# 一题多解与多题一解

YITIDUOJIE YU DUOTIYIJIE

宋大荣 董学易 刘子芳 编

云南人民出版社

# 一题多解与多题一解

宋大荣
董学易　编写
刘子芳

云南人民出版社
一九八一年·昆明

封面设计：于子恕
责任编辑：何学惠

**一题多解与多题一解**

宋大荣
董学易　编写
刘子芳

*

云南人民出版社出版
（昆明市书林街100号）
云南新华印刷厂印刷　云南省新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32　印张：6.125　字数：120,000
1981年11月第一版　1982年6月第二次印刷
印数：12,000—34,000
统一书号：7116·782　　定价：0.44元

# 前　言

代数、三角、平面几何和平面解析几何是初等数学的分科，虽然它们具有各自的特点，研究的对象和方法有所不同，但现实世界的空间形式和数量关系，却把它们统一在一个完整的体系之中.

本书就是从横(一题多解)、纵(多题一解)两个方面来沟通各学科知识之间的联系，达到综合运用它们的目的.

在"一题多解"中，我们选择了一些具有代表性的例题，从不同的角度，运用各学科的知识来求解.显然，一个题目，往往本学科就有多种甚至数十种求解方法，用其他学科的知识来求解，常常也有多种方法的.为了达到本书的目的，同时不使篇幅过长，我们对每一个题目，一个学科只选择一种方法（也许并非是最好的方法).在"多题一解"中，我们对各学科的一个类型的问题，一般也只选取一两个典型的例子.我们在解题的同时，还简单阐明了我们的一些思考方法和理论依据.

我们把多年教学实践的点滴体会，并参阅了有关数学刊物和资料，编写了此书.在编写过程中，得到大理州教育局教研室的支持、帮助，更承蒙云南人民出版社文教编辑室的

具体指导，谨在此深表感谢！

由于我们的思想水平和业务水平有限，加以编写时间比较仓促，许多问题尚未能充分讨论，因此，缺点和错误在所难免。诚恳希望能得到专家与读者的批评指正。

编者　1980年10月

# 目　　录

# 第一章　一题多解

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门基础科学．由于生产实践和科学技术的发展和需要，使得数学的研究对象愈来愈加广泛，以致对“空间形式”和“数量关系”也要做更加广义的理解．由于数学应用遍及自然科学和社会科学的各个领域，以致过去与数学似乎无缘的一些领域，也日渐与数学亲近起来．

这样，一方面对各种各样的对象以“形”或“数”的角度进行抽象研究，加速了数学本身分支的发展和学科的增多；另一方面，追溯其产生及发展的本源，皆源于现实世界中的空间形式和数量关系．这种“形”与“数”的密切联系，使得数学各科始终统一在一个有机的统一体中．数学越是向前发展，就越有必要加强各学科之间的相互联系的研究，就越有必要沟通各学科知识之间的联系，综合运用它们，并发展新的学科．

正是由于初等数学中各学科之间的密切联系，才为数学的其他学科的发展奠定了基础．例如，微积分学的研究方法，就是建立在代数方法和几何方法密切结合的基础上发展起来的．

相应地，数学教学也要适应生产实践和科学技术发展的要求。中学数学对传统数学的精简和现代数学的渗透，就更加显示了各学科知识的密切联系。现行全国统一的中学数学教材，把各学科编在一起，正加强了这种联系。其目的就是要使同学从各学科知识中学习到系统的、完整的知识，并能够综合运用它们来解决各种具体问题，从而提高同学们分析问题和解决问题的能力。

同学们在平时的学习中，尤其是在复习中，要把所学的各部分知识融汇贯通，在解题中开阔思路，综合运用这些知识。这是“一题多解”的主要目的。

你若是一个缺乏登山经历的人，那么当你在深山河谷的密林中寻得一条小道，艰难地往上攀登的时候，一定会有登山唯有此路通的感觉。当你登达高峰，“一览众山小”之时，这才豁然开朗；千山万壑相通连！当你用多种方法攻占了数学难关之后，也是会有这种感觉的。登山和攻关，真是其乐无穷啊！

虽然，“华山自古一条路”，然而智取华山的勇士们却险开新途，胜利地登上高峰。只要我们善于思考，不拘一格，定能在攻克数学的碉堡中出奇制胜。

下面通过一些例题来加以说明：

**例1** 已知$a>0$，$b>0$，求证：

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

**证**：代数方法——

$\because\ (a-b)^2\geqslant 0$，

$$\therefore \quad (a-b)^2+4ab \geqslant 4ab,$$

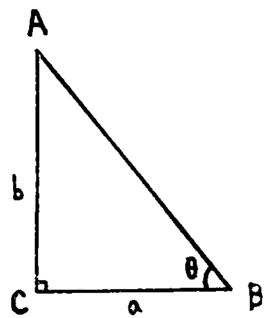
$$(a+b)^2 \geqslant 4ab,$$

即 $$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab,$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

（当 $a=b$ 时，等号成立）.

三角方法——如图1．分别以 $a$、$b$ 为直角边，作 $Rt\Delta ABC$，则



（图1）

$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，令 $\angle ABC=\theta$,

$\therefore$ $a=AB\cdot\cos\theta$，$b=AB\cdot\sin\theta$.

$$a\cdot b=AB^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{AB^2}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\sin 2\theta$$

$$\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$$ （$\theta=45°$时，等号成立）.

