

王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊辉



数学 八年级(下)

配人课版

丛书主编：王后雄

本册主编：张丰收



中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

数学 八年级(下)

配人课版

雄收庆瑾华春俊文丹明玲
后丰国方佑仲
王张陈孙张殷陈夏易程黄
文春丹森明珍成梅艺
谢赵叶卢祝钟涂陶王
阳银友细敏小小

从书主编：
本册主编：
编委：



中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读: 人教版. 八年级数学. 下/王后雄主编.

—4版. —北京: 中国青年出版社, 2008

ISBN 978-7-5006-6743-8

I.教... II.王... III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第151324号

策 划: 熊 辉

责任编辑: 李 扬

封面设计: 蔚 蓝

教材完全解读

数学 八年级(下) 配人课版

中国青年出版社 出版发行

社址: 北京东四12条21号 邮政编码: 100708

网址: www.cyp.com.cn

编辑部电话: (010) 64034328

读者服务热线: (027) 61883306

武汉嘉捷印务有限公司印制 新华书店经销

889 × 1194 1/16 9.75 印张 257 千字

2008年11月北京第4版 2008年11月湖北第4次印刷

印数: 15001—20000册

定价: 15.70元

本书如有任何印装质量问题, 请与承印厂联系调换

联系电话: (027) 61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和要点，帮您形成答题思路、解题思维，理清思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

对每道题目目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

1 物质的变化和性质

学习目标·考纲解读

(1)物理变化、化学变化(C.理解);(2)物理性质、化学性质(A.知道);(3)物质变化过程中伴随能量变化(A.知道);(4)运用上述概念解释自然、生活中的一些现象(C.运用)。

1 知识·能力聚焦

1.物理变化和化学变化
(1)物理变化:物质发生变化时没有生成新物质,这种变化叫做物理变化。如:水蒸发、胆矾研碎、蜡烛熔化等。
(2)化学变化:物质发生变化时生成新物质,这种变化叫做化学变化,又叫化学反应。如:石灰石与盐酸反应生成二氧化碳、二氧化碳与水反应生成碳酸氢钙沉淀。还有铁生锈、蜡烛燃烧、食物腐败、药物保持等都是化学变化。

2 方法·技巧平台

3.判断与识别物质的变化和性质的方法
(1)化学变化和物理变化的本质区别是有无新的物质生成。因此判断和识别化学变化和物理变化的关键是认真分析变化后有无新的物质生成。
(2)判断物质的性质,关键是看物质的性质是不是只有通过化学变化才表现出来。如果是,就是化学性质,反之,则不是化学性质,而是物理性质。
(3)区别物质的性质和变化 性质是物质的固有属性,而变化是一个过程,是性质的具体表现。

3 创新·思维拓展

5.文学艺术作品中物理变化和化学变化的描述
有许多诗句和成语描述了物质的物理变化和化学变化,品味这些艺术作品对变化的性质作出判断。如:五更见影、刻舟求剑、百炼成钢、望梅止渴……

4 能力·思维设计

例1 下列工艺制作过程中包含了化学变化的是()。
A. 纸张制成烟花 B. 黏土烧制成瓷器
C. 冰块制成冰雕 D. 木材制成模型飞机
例2 古诗句是古人给我们的宝贵精神财富。

点击考点

测试要点1
测试要点2
测试要点3
测试要点4

名师解读

【例题1】 (2007·鄂州)下列变化中,不属于化学变化的是()。
A. 蜡烛燃烧 B. 钢铁生锈
C. 冰雪融化 D. 食物腐烂
【解析】 是发生化学变化的准确判断是“生成新物质”。A、B、D项中所描述物质的变化都生成了新物质,而冰雪融化只是形态变化,没有生成新物质。
【答案】 C

【例题4】 (2007·南京)中考题)选择“物理变化”“化学变化”“物理性质”和“化学性质”中的合适答案填在相应的空格里。
(1)在常温时空气是无色无气味的气体_____
(2)酒精受热变成了酒精蒸气_____
【解析】 (1)描述的是空气的颜色、状态、气味,属于物理性质。(2)酒精由液体变成了气体,状态发生了改变,但无新的物质生成,是物理变化。
【答案】 (1)物理性质 (2)物理变化

【例题6】 (2007·山东济宁)下列成语所描述的变化与对该变化的判断,不符合的是()。
A. 沙里淘金——物理变化
B. 滴水穿石——物理变化
C. 百炼成钢——化学变化
D. 火树银花——化学变化
【解析】 火树银花是在石火上燃放且石火上形成了滴水,滴水形成的不是简单的物理变化,而是发生了复杂的物理化学变化,故选项B不符合。
【答案】 B

下列诗句中不涉及化学变化的是()。
A. 野火烧不尽,春风吹又生
B. 爆竹声中一岁除,春风送暖入屠苏
C. 千锤万凿出深山,烈火焚烧若等闲
D. 春蚕到死丝方尽,蜡炬成灰泪始干

