



SHU XUE FEN XI

张谊宾 翟连林 杨凤歧

数学分析典型题

600
例

N70

河南教育出版社

责任编辑 | 温 光 |

封面设计 孙 平

ISBN 7-5347-1228-9/G·1020

定 价 13.00元

The background of the cover is a solid blue color. A vertical white stripe runs down the center, containing the title text. On either side of this stripe, there are two concentric white circles. The inner circles are smaller and centered on the stripe, while the outer circles are larger and also centered on the stripe, creating a symmetrical design.

数学分析典型题

600
例

豫新登字03号

数学分析典型题 600 例

张宜宾 翟连林 杨凤岐 编著

责任编辑 温 光

河南教育出版社出版

河南郑州中华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 22.25印张 552千字

1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷

印数 1—1,530 册

ISBN7-5347-1228-9/G·1020

定价 13.00元

编者说明

本书是大学高等数学和数学分析课的辅助读物，可以帮助读者对该学科的内容进一步巩固、熟练和深化，从而达到灵活应用的目的。对高等院校理工科在校生、毕业生以及具有同等学历的社会青年提高解题、证题的能力尤其有益。对报考理工、师范院校的硕士研究生的同学的迎考复习有指导作用。可做为该学科的教学参考书。

本书以解题为主，所选题目，按其主要的解题目大致分述在极限、连续、微分学、积分学、级数等章节中。各章节均有必要的说明，但对教材中讲授的内容不再在这里重述。由于读者对现在流行的数学分析教材和习题集中的题目比较熟悉，选题时我们一般不再采用。但仍紧紧围绕该学科最基本、最重要、最典型的内容进行选题，不选偏题怪题，而是更多地注重了广泛性、灵活性、趣味性，选用了一些比较新鲜的习题。尤其对历届硕士研究生的入学试题，我们按出现频率和覆盖面，选取了一大部分。

本书按解题方法分类介绍，不受数学分析自然系统的限制。题目编排由浅入深。虽然题目形式多种多样，但在解题方法上有其内在联系和系统，便于读者在学习数学分析或高等数学的同时较顺利地阅读本书。同一方法的题目，我们做了必要的重复，便于读者巩固熟练。解后的注释对读者有启发作用。本书大部分篇幅放在证明题上，有利于提高读者分析问题和解决问题的能力。对数学分析中某些重要内容如极限的证明方法、中值定理的应用、一致收敛性的研究等做为该书的重点，选题更为广泛，方法

介绍得更为全面。有的章节（如不等式一章）适当拓广了分析教材的范围，对读者应用数学分析的基本方法能力的训练十分有益，可做为课堂教学的重要补充。对分析中富氏级数部分的题目，我们认为现行教材中内容已经不少，为减少篇幅保证重点，没有列入。

本书第一章、第二章、第六章、第七章由张谊宾执笔，第三章，第四章、第五章由翟连林执笔，第八章，第九章由杨凤岐执笔。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬请读者给予批评指正。

编 者

1992年12月

目 录

第一章 极限的证明与求法

§1 定义法	(1)
§2 哥西准则法	(13)
§3 单调有界原理法	(20)
§4 利用迫敛性定理	(34)
§5 利用重要极限	(44)
§6 台劳公式法	(51)
§7 利用洛必大法则	(57)
§8 利用级数收敛的必要条件	(62)
§9 定积分定义法	(64)
§10 利用施笃兹定理	(71)
§11 几类互相有联系的极限	(81)
§12 求极限的其它方法举例	(86)
§13 上极限和下极限	(89)
§14 证明极限不存在的方法举例	(96)

第二章 连续函数

§1 函数的连续性	(100)
§2 函数的一致连续性	(122)

第三章 一元函数微分学

§1 导函数	(144)
§2 中值定理	(157)
§3 方程的根与函数的零点	(179)

§4	函数恒等于常数的条件	(191)
----	------------------	-------

第四章 不等式

§1	几个重要的不等式	(209)
§2	函数的单调性与不等式	(221)
§3	微分中值定理与不等式	(230)
§4	函数的极值、最值与不等式	(248)
§5	凸函数及其在证明不等式中的应用	(252)

第五章 一元函数积分学

§1	积分的存在问题	(274)
§2	与积分有关的极限问题	(290)
§3	积分不等式	(311)
§4	有关定积分的其它证明问题	(321)

第六章 无穷级数

§1	数项级数	(329)
§2	函数项级数	(389)
一、收敛域的求法		(389)
二、级数的一致收敛性		(395)
§3	幂级数	(439)

