部活动经费有限,购买奖品的总金额限制在$500\leqslant y\leqslant 600$.在这种情况下,请根据备选奖品表确定购买一、二、三等奖奖品有哪几种方案,然后本着尽可能节约资金的原则,选出最佳方案,并求这时全部奖品所需总金额是多少.

备选奖品及单价如下表

备选奖品	足球	篮球	排球	羽毛球拍	乒乓球拍	旱冰鞋	运动衫	象棋	围棋
单价(元)	84	79	74	69	64	59	54	49	44

分析

这是一个利用一次函数模型解决的实际应用问题.主要考查一次函数的概念和性质及对相关信息的处理和收集.设一等奖奖品单价为x元,则由题意可得二等奖奖品单价为$(x-15)$元,三等奖奖品单价为$(x-30)$元,总金额y与x之间的函数关系为$y=x+4(x-15)+5(x-30)=10x-210$.问题(2)中求有哪几种方案可联系问题(1)的答案得到不等式$500\leqslant 10x-210\leqslant 600$,然后解不等式求出$x$的取值范围,再结合表中提供信息,即可得到共有哪几种设计方案.最佳方案问题就是本着尽可能节约资金的原则,利用一次函数的增减性求得y的最小值.

解 (1)$y=x+4(x-15)+5(x-30)=10x-210$,

$\therefore y$与x之间的函数关系式为$y=10x-210$.

(2)由题意,得$500\leqslant 10x-210\leqslant 600$,

解得$71\leqslant x\leqslant 81$.

由表中可以看出x可以取79、74,

当$x=79$时,$x-15=64$,$x-30=49$,

当$x=74$时,$x-15=59$,$x-30=44$.

所以共有两种购买方案:方案一:购买篮球1个、乒乓球拍4副、象棋5副;方案二:购买排球1个、旱冰鞋4双、围棋5副.

因为y随x增大而增大,所以x越小越省钱,当$x=74$时,$y=74\times 10-210=530$,所以最佳方案是方案二,总金额为530元.

总结:本题的关键是建立购买奖品总金额与一等奖奖品的单价之间的函数关系式,建立一次函数模型,将实际生活问题转化为数学问题.解决问题(2)的关键是将(1)中的结论与不等式的知识以及表格中的数据信息结合起来,最佳购买方案可以利用一次函数的增减性解决,也可以把两个方案中总金额分别计算出来再进行比较.

强化训练

一、选择题

1.（乐山）在平面直角坐标系中，点 $P(-3,4)$ 到 x 轴的距离为（　　）

A 3　　B -3　　C 4　　D -4

2.（济南）点 $P(-2,1)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为（　　）

A $(2,1)$　　B $(-2,-1)$　　C $(2,-1)$　　D $(1,-2)$

3.（南京）在平面直角坐标系中，点 $P(2,1)$ 关于原点对称的点在（　　）

A 第一象限　　B 第二象限　　C 第三象限　　D 第四象限

4.（烟台）如图 1.1－4 是中国象棋的一盘残局，如果用 $(4,0)$ 表示帅的位置，用 $(3,9)$ 表示将的位置，那么炮的位置应表示为（　　）

A $(8,7)$　　B $(7,8)$　　C $(8,9)$　　D $(8,8)$

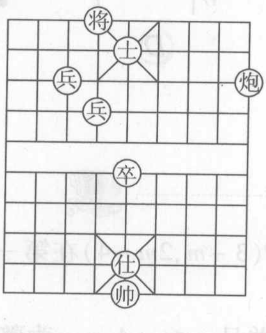


图 1.1－4

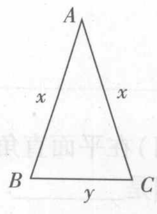


图 1.1－5

5. 如图 1.1－5，等腰 $\triangle ABC$ 的周长为 10，腰长为 x，底边长为 y，则 y 与 x 的函数关系式及自变量的取值范围是（　　）

A $y=10-2x(x>0)$　　B $y=10-2x(0<x<5)$

C $y=10-2x(0<x<2.5)$　　D $y=10-2x(2.5<x<5)$

6.（海淀）根据如图 1.1－6 所示的程序计算函数值，若输入的 x 值为 $\frac{3}{2}$，则输出的结果为（　　）

A $\frac{7}{2}$　　B $\frac{9}{4}$　　C $\frac{1}{2}$　　D $\frac{9}{2}$