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

第1单元 走进化学世界 3

单元知识梳理与能力整合

四、四、题中审题

① 本单元知识结构

化学的研究对象是物质的性质、变化规律

组成结构 物理变化和化学变化

② 方法、能力整合

① 实验基本操作技能整合 试管的握持 (1) 试管的握持

出转点：用手一握杯底或无名指和小指伸展开，使杯盖或盖下。

题中审题剖析

【例1】(新疆中考题)化学是21世纪最有价值、最富于创造性的中心学科。请你举出一项对当今人类生活产生较大影响的化学研究成果：_____。

【解析】本题是一道开放性试题。

【答案】不唯一，如：①我国“神舟六号”飞船把航天员送入太空，为人类开发利用太空资源增加新成员。②……

最新3年中考名题诠释

中考题型认证

化学实验是获取化学知识和学习科学探究的方法和手段，这是本单元的核心观点。中考的主要命题点为：(1) 仪器应用；(2) 实验基本操作规范和方法(见1题)。

3. (2006·厦门)在点燃蜡烛时，小红发现有一根烛芯沾有食盐的蜡烛比普通蜡烛燃烧的时间长一些。请你与小红一起探究，并回答相关问题。

【提出问题】盐是否能延长蜡烛的燃烧时间？

【实验探究】

实验名称：探究不同量的食盐对蜡烛燃烧时间的影响。

【解析】点燃蜡烛是同学们生活中常见的事，但怎样延长蜡烛的燃烧时间是同学们想过但没有探究过的问题，此题提出了一个在生产生活中很有价值的问题。

【答案】实验结论：①食盐可以延长蜡烛燃烧时间 ②所加食盐并非越多越好，从本次实验来看，加入0.7g时效果最好

知识与能力同步测控题

(测试时间：50分钟 测试满分：100分)

一、我会选择(每小题2分，共32分)

① 化学是一门自然科学，学习化学的一个重要方法是()。

A. 计算 B. 测量 C. 实验 D. 推理

② 下列仪器中，能用酒精灯火焰直接加热的有()。

① 试管 ② 集气瓶 ③ 瓷质蒸发皿 ④ 量筒 ⑤ 烧杯 ⑥ 燃烧匙 ⑦ 石棉网

A. ①③④⑦ B. ①②④⑦
C. ①③⑤⑥ D. ②③⑤⑥

答案与提示

第1单元 走进化学世界

1 物质的变化和性质

1. B (黏土烧制成瓷器是化学变化)
2. A 3. B
4. C (蜡烛燃烧是化学变化，其他是物理变化)

5. B (颜色相同，其他性质不好验证)
6. 耐高温，不易氧化，能导电
7. 白色 固体 黑色 固体 白色木材变成黑色的炭 炭燃烧就供用于取暖 蜡烛燃烧发光用于照明(其他合理答案也可)

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

最新3年中考名题诠释

汇集中考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

X导航丛书系列最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧扼中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破—挑战思维的极限



《中考完全学案》

讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试—进入实战的演练

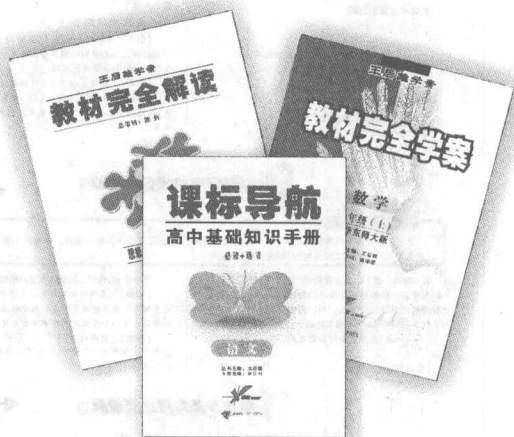


《高考完全学案》

讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《课标导航基础知识手册》透析题型—掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础—奠定能力的基石



伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

编者寄语	1
------------	---

第十六章 分式	2
---------------	---

16.1 分式	3
---------------	---

16.1.1 从分数到分式	3
---------------------	---

16.1.2 分式的基本性质	7
----------------------	---

16.2 分式的运算	11
------------------	----

16.2.1 分式的乘除	11
--------------------	----

16.2.2 分式的加减	15
--------------------	----

16.2.3 整数指数幂	20
--------------------	----

16.3 分式方程	23
-----------------	----

教材课后习题解答	30
----------------	----

单元知识梳理与能力整合	31
-------------------	----

最新3年中考名题诠解	35
------------------	----

知识与能力同步测控题	37
------------------	----

第十七章 反比例函数	39
------------------	----

17.1 反比例函数	40
------------------	----

17.2 实际问题与反比例函数	40
-----------------------	----

教材课后习题解答	45
----------------	----

单元知识梳理与能力整合	47
-------------------	----

最新3年中考名题诠解	52
------------------	----

知识与能力同步测控题	55
------------------	----

第十八章 勾股定理	57
-----------------	----

18.1 勾股定理	58
-----------------	----

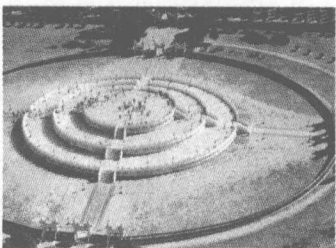
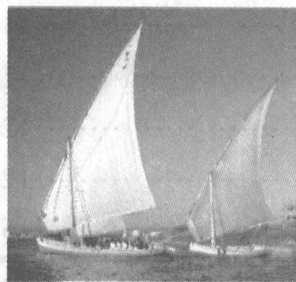
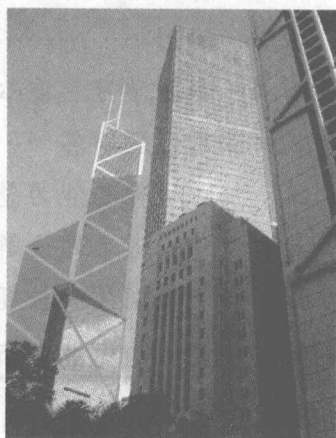
18.2 勾股定理的逆定理	61
---------------------	----

