SHU XUE FEN XI

张谊宾　翟连林　杨凤歧

数学分析典型题600例

N70

河南教育出版社

责任编辑 温 光

封面设计 孙 平

ISBN 7-5347-1228-9/G·1020

定 价 13.00元

数学分析典型题600例

豫新登字03号

数学分析典型题600例

张宜宾 翟连林 杨风岐 编著

责任编辑 温 光

河南教育出版社出版
河南郑州中华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 22.25印张 552千字
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷
印数 1— 1,530 册

ISBN7-5347-1228-9/G·1020

定价 13.00元

编 者 说 明

本书是大学高等数学和数学分析课的辅助读物，可以帮助读者对该学科的内容进一步巩固、熟练和深化，从而达到灵活应用的目的。对高等院校理工科在校生、毕业生以及具有同等学历的社会青年提高解题、证题的能力尤其有益。对报考理工、师范院校的硕士研究生的同学的迎考复习有指导作用。可做为该学科的教学参考书。

本书以解题为主，所选题目，按其主要的解题目的大致分述在极限、连续、微分学、积分学、级数等章节中。各章节均有必要的说明，但对教材中讲授的内容不再在这里重述。由于读者对现在流行的数学分析教材和习题集中的题目比较熟悉，选题时我们一般不再采用。但仍紧紧围绕该学科最基本、最重要、最典型的内容进行选题，不选偏题怪题，而是更多地注重了广泛性、灵活性、趣味性，选用了一些比较新鲜的习题。尤其对历届硕士研究生的入学试题，我们按出现频率和覆盖面，选取了一大部分。

本书按解题方法分类介绍，不受数学分析自然系统的限制。题目编排由浅入深。虽然题目形式多种多样，但在解题方法上有其内在联系和系统，便于读者在学习数学分析或高等数学的同时较顺利地阅读本书。同一方法的题目，我们做了必要的重复，便于读者巩固熟练。解后的注释对读者有启发作用。本书大部分篇幅放在证明题上，有利于提高读者分析问题和解决问题的能力。对数学分析中某些重要内容如极限的证明方法、中值定理的应用、一致收敛性的研究等做为该书的重点，选题更为广泛，方法

介绍得更为全面。有的章节（如不等式一章）适当拓广了分析教材的范围，对读者应用数学分析的基本方法能力的训练十分有益，可做为课堂教学的重要补充。对分析中富氏级数部分的题目，我们认为现行教材中内容已经不少，为减少篇幅保证重点，没有列入。

本书第一章、第二章、第六章、第七章由张谊宾执笔，第三章，第四章、第五章由翟连林执笔，第八章，第九章由杨凤岐执笔。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬请读者给予批评指正。

编　者

1992年12月

目　录

第九章　多元函数的积分

第一章 极限的证明与求法

有关极限的论证与求法是数学分析中的基本方法，几乎本课程的各部分内容都会涉及到它，这里我们将不受数学分析自然系统的限制，把那些典型的、有启发性的题目集中起来，按方法分类，从而系统地说明极限的各种论证方法。

§1 定义法

1. 已知数列$\{x_n\}$满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$$

【证】由已知，对任给$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，有$|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$。而

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}&=(x_n-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-2})\\&=(x_{n-1}-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})+(x_{n-2}-x_{n-3})\\&=(x_{n-1}-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})+(x_{n-2}-x_{n-4})-\\&\quad-(x_{n-3}-x_{n-4})=\cdots\cdots=(x_n-x_{n-2})-\\&\quad-(x_{n-1}-x_{n-3})+\cdots\pm(x_{N_1+1}-x_{N_1-1})\\&\quad\mp(x_{N_1}-x_{N_1-1}),\end{aligned}$$

所以当$n>N_1$时，有

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N_1}-x_{N_1-1}|.$$

对于取定的N_1，当$n>N_2$时，可使

$$\left|\frac{x_{N_1}-x_{N_1-1}}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$n>\max(N_1, N_2)$时，有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|\leqslant\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{x_{N_1}-x_{N_1-1}}{n}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

本题证明特点是借助于插项实现由已知到未知极限的转化，其证明的关键是用到了N_1的固定性。

不过在推导中作以下处理也是允许的，对于“当$n>N_1$时有$|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$”这一假设条件，在不影响最终极限值的前提下，可以认为

$$|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对$n=3, 4, 5,$ ……均成立。那么

$$x_n-x_{n-1}=(x_n-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})$$
$$+\cdots\pm(x_3-x_1)\mp(x_2-x_1),$$

且当$n>N$时，可使$\left|\frac{x_2-x_1}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|\leqslant\frac{n-2}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{x_2-x_1}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

掌握这种处理问题的方法，对于某些极限问题的证明是比较方便的，读者不妨通过以下题目做一练习。

"设 $a_n>0(n=1, 2, 3, \cdots)$，若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，证明

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$" .

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$。

【证】(1) 首先设$a=0$，那么，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，有

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$M=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_1-1}|\}$，当$n>N_1$时，将分子分段，

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right|$$

$$\leqslant\frac{[1+2+\cdots+(N_1-1)]M+(N_1+\cdots+n)\frac{\varepsilon}{2}}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{N_1(N_1-1)}{n(n+1)}\cdot M+\frac{N_1+\cdots+n}{1+2+\cdots+n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{N_1(N_1-1)}{n(n+1)}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于固定的N_1，当 $n>N_2$ 时，能使$\dfrac{N_1(N_1-1)}{n(n+1)}M<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

取 $n>\max(N_1, N_2)$，有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

由(1)有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{1+2+\cdots+n}=0$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$,

结论得证。

在本题证明中不仅利用了 N_1 的固定性，而且根据已知条件采用了分段估值法，这是一种经常用的有效方法。利用这个方法读者作为练习还可证明：

"若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=+\infty$".