第七章 多元函数微分学

§1	多元函数、极限、连续	(461)
§2	多元函数的导数与微分	(477)
§3	多元函数极值、隐函数存在定理	(490)

第八章 广义积分与含参量的积分

§1	广义积分收敛的判别	(523)
§2	与广义积分有关的证明题	(538)
§3	广义积分的计算	(560)
§4	含参量广义积分一致收敛性的判别	(570)
§5	含参量广义积分的一致收敛性的应用	(579)

第九章 多元函数的积分

§1	二次积分的换序	(589)
§2	二重积分的计算与证明	(593)
§3	三重积分的计算与证明	(608)
§4	二重和三重广义积分	(621)
§5	重积分与曲面积分化为定积分	(638)
§6	多重积分	(648)
§7	第一型曲线积分的计算	(660)
§8	第二型曲线积分的计算与证明	(666)
§9	第一、二型曲面积分的计算与证明	(685)

第一章 极限的证明与求法

有关极限的论证与求法是数学分析中的基本方法, 几乎本课程的各部分内容都会涉及到它, 这里我们将不受数学分析自然系统的限制, 把那些典型的、有启发性的题目集中起来, 按方法分类, 从而系统地说明极限的各种论证方法.

§1 定 义 法

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

【证】由已知, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ 而}$$

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= (x_{n-1} - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= (x_{n-1} - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-4}) - \\ &\quad - (x_{n-3} - x_{n-4}) = \cdots = (x_n - x_{n-2}) - \\ &\quad - (x_{n-1} - x_{n-3}) + \cdots \pm (x_{N_1+1} - x_{N_1-1}) \\ &\quad \mp (x_{N_1} - x_{N_1-1}), \end{aligned}$$

所以当 $n > N_1$ 时, 有

$$|x_n - x_{n-1}| \leq (n - N_1) \frac{\varepsilon}{2} + |x_{N_1} - x_{N_1-1}|.$$

对于取定的 N_1 , 当 $n > N_2$ 时, 可使

$$\left| \frac{x_{N_1} - x_{N_1-1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $n > \max(N_1, N_2)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{n} \right| &\leq \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{x_{N_1} - x_{N_1-1}}{n} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

本题证明特点是借助于插项实现由已知到未知极限的转化, 其证明的关键是用到了 N_1 的固定性.

不过在推导中作以下处理也是允许的, 对于 “当 $n > N_1$ 时有

$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}$ ” 这一假设条件, 在不影响最终极限值的前提

下, 可以认为

$$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对 $n = 3, 4, 5, \dots$ 均成立. 那么

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) \\ &\quad + \dots \pm (x_3 - x_1) \mp (x_2 - x_1), \end{aligned}$$

且当 $n > N$ 时, 可使 $\left| \frac{x_2 - x_1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{n} \right| \leq \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{x_2 - x_1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

掌握这种处理问题的方法，对于某些极限问题的证明是比较方便的，读者不妨通过以下题目做一练习。

“设 $a_n > 0 (n=1, 2, 3, \dots)$ ，若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A” .$$

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} = a$ 。

【证】(1) 首先设 $a=0$ ，那么，对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N_1 > 0$ ，当 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|\}$ ，当 $n > N_1$ 时，将分子分段，

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + N_1 a_{N_1} + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} \right| \\ & \leq \frac{[1 + 2 + \dots + (N_1 - 1)]M + (N_1 + \dots + n) \frac{\varepsilon}{2}}{1 + 2 + \dots + n} \\ & = \frac{N_1(N_1 - 1)}{n(n + 1)} \cdot M + \frac{N_1 + \dots + n}{1 + 2 + \dots + n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ & < \frac{N_1(N_1 - 1)}{n(n + 1)} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

对于固定的 N_1 ，当 $n > N_2$ 时，能使 $\frac{N_1(N_1 - 1)}{n(n + 1)} M < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

取 $n > \max(N_1, N_2)$, 有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$.

由 (1) 有
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{1 + 2 + \cdots + n} = 0,$$

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = a,$$

结论得证。

在本题证明中不仅利用了 N_1 的固定性, 而且根据已知条件采用了分段估值法, 这是一种经常用的有效方法。利用这个方法读者作为练习还可证明:

“若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = +\infty$ ”

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 又

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}, \quad n=1, 2, 3, \cdots,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 存在且等于 AB 。

【证】对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$ 的假设, 总存在正整数 N_0 , 使当 $n > N_0$ 时, 有

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{4(|B| + 1)}, \quad |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