教材课后习题解答	64
----------------	----

单元知识梳理与能力整合	65
-------------------	----

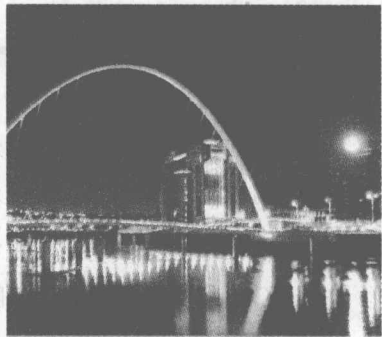
最新3年中考名题诠解	68
------------------	----

知识与能力同步测控题	70
------------------	----

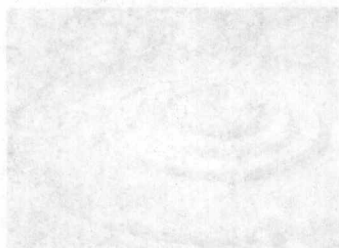
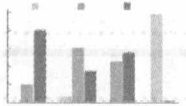
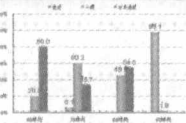


目 录

第十九章 四边形	71
19.1 平行四边形	72
19.2 特殊的平行四边形	78
19.3 梯形	85
19.4 课题学习 重心(略)	85
教材课后习题解答	88
单元知识梳理与能力整合	91
最新3年中考名题詮解	96
知识与能力同步测控题	98
第二十章 数据的分析	100
20.1 数据的代表	101
20.1.1 平均数	101
20.1.2 中位数和众数	106
20.2 数据的波动	110
20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析(略)	110
教材课后习题解答	114
单元知识梳理与能力整合	119
最新3年中考名题詮解	122
知识与能力同步测控题	125
期末测试卷	127
答案与提示	129



1. 六·一儿童节各班捐款情况统计图



28	1.81
48	2.81
18
28
88
07

知识与方法

阅读索引

第十六章 分式

16.1 分式

16.1.1 从分数到分式	3
1. 同底数幂的除法	3
2. 单项式除以单项式	3
3. 分式的概念	3
4. 确定分式值为零的条件	3
5. 分数与分式间的联系	4
6. 分式的概念包括三个方面	4
7. 分式的特殊值中,注意分母一定不能为零	4
8. 关于同底数幂相除的法则	4
9. 单项式除以单项式	5
10. 多项式除以单项式	5
16.1.2 分式的基本性质	7
1. 分式的基本性质	7
2. 分式的符号法则	8
3. 约分	8
4. 最简分式	9
5. 通分	9
6. 最简公分母	9
16.2 分式的运算	
16.2.1 分式的乘除	11
1. 分式乘除法法则	11
2. 分式的乘方	12
3. 分式运算的结果必须注意	12
4. 在进行乘方、乘除运算时,通常是先算乘方,再算乘除	12
5. 运算过程中应注意的要点	13
6. 较复杂运算中应注意的要点	13
7. 分式乘除法法则的应用	13
16.2.2 分式的加减	15
1. 约分	15
2. 通分	15
3. 分式的加减法	15
4. 分式的混合运算	15
5. 运算结果必须是最简分式	16
6. 通分的依据	16
7. 求最简公分母的步骤	16
8. 通分的步骤	16
9. 分式的加减法应注意的几个问题	17
10. 约分与通分的联系及区别	17
11. 分式加减法较复杂运算中应注意的要点	17

12. 分式运算重在“活”上,归纳为如下几点	18
16.2.3 整数指数幂	20
1. 乘方,求 n 个相同因式乘积的运算叫乘方,乘方的结果叫幂	20
2. 几个常见的性质	20
3. 零指数幂的意义	20
4. 负整数指数幂的意义	21
5. 科学记数法的定义	21
6. 零指数幂与负整数指数幂	21
7. 零指数与负整数指数幂的条件	21
8. 科学记数法	21
16.3 分式方程	
1. 分式方程的意义	23
2. 可化为一元一次方程的分式方程的解法	23
3. 列分式方程解应用题与列整式方程解应用题	24
4. 列分式方程解应用题的一般步骤	24
5. 列分式方程解应用题的两步检验	24
6. 解分式方程为什么要验根	24
7. 分式方程的无解与增根的联系和区别	25
8. 列方程(组)解应用题的技巧	25
9. 几种典型问题的数量之间的关系	26
10. 解分式方程比分式运算更具有技巧性,它是方程知识与分式的有机结合	26
11. 如何解分式方程组	27

第十七章 反比例函数

17.1 反比例函数	
17.2 实际问题与反比例函数	
1. 反比例关系	40
2. 反比例函数的概念	40
3. 用待定系数法求反比例函数的表达式	40
4. 反比例函数的图象和画法	41
5. 反比例函数的性质	41
6. 反比例关系与反比例函数的区别和联系	42
7. 特别注意	42
8. 反比例函数的定义	43
9. 反比例函数图象的性质	43
10. 特别提醒	43

第十八章 勾股定理

18.1 勾股定理	
1. 勾股定理	58
2. 勾股定理的探索过程	58

3. 用面积法证明勾股定理	59
4. 勾股定理的各种表达方式及其作用	59
5. 注意问题	59
18.2 勾股定理的逆定理	
1. 勾股定理的逆定理	61
2. 如何判定一个三角形是否是直角三角形	61
3. 应用	61
4. 用勾股定理的逆定理判定一个三角形是直角三角形的方法,与以前学过的判定方法不同,它是通过代数计算“算”出来的	62
5. 勾股定理的逆定理,对测量也有许多实用价值,可以用它来确定直角	62
6. 勾股数是一种重要的数组,找勾股数可以用实验的方法	62

第十九章 四边形

19.1 平行四边形	
1. 平行四边形	72
2. 平行四边形的性质	72
3. 平行四边形的判定	73
4. 平行四边形性质的作用	73
5. 平行四边形的判定定理的选择	73
6. 平行四边形知识的运用	73
7. 两条平行线的距离	74
8. 平行四边形的面积	74
9. 平行四边形的作图	74
19.2 特殊的平行四边形	
1. 矩形的性质定理与推论	78
2. 矩形的判定定理	78
3. 菱形的性质定理	79
4. 菱形的判定定理	79
5. 正方形的性质定理	79
6. 正方形的判定定理	80
7. 正方形、矩形、菱形、平行四边形的关系	80
8. 特殊平行四边形性质一览表	81
9. 特殊平行四边形判定一览表	81
10. 顺次连接特殊平行四边形各边中点得到的四边形的形状	81
11. 其他问题	81
19.3 梯形	
19.4 课题学习 重心(略)	
1. 梯形的定义	85
2. 等腰梯形和直角梯形	85