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，又

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n},\ n=1, 2, 3, \cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$存在且等于$AB$。

【证】 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$的假设，总存在正整数$N_0$，使当$n>N_0$时，有

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{4(|B|+1)},\quad |y_n-B|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

这里$M>0$满足

$$|x_n|\leqslant M,\quad |y_n|\leqslant M,\quad n=1, 2, 3, \cdots,$$

再取定自然数N，使$N>\max\left\{2N_0,\ \frac{4(M^2+|AB|)N_0}{\varepsilon}\right\}$，

则当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{(x_1y_n-AB)+\cdots+(x_{N_0}y_{n-N_0+1}-AB)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{N_0(M^2+|AB|)}{n}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

$$\left|\frac{(x_{n-N_0+1}y_{N_0}-AB)+\cdots+(x_ny_1-AB)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{N_0(M^2+|AB|)}{n}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

而当 $k=N_0+1$，$N_0+2\cdots n-N_0$ 时，$k>N_0$，$n-k+1\geqslant n-(n-N_0)+1>N_0$，所以

$$|x_ky_{n-k+1}-AB|\leqslant M|y_{n-k+1}-B|+|B||x_k-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\left|\frac{(x_{N_0+1}y_{n-N_0}-AB)+\cdots+(x_{n-N_0}y_{N_0+1}-AB)}{n}\right|$$

$$<\frac{n-2N_0}{n}\ \frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是只要 $n>N$，便有

$$|z_n-AB|=\left|\frac{x_1y_n+\cdots+x_ky_{n-k+1}+x_ny_1}{n}-AB\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{(x_1y_n-AB)+\cdots+(x_{N_0}y_{n-N_0+1}-AB)}{n}\right|$$

$$+\left|\frac{(x_{N_0+1}y_{n-N_0}-AB)+\cdots+(x_{n-N_0}y_{N_0+1}-AB)}{n}\right|$$

$$+\left|\frac{(x_{n-N_0+1}y_{N_0}-AB)+\cdots+(x_ny_1-AB)}{n}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=AB$。

如上的论证思想在证明函数极限时同样适用。

4．设$f(x)$在任一有限区间上黎曼可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=l.$$

【证】对任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使当 $t>X$ 时，有

$$l-\varepsilon<f(t)<l+\varepsilon,$$

且存在 $M>0$，使当 $t\in[0, X]$ 时，有

$$|f(t)|\leqslant M.$$

不妨设 $x>X$，则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^X f(t)dt+\frac{1}{x}\int_X^x f(t)dt.$$

因为

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^X f(t)dt\right|\leqslant\frac{X}{x}M\to 0(x\to+\infty),$$

又 $$l-\varepsilon<\frac{x-X}{x}(l-\varepsilon)\leqslant\frac{1}{x}\int_X^x f(t)dt$$

$$\leqslant\frac{x-X}{x}(l+\varepsilon)<l+\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=l$。

5．设函数 f 在区间 $(0,\ +\infty)$ 上可导。

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，求证：存在 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=0$。

【证】（1）对任给 $\varepsilon>0$，由 $f'(x)\to0(x\to+\infty)$ 知，存在 $N_1>0$，当 $x>N_1$ 时，有 $|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，而且由

$$|f(x)-f(N_1)|=|f'(\xi)|(x-N_1),\quad N_1<\xi<x,$$

得
$$|f(x)|<|f(N_1)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-N_1).$$

取 $N_2>N_1$，使满足 $\left|\frac{f(N_1)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $x>N_2$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\left|\frac{f(N_1)}{x}\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|1-\frac{N_1}{x}\right|<\varepsilon.$$

故结论得证。

（2）由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，易得对于任意常数 $a>0$，均有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]=0.$$

于是，对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，和 $n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，总存在 $b_n>n$，使得

$$\left|\frac{f(b_n)-f(n)}{b_n-n}\right|<\frac{1}{n}.$$

由微分中值定理，知存在 x_n：$n<x_n<b_n$，使得

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(n)}{b_n-n},$$

即 $\qquad |f'(x_n)|<\varepsilon_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$

从而 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=0.$

注：1°若将(2)中条件加强为：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。

反证法。若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a$，不妨设 $a>0$，则有 $A>0$，使当 $x>A$ 时 $f'(x)>\frac{a}{2}$。由中值定理，得

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(A)+f'(\zeta)(x-A)}{x},$$

从而有 $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{a}{2}$，与题设矛盾。

2°本题中的(2)是应用微分中值定理取出满足一定条件的“中间点” $\zeta=x_n$ 的一个很好的例题，为了本问题的完整性我们把它列在了这里。

6. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列，令 $y_n=x_{n-1}+2x_n(n=2,3,\cdots)$，$\{y_n\}$ 收敛。证明：$\{x_n\}$ 收敛。

【证】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$。故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n>n_0$ 时，有

$$|y_n-\bar{y}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$