这里 $M > 0$ 满足

$$|x_n| \leq M, \quad |y_n| \leq M, \quad n=1, 2, 3, \cdots,$$

再取定自然数 N , 使 $N > \max \left\{ 2N_0, \frac{4(M^2 + |AB|)N_0}{\varepsilon} \right\}$,

则当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{(x_1 y_n - AB) + \cdots + (x_{N_0} y_{n-N_0+1} - AB)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{N_0(M^2 + |AB|)}{n} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$\left| \frac{(x_{n-N_0+1} y_{N_0} - AB) + \cdots + (x_n y_1 - AB)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{N_0(M^2 + |AB|)}{n} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

而当 $k = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, n - N_0$ 时, $k > N_0$, $n - k + 1 \geq n - (n - N_0) + 1 > N_0$, 所以

$$|x_k y_{n-k+1} - AB| \leq M |y_{n-k+1} - B| + |B| |x_k - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\left| \frac{(x_{N_0+1} y_{n-N_0} - AB) + \cdots + (x_{n-N_0} y_{N_0+1} - AB)}{n} \right|$$

$$< \frac{n - 2N_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是只要 $n > N$, 便有

$$|z_n - AB| = \left| \frac{x_1 y_n + \cdots + x_k y_{n-k+1} + x_n y_1}{n} - AB \right|$$

$$\leq \left| \frac{(x_1 y_n - AB) + \cdots + (x_{N_0} y_{n-N_0+1} - AB)}{n} \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{(x_{N_0+1}y_{n-N_0} - AB) + \cdots + (x_{n-N_0}y_{N_0+1} - AB)}{n} \right| \\
& + \left| \frac{(x_{n-N_0+1}y_{N_0} - AB) + \cdots + (x_n y_1 - AB)}{n} \right| \\
& < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = AB$.

如上的论证思想在证明函数极限时同样适用。

4. 设 $f(x)$ 在任一有限区间上黎曼可积, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l.$$

【证】对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 使当 $t > X$ 时, 有

$$l - \varepsilon < f(t) < l + \varepsilon,$$

且存在 $M > 0$, 使当 $t \in [0, X]$ 时, 有

$$|f(t)| \leq M.$$

不妨设 $x > X$, 则

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^X f(t) dt + \frac{1}{x} \int_X^x f(t) dt.$$

因为

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^X f(t) dt \right| \leq \frac{X}{x} M \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

$$\text{又 } l - \varepsilon < \frac{x-X}{x} (l - \varepsilon) \leq \frac{1}{x} \int_X^x f(t) dt$$

$$\leq \frac{x-X}{x} (l + \varepsilon) < l + \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$.

5. 设函数 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上可导.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 求证: 存在 $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$.

【证】(1) 对任给 $\varepsilon > 0$, 由 $f'(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) 知, 存在 $N_1 > 0$, 当 $x > N_1$ 时, 有 $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 而且由

$$|f(x) - f(N_1)| = |f'(\xi)| (x - N_1), \quad N_1 < \xi < x,$$

得 $|f(x)| < |f(N_1)| + \frac{\varepsilon}{2}(x - N_1)$.

取 $N_2 > N_1$, 使满足 $\left| \frac{f(N_1)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x > N_2$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \left| \frac{f(N_1)}{x} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| 1 - \frac{N_1}{x} \right| < \varepsilon.$$

故结论得证.

(2) 由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 易得对于任意常数 $a > 0$, 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{a}{x - a} \right) - \frac{f(a)}{x - a} \right] = 0.$$

于是, 对于 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 和 $n (n = 1, 2, \dots)$, 总存在 $b_n > n$, 使得

$$\left| \frac{f(b_n) - f(n)}{b_n - n} \right| < \frac{1}{n}.$$

由微分中值定理, 知存在 $x_n: n < x_n < b_n$, 使得

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(n)}{b_n - n},$$

即 $|f'(x_n)| < \varepsilon_n \quad (n=1, 2, \dots),$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0.$

注: 1° 若将(2)中条件加强为: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

存在, 则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$

反证法. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a$, 不妨设 $a > 0$, 则有 $A > 0$, 使当

$x > A$ 时 $f'(x) > \frac{a}{2}$. 由中值定理, 得

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(A) + f'(\xi)(x - A)}{x},$$

从而有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \frac{a}{2}$, 与题设矛盾.

2° 本题中的(2)是应用微分中值定理取出满足一定条件的“中间点” $\xi = x_n$ 的一个很好的例题, 为了本问题的完整性我们把它列在了这里.

6. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列, 令 $y_n = x_{n-1} + 2x_n (n=2, 3, \dots)$, $\{y_n\}$ 收敛. 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

【证】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时,

有 $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$