3. 等腰梯形的性质	85
4. 等腰梯形的判定	85
5. 梯形的结构特征	85
6. 梯形分类	86
7. 等腰梯形性质及判定的作用	86
8. 梯形的中位线	86
9. 梯形的中位线等于上底与下底之和的一半	86
10. 梯形的中位线被两条对角线所截得的线段等于下底与上底之差的一半	86
11. 解决梯形问题的基本思路	86
12. 梯形的面积	86

第二十章 数据的分析

20.1 数据的代表	
20.1.1 平均数	101
1. 总体和样本	101
2. 平均数	101
3. 平均数的概念	101
4. 平均数的计算方法	102
5. 平均数的意义	102
6. 新数据法计算的步骤	103
7. 平均数的使用	103
8. 警惕平均数的误用	103
9. 平均数的使用范围	104
10. 平均数的一些性质	104
20.1.2 中位数和众数	106
1. 众数	106
2. 中位数	106
3. 平均数、中位数和众数的选用	106
4. 用计算机求平均数、中位数和众数	107
5. 众数、中位数及平均数的异同点	107
6. 需要注意的几个问题	108
20.2 数据的波动	
20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析(略)	
1. 表示一组数据离散程度的指标	110
2. 方差的计算公式	110
3. 化简公式	110
4. 标准差的定义和计算	111
5. 用计算器求标准差	111
6. 方差是反映样本数据波动大小的一个特征数,由方差公式可以推出它的三个基本性质	112
7. 平均数、方差、标准差的几个规律	112

编者寄语

——怎样学好八年级数学(下)

八年级(下)数学包括分式、反比例函数、勾股定理、四边形和数据的分析,这些内容与上册内容有着紧密联系.

式:由整式到分式;函数:由一次函数到反比例函数;几何:由三角形到四边形;数据:由描述到分析.从上面的比较不难看出,八年级下学期的数学将会内容更丰富,难度更大,而应用也将更加广泛,那么如何学好本册内容呢?

1. 用类比的方法学习.如第十六章讲分式,在学习时,我们可以结合分数的有关定义、性质、运算来学习分式的定义、性质和运算,比较两者之间的区别与联系,这样学习会更轻松些.

2. 用转化的思想学习.如本册书的第十九章讲四边形.四边形这一章内容复杂,含有大量的性质、判定,是一般学生比较害怕的一部分内容.如果我们用转化的思想来学习,那么一定会觉得其乐无穷.例如把正方形的问题转化为长方形或菱形的问题;把长方形和菱形的问题转化为平行四边形的问题;还有把四边形的问题转化为三角形的问题,这样学习才会使我们觉得愉快.

3. 学会数形结合.函数的学习历来是初中生学习的难点,如何学好反比例函数呢?主要还是要学会数形结合,因为就函数本身而言,它是把几何与代数有机地结合起来了,如果把几何与代数割裂开,那么是一定学不好函数这块内容的,因此学习函数除了要掌握必要的基本概念和基础知识之外,还应该先培养自己数形结合的能力,善于把几何问题通过数形结合转化为代数问题.

4. 用发散的思维学习第二十章,因为由数据的描述到数据的分析,它是对一组数据,在认识上更加具体,更加科学,更加完美,它告诉我们要多角度、全方位认识问题.

同学们在学习时,还可能会觉得,课堂上能听懂,课后也会做题,但考试成绩却并不理想,在这里我可以欣慰地告诉你有《教材完全解读》帮助你.

这本《教材完全解读》在思路上与老师讲课的思路基本一致,并详细列举了老师讲课时的重要内容和典型习题;其次,这本书在课本要求的基础上,还对各个内容进行了提高和升华.因此,只要同学们能仔细地品读这本书,你们的数学成绩就一定会提高.

最后祝同学们学习进步,考试得高分.

编者

2008年10月

第十六章 分式

课标单元知识

◆ 1. 教材知识解读 ◆

本章主要学习分式及分式的基本性质,分式的约分、通分,分式的基本运算(加、减、乘、除、乘方),整数指数幂的概念及运算性质,分式方程的概念及可化为一元一次方程的分式方程的解法.

重点是分式的各种运算法则,熟练进行分式的运算,解分式方程.

难点是熟练应用分式的各种运算法则进行混合运算;把分式方程转化为整式方程的转化思想以及在解完可化为一元一次方程的分式方程后是否含有增根问题.

分式是初中代数的重要内容,是数学建模的工具.通过分式的运算可进一步提高学生的运算能力和代数恒等变形能力.

◆ 2. 考试说明要求 ◆

(1) 经历生活实际问题的探索,列分式方程的过程,进一步理解分式方程的概念.

(2) 会利用分式的基本性质进行约分和通分.

(3) 会进行简单的分式加、减、乘、除运算.

(4) 进一步学会列分式方程解决生活中的实际问题.

◆ 3. 学习方法导航 ◆

(1) 体会和掌握类比的学习方法

① 通过与分数性质及运算的联系,学习分式的性质及运算.

② 通过与正整数指数幂的性质的联系,学习负整数指数幂的性质,学会在原有知识的基础上学习和建构新的知识体系.

(2) 重视数学转化思想方法的掌握和运用,达到优化解题思路,简化解题过程的目的.

(3) 整数指数幂的意义由正整数的范围扩大到了全体整数,渗透了分类讨论思想.

(4) 在学习本章内容时,要认真仔细,防止在变形、计算上的错误,及时总结学习方法、规律.

中考命题趋向

近几年在全国各地的中考中,关于分式的题型有填空题、选择题、计算题等,随着素质教育不断深入,一些省市对此内容的命题又挖掘了新的题型,如阅读题、探究题、应用题,预计它将是今后命题的新发展方向.

16.1 分式

16.1.1 从分数到分式

学习目标·考纲解读

(1)了解分式的意义,知道分式与整式的区别与联系.(A.了解) (2)了解分式有意义的含义,会根据具体的分式,求出分式有意义时字母所满足的条件.(B.理解) (3)理解分式为零时,分子、分母应具备的条件,会求出分式为零时,相应字母的值.(B.理解) (4)通过分式与分数的比较,进一步体会类比的作用和意义.(C.应用)

1 知识·能力聚焦

1. 同底数幂的除法

设 m, n 为正整数, $m > n, a \neq 0$, 有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$, 即同底数幂相除, 底数不变, 指数相减.

这里底数 a 之所以不能等于零, 是因为若 a 为零, 则除数为零, 除法就没有意义了.

2. 单项式除以单项式

两个单项式相除, 把系数、同底数幂分别相除, 作为商的因式, 对于只在被除式里含有的字母, 则连同它的指数作为商的一个因式.

3. 分式的概念

形如 $\frac{A}{B}$ (A, B 都是整式, 且 B 中含有字母, $B \neq 0$) 的式子, 叫做分式. 其中 A 叫做分式的分子, B 叫做分式的分母.

即分母中含有字母的代数式叫分式. 因为除式的值不能是零, 所以分式中分母的值也不能是零, 如果分式中分母的值是零, 分式没有意义.

整式和分式统称有理式, 即

$$\text{有理式} \begin{cases} \text{整式} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases} \\ \text{分式} \end{cases}$$

4. 确定分式值为零的条件

在分式 $\frac{A}{B}$ 中, 如果 $A=0$ 且 $B \neq 0$ 时, 那么分式 $\frac{A}{B}$ 的值为零.

我们通过转化的方法把求分式有意义、无意义、值为零的条件问题转化为求不等式、方程的解的问题.

名师诠释

[考题 1] 有理式 $\frac{x}{5}, \frac{2}{\pi}, \frac{\pi-1}{x}, x + \frac{1}{y}, \frac{x^2y}{x+y}, \frac{2x}{\pi-1}$ 中, 分式的个数是().

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

[解析] 其中为分式的有 $\frac{\pi-1}{x}, x + \frac{1}{y}, \frac{x^2y}{x+y}$, 共 3 个.

[答案] A

[点评] 因为圆周率 π 是常数, 所以 $\frac{2}{\pi}, \frac{2x}{\pi-1}$ 是整式, 不是分式.

[考题 2] 下列各式中 x 取何值时, 分式有意义?

(1) $\frac{2x}{x-1}$; (2) $\frac{x+1}{|x|-2}$; (3) $\frac{3x}{x^2-1}$; (4) $\frac{x+1}{x^2}$; (5) $\frac{x-1}{x^2+1}$.

[解析] 只有当分式的分母不等于零时, 分式才有意义, 所以也就是确定使分母不为零的 x 的取值范围.

[答案] (1) 由 $x-1=0$, 得 $x=1$, 所以当 $x \neq 1$ 时, 分式 $\frac{2x}{x-1}$ 有意义.

(2) 由 $|x|-2=0$, 得 $x = \pm 2$, 所以当 $x \neq 2$ 且 $x \neq -2$ 时, 分式 $\frac{x+1}{|x|-2}$ 有意义.

(3) 由 $x^2-1=0$, 得 $x = \pm 1$, 所以当 $x \neq 1$ 且 $x \neq -1$ 时, 分式 $\frac{3x}{x^2-1}$ 有意义.

(4) 由 $x^2=0$, 得 $x=0$, 所以当 $x \neq 0$ 时, 分式 $\frac{x+1}{x^2}$ 有意义.

(5) 不论 x 取何值, $x^2+1 \neq 0$, 所以不论 x 取何值, 分式 $\frac{x-1}{x^2+1}$ 都有意义.

[点评] 首先求出使分式的分母为零的字母的取值, 然后取字母不等于这些值, 便可使分式有意义.



2 方法·技巧平台

5. 分数与分式间的联系

分式是分数的继续与拓展,分数则是分式的特例,两者有许多相似之处,因此,在学习中可以运用类比的思想,对照分数的有关知识来学习分式,这也是掌握本章关键知识的有效方法.

6. 分式的概念包括三个方面

(1)分式是两个整式相除的商式,其中分子为被除式,分母为除式,分数线起除号作用.

(2)分式的分母中必须含有字母,而分子中可以含有字母,也可以不含有字母.这是区别于整式的重要依据.

如: $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{2}{x-y}$ 、 $\frac{a}{3x}$ 是分式; $\frac{a}{2}$ 、 $\frac{x-y}{3}$ 不是分式,而是整式.

(3)在任何情况下,分式的分母的值都不能为零,否则分式无意义.这里,分母是对整个除式而言,而不只是就分母中某一个字母来说的.也就是说,分式的分母不为零是隐含在此分式中,而无须注明.像分式 $\frac{1}{x-1}$ 中, $x \neq 1$ 是隐含在 $\frac{1}{x-1}$ 中,否则 $\frac{1}{x-1}$ 就失去了意义.

7. 分式的特殊值中,注意分母一定不能为零

(1)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为零,当且仅当 $A=0$, $B \neq 0$.

(2)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为1,当且仅当 $A=B \neq 0$.

(3)分式 $\frac{A}{B}$ 的值为-1,当且仅当 $A=-B \neq 0$.

从上面进一步说明:分式 $\frac{A}{B}$ 中 $B \neq 0$ 是构成分式 $\frac{A}{B}$ 的条件.



3 创新·思维拓展

8. 关于同底数幂相除的法则

“同底数幂相除底数不变,指数相减.”即 m, n 为正整数, $m > n, a \neq 0$ 有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

[考题3] 当 x 取何值时,分式 $\frac{x}{x+1} \geq 0$.

[答案] 解法一:依题意有 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ x+1 < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x > -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ x < -1, \end{cases}$

得 $x \geq 0$ 或 $x < -1$.

解法二: $\frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

由 $1 - \frac{1}{x+1} \geq 0$ 得 $\frac{1}{x+1} \leq 1$.

当 $x+1 > 0$ 时,得 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \geq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$;

当 $x+1 < 0$ 时,得 $\begin{cases} x+1 < 0, \\ x+1 \leq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x < -1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x < -1$.

故 $x \geq 0$ 或 $x < -1$.

[点评] 涉及分式取正、负值时,一般是考虑分子、分母同号或异号,通过解不等式组来解决.这里解法一是通法,解法二并不比解法一简单.

[考题4] a 千克硫酸(H_2SO_4)溶液中有水 b 千克,则纯硫酸为 $(a-b)$ 千克,浓度(含纯硫酸的百分比)为 $\frac{a-b}{a} \times 100\%$.问 m 千克这样的硫酸溶液中含纯硫酸多少千克?

[解析] $\frac{a-b}{a} \times 100\% \times m = \frac{(a-b)m}{a}$ (千克).

[答案] 含纯硫酸 $\frac{(a-b)m}{a}$ 千克.

[点评] 这是一道化学问题,正确理解分式的概念,就能简单地解决此问题.本题中应注意分式 $\frac{a-b}{a}$ 所表达的含义,分子、分母分别表示什么,这对分式概念的理解是有帮助的.

[考题5] 甲、乙两人分别从两地同时出发,若相向而行,则 ah 相遇;若同向而行,则 bh 甲追上乙.那么甲的速度是乙的().

A. $\frac{a+b}{b}$ 倍 B. $\frac{b}{a+b}$ 倍 C. $\frac{a+b}{b-a}$ 倍 D. $\frac{b-a}{b+a}$ 倍

[解析] 不妨设甲乙两人开始时相距 s 千米,甲的速度为 v_1 ,乙的速度为 v_2 ,则根据题意有

$$\begin{cases} s = a(v_1 + v_2), \\ s = b(v_1 - v_2). \end{cases}$$

于是 $a(v_1 + v_2) = b(v_1 - v_2)$,
所以 $(a+b)v_2 = (b-a)v_1$,

即 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a+b}{b-a}$. 甲的速度是乙的 $\frac{a+b}{b-a}$ 倍.

[答案] C.

[点评] 本题依据路程、速度、时间之间的关系,用时间来表示速度的倍数关系.分析时可以多设几个未知数帮助理解题意.再利用等量代换及比例的基本性质,最后求得结论.

可用比较法加强记忆. 我们已经熟知“同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”的法则. 乘法与除法、加法与减法是互逆的运算, 比较可以加深理解, 有利于记忆.

例如: $3^8 \div 3^2 = \frac{3^8}{3^2} = \frac{3^6 \cdot 3^2}{3^2} = 3^6$, 即 $3^8 \div 3^2 = 3^{8-2} = 3^6$; $x^{10} \div x^6 = \frac{x^{10}}{x^6} = \frac{x^6 \cdot x^4}{x^6} = x^4$, 即 $x^{10} \div x^6 = x^{10-6} = x^4$. 由此对于两个正整数 m 和 n 且 $m > n$, 当 $a \neq 0$ 时, $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m \cdot a^{-n}}{a^n} = a^{m-n}$, 即 $a^m \div a^n = a^{m-n}$. 我们利用相除和相比的统一性, 可以得到这个法则.

9. 单项式除以单项式

两个单项式相除, 只要将系数及同底数幂分别相除, 并把它们在除式中含有的字母连同它的指数作为商的一个因式.

可用类比的方法及相除与相比的统一性, 帮助理解记忆这个法则.

例如: $6a^4b^2c^2 \div 2ab^2 = \frac{6a^4b^2c^2}{2ab^2} = \frac{2ab^2 \cdot 3a^3c^2}{2ab^2} = 3a^3c^2$, 可以发现, 商的系数 3 是被除式的系数 6 除以除式的系数 2 所得的商, 以 a 和 b 为底数的幂分别相除, 得到 a^3 是商的一个因式, 只在被除式中出现的字母 c 连同它的指数都不改变, 作为商的一个因式. 通过一个简单例子的分析, 可以概括出单项式除以单项式的法则.

10. 多项式除以单项式

多项式除以单项式, 先将多项式的每一项都分别除以这个单项式, 再把所得的商相加.

可用公式记忆法. $(am + bm + cm) \div m = a + b + c$, 其中的 a, b, c, m 都表示一个单项式.

[说明] 有了单项式除以单项式的经验, 对于类似 $(10x^4 - 15x^2 + 5x) \div (5x)$ 这样的多项式除以单项式, 容易发现被除式可以分解因式, 其结果是 $5x(2x^3 - 3x + 1)$, 显然被除式除以 $5x$ 所得的商是 $2x^3 - 3x + 1$. 这个多项式的各项正是被除式中的各项分别除以除式的结果. 于是可概括出多项式除以单项式的法则. 即多项式除以单项式, 先将多项式中的每一项都分别除以这个单项式, 再把所得的商相加.

[考题 6] (1) 当 x 取什么值时, 下列分式有意义?

① $\frac{x+1}{2x}$; ② $\frac{2x+3}{3x-5}$; ③ $\frac{2}{|x|-1}$; ④ $\frac{x+2}{x^2+2}$.

(2) 当 a 取何值时, 分式 $\frac{8a+1}{a-1}$ 无意义?

[解析] (1) 对一个分式来说, 当分母不等于 0 时, 分式有意义; (2) 当分式的分母值为 0 时分式无意义.

[答案] (1) ① 当 $2x \neq 0$, 即 $x \neq 0$ 时, 分式 $\frac{x+1}{2x}$ 有意义.

② 当 $3x - 5 \neq 0$, 即 $x \neq \frac{5}{3}$ 时, 分式 $\frac{2x+3}{3x-5}$ 有意义.

③ 当 $|x| - 1 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$ 时, 分式 $\frac{2}{|x|-1}$ 有意义.

④ 当 $x^2 + 2 \neq 0$, x 无论取什么值, $x^2 + 2 > 0$, 所以 x 取任何实数, 分式 $\frac{x+2}{x^2+2}$ 都有意义.

(2) 当 $a - 1 = 0$, 即 $a = 1$ 时, 分式 $\frac{8a+1}{a-1}$ 无意义.

[点评] 分式是否有意义关键是看分母是否等于 0, 等于 0 则无意义, 反之则有意义.

[考题 7] 一货轮行驶在 A、B 两码头之间, 已知货轮在静水中的航行速度保持不变, 为 m km/h. 水流速度是 3 km/h, 请用代数式表示出轮船往返一次的平均速度是_____.

[解析] 顺水航行的速度是 $(m+3)$ km/h, 逆水航行的速度是 $(m-3)$ km/h, 设 A、B 两码头之间的距离是 s , 则顺水航行用的时间是 $\frac{s}{m+3}$, 逆水航行用的时间是 $\frac{s}{m-3}$, 往返一次总路程为 $2s$, 根据“平均速度 = $\frac{\text{总路程}}{\text{总时间}}$ ”即可求得.

[答案] $\frac{2}{\frac{1}{m+3} + \frac{1}{m-3}}$

[点评] 注意平均速度的求法即平均速度 = $\frac{\text{总路程}}{\text{总时间}}$, 注意不要出现 $\frac{(m+3) + (m-3)}{2}$ 这样的错误答案.

[考题 8] 若 $\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ 的值为零, 求 $\frac{1}{(x-1)^2}$ 的值.

[解析] 由已知, 可得 $\begin{cases} x^2+x=0, \\ x^2+3x+2 \neq 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x(x+1)=0, \\ (x+1)(x+2) \neq 0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x+1=0, \\ x+1 \neq 0 \text{ 且 } x+2 \neq 0. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=-1, \\ x \neq -1 \text{ 且 } x \neq -2. \end{cases}$

所以 $x=0$, 代入 $\frac{1}{(x-1)^2}$, 得 $\frac{1}{(0-1)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$.

[点评] 从已知条件中, 发掘新的线索, 再寻求所要解决问题的钥匙, 得到问题的结果. 在考虑分式的值为零的问题时, 一定不要忽视分母不为零这一点.



4 能力·题型设计

1A 一个分数的分母比分子大7,若设分子为 x ,则这个分数可表示为_____.

2A 要使分式 $\frac{x+y}{xy}$ 有意义,则下列说法中正确的是().

- A. $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$ B. $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$
C. $x = 0$ 或 $y = 0$ D. $x = 0$ 且 $y = 0$

3A 若分式 $\frac{2x-4}{x+1}$ 的值为0,则 x 的值为_____.

4A 若分式 $\frac{x+2}{3x-5}$:(1)有意义,则_____;
(2)无意义,则_____;(3)值为零,则_____.

5A 写出一个分母的值总是大于零的分式:_____.

6A 写出一个含有字母 x 的分式(要求:不论 x 取任何实数,该分式都有意义,且分式的值为负):_____.

7A 若分式 $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的值为零,则 x 的取值为().

- A. 3 B. 3 或 -3
C. -3 D. 0

8A 若分式 $\frac{x^2+2x-3}{|x|-1}$ 的值为零,则 x 的值为().

- A. $x = -3$ B. $x = 3$
C. $x = -3$ 或 $x = 1$ D. $x = 3$ 或 $x = -1$

9B 当 $x =$ _____时,分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值为零.

10A 下列各式 $\frac{1}{3}ab, \frac{y}{15x} - 2, \frac{2+3y}{\pi}, \frac{3b+6}{a},$

$\frac{1}{32} \frac{m-n}{s-2}$ 中,是分式的有().

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

点击考点

测试要点 2,3

测试要点 4,7

测试要点 3,7

测试要点 4,10

测试要点 4

2007 年北京

测试要点 3,4,7

测试要点 1,2,6

测试要点 1,3

测试要点 1,2

测试要点 3,6

测试要点 4,5

测试要点 4,8,9

2004 年重庆

测试要点 4,8,9

2004 年安徽芜湖

测试要点 4,7

2005 年云南昆明

测试要点 9,10

测试要点 4,7

2004 年湖南长沙

测试要点 3,5

测试要点 7,8

测试要点 7,8,10

11A 若分式 $\frac{1}{(x+3)(x-4)}$ 有意义,则 x 满足条件().

- A. $x \neq -3$ B. $x \neq -3$ 或 $x \neq 4$
C. $x \neq 4$ D. $x \neq -3$ 且 $x \neq 4$

12B 已知 $\frac{|x|-1}{2x+1} = 0$,则().

- A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = -\frac{1}{2}$
C. $x = \pm \frac{1}{2}$ D. $x \neq \pm \frac{1}{2}$

13B 下列各式中,哪些是整式? 哪些是分式?

$\frac{1}{x}, \frac{a^3+b^3}{a+b}, \frac{2}{a+b}, \frac{x}{\pi}, a^2-ab+b^2, \frac{x}{2} - \frac{1}{3}y.$

14A 小明用一个面积为 S 的面粉做了一个圆形的烧饼,请问这个烧饼的半径是整式吗? 为什么?

15B (1) 当 x 为何值时,下列各式有意义:

① $\frac{x^2-x-2}{|x|-2}$; ② $\frac{2+x}{2+\frac{2}{x-1}}$.

(2) a 取什么数时,分式 $\frac{2a-4}{3a+1}$ 无意义?

(3) ①若代数式 $\frac{(x-2)(x+1)}{|x|-1}$ 的值为零,求 x 的值;

②若分式 $\frac{|a|-2}{(a-2)(a+3)}$ 的值为零,求 a 的值.

(4) 当 x 取何值时,分式 $\frac{x+5}{2x+3}$ 的值为正数?

(5) 当 x 为什么数时,分式 $\frac{3x}{x+1}$ 的值为-1?

16B 已知 $x^2-x+1=0$,求 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值.

17B 化简 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

18B 已知 $-\frac{3}{a-3}$ 的值为正整数,求整数 a 的值.

19C 当 x 变化时,求分式 $\frac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$ 的最小值.

16.1.2 分式的基本性质

学习目标·考纲解读

(1)掌握分式的基本性质.(B.理解) (2)掌握约分与通分,会进行简单的运算.(B.理解) (3)掌握分式中的符号法则.(B.理解)

1 知识·能力聚焦

1. 分式的基本性质

分式的分子与分母同乘以(或除以)一个不等于零的整式,分式的值不变,用式子表示为: $\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$, $\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$. (其中 M 是不等于零的整式)分式的基本性质是分式恒等变形的依据,正确理解和熟练掌握这一性质是学好分式的关键,因此在学习中应注意以下几点:

(1)基本性质中的 A 、 B 、 M 均为整式,如:

$$\frac{y}{x} = \frac{y \cdot x}{x \cdot x} = \frac{xy}{x^2} (x \neq 0),$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{(a-b)(a+b)}{a(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+ab} (a \neq 0, a+b \neq 0).$$

(2)在应用分式的基本性质时,都应考查 M 这个整式的值是否为零,只有整式 M 不为零时,基本性质才成立,要随时注意是在怎样的条件下运用这个性质的,如

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c(a-b)}{(a-b)^2},$$

由于已知分式 $\frac{c}{a-b}$ 中已隐含含有 $a-b \neq 0$,所以 $a-b$ 去乘以分式的分子和分母是允许的,并不需要 $a-b \neq 0$ 的补充条件. 但如果是 $\frac{c}{a-b} =$

$\frac{c(a+b)}{(a-b)(a+b)}$, 这样变形的话,是在 $a+b \neq 0$, 即 $a \neq -b$ 的条件下才能用 $a+b$ 去乘以这个分式的分子和分母,因此条件 $a \neq -b$ 必须另外附加,否则就不能运用.

名师诠释

[考题1] 写出下列等式中的未知的分子或分母.

$$(1) \frac{18m^2(m-n)^2}{24mn(n-m)} = \frac{3m(n-m)}{(\quad)}; (2) \frac{m^2-3m}{9-m^2} = \frac{(\quad)}{m+3}.$$

[解析] (1)先观察等式左边分式的分子为 $18m^2(m-n)^2$, 而等式右边分式的分子为 $3m(n-m)$, 由于 $18m^2(m-n)^2 \div 3m(n-m) = 6m(n-m)$, 显然 $3m(n-m)$ 是由 $18m^2(m-n)^2 \div 6m(n-m)$ 得到的. 由分式的基本性质, 等式左边的分母也要除以 $6m(n-m)$, 而左边的分母是 $24mn(n-m)$, 故右边分母为 $4n$.

(2)先观察分母, 等式左边分式的分母是 $9-m^2 = (3-m)(3+m)$, 等式右边分母是 $m+3$, 显然 $m+3$ 是由前者 $9-m^2$ 除以 $3-m$ 得到的. 由分式的基本性质, 等式的左边分式的分子也要除以 $3-m$, 即 $(m^2-3m) \div (3-m) = -m$.

[答案] (1) $4n$ (2) $-m$

[点评] 注意分式基本性质的灵活运用.

[考题2] 下列各式从左到右变形正确的是().

$$\begin{aligned} \text{A. } \frac{x+1}{2} + \frac{y}{3} &= 3(x+1) + 2y & \text{B. } \frac{0.2a-0.03b}{0.4c+0.05d} &= \frac{2a-3b}{4c+5d} \\ \text{C. } \frac{a-b}{b-c} &= \frac{b-a}{c-b} & \text{D. } \frac{2a-2b}{c+d} &= \frac{a-b}{c+d} \end{aligned}$$

[解析] 分式变形的根据是分式的基本性质, 看一个分式的变形是否正确, 关键是要看其分子、分母所乘或除的是不是同一个为0的整式. A 不正确, 通分后应变成同分母分式而不是去分母; B 不正确, 分式中的各项所乘的不是同一个数; C 正确, 分子和分母同时变号, 分式值不变; D 不正确, 分子除以2而分母不变.

[答案] C

[考题3] 不改变分式的值, 将下列分式分母中的系数变为整数.

$$(1) \frac{0.2x+y}{0.02x-0.5y}; (2) \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y}.$$

[解析] 将分式的分子和分母都乘各项系数的最小公倍数.

$$\text{[答案]} (1) \frac{0.2x+y}{0.02x-0.5y} = \frac{(0.2x+y) \times 50}{(0.02x-0.5y) \times 50} = \frac{10x+50y}{x-25y}$$

$$(2) \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y} = \frac{\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y\right) \times 12}{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right) \times 12} = \frac{4x+3y}{6x-4y}$$