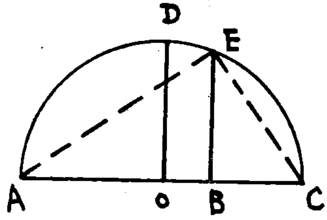
由 $$a\cdot b\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},$$

得 $$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

从而 $$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

几何方法——如图2．在直线 $AC$ 上取 $AB=a$，$BC$

$=b$，以$AC=a+b$为直径作半圆，其圆心为$O$，分别过$O$、$B$各引$AC$的垂线，交半圆于$D$、$E$点，则有



(图 2)

$$OD=\frac{AC}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

由 $\quad \Delta ABE \backsim \Delta EBC$，

得 $\quad BE^2=AB\cdot BC$，

即 $\quad BE=\sqrt{a\cdot b}$.

在圆内，直径大于任意一弦，故有$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当$B$与$O$重合时，等号成立）.

例 2　设$a$、$b$、$c$、$d$都是正数，且$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$．求证：$ac+bd\leqslant 1$．

证：代数方法——

$\because \quad a^2+b^2+c^2+d^2=2$，

$\therefore \quad a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=2-2ac-2bd$，

即 $\quad (a-c)^2+(b-d)^2=2(1-ac-bd)$.

但 $\quad (a-c)^2\geqslant 0$，$\quad (b-d)^2\geqslant 0$，

$\therefore \quad 1-ac-bd\geqslant 0$，

即 $\quad ac+bd\leqslant 1$.

三角方法——

$\because \quad a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，

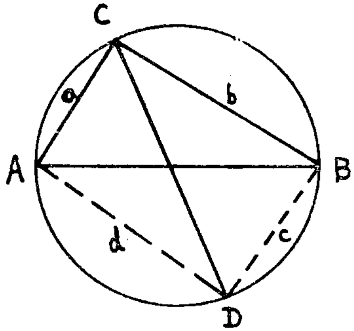
$\therefore \quad a\leqslant 1$，$\quad b\leqslant 1$，$\quad c\leqslant 1$，$\quad d\leqslant 1$；

设 $\quad a=\sin\alpha$，$\quad b=\cos\alpha$，$\quad c=\sin\beta$，$\quad d=\cos\beta$，

则　$ac+bd=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$$=\cos(\alpha-\beta)\leqslant 1$$，从而得证。

几何方法——如图3。




（图 3）

分别以$BC=b$，$AC=a$为直角边作$Rt\Delta ABC$。

∵　$a^2+b^2=1$，

∴　$AB=1$。

以$AB$为斜边，$AD=d$，$BD=c$为直角边在$AB$的另一侧画一$Rt\Delta ABD$，

∵　$\angle ACB=\angle ADB=90°$，

∴　$A$、$C$、$B$、$D$ 四点共圆。

根据托勒姆定理，则有

$$BD\cdot AC+BC\cdot AD=AB\cdot CD.$$

但　$CD\leqslant AB=1$（圆内任一弦，小于直径），

∴　$a\cdot c+b\cdot d\leqslant 1$。

说明：代数问题，有时可采用多种代数方法来求解。而对于某些代数题，如果能够由它的已知量之间的关系作出几何图形，即把“数”转化为“形”，那么就可以把代数问题转化为三角问题和几何问题，这样就可以用三角方法和几何方法来求解。如例1和例2。

应该指出的是，代数问题用几何方法来求解，它直观地反映了代数式各量之间的数量关系和内在联系，我们可以把它看作是所求解的代数问题的一种“几何解释”，它能帮助我们深刻地理解问题的意义。

顺便指出，例1和例2的问题既然已经作出了几何图形，那么它们也就可以用解析方法来求解。这请读者自己完成。

**例3** 在直角三角形中，$a$、$b$是直角边，$c$是斜边，求证：$\sqrt{2}\,c \geqslant a+b$.

证：代数方法——

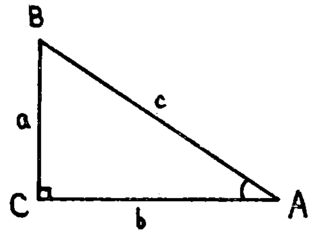
$\because\quad (a-b)^2 \geqslant 0,$

$\therefore\quad a^2+b^2 \geqslant 2ab,$

即 $\quad 2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2,$

$\therefore\quad \sqrt{2}\,c \geqslant a+b.$

（当 $a=b$ 时，等号成立）




（图4）

三角方法——如图4.

$\because\quad 0^\circ < A < 90^\circ,\qquad \therefore\quad -45^\circ < A-45^\circ < 45^\circ.$

由于 $\cos(A-45^\circ) \leqslant 1,$

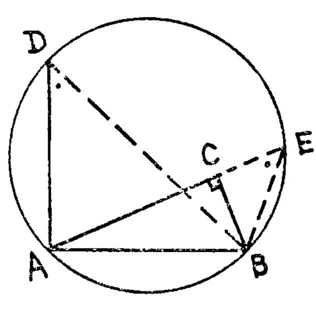
故 $\cos A\cdot\cos45^\circ + \sin A\cdot\sin45^\circ \leqslant 1.$

但 $\sin A = \dfrac{a}{c},\ \cos A = \dfrac{b}{c},$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right) \leqslant 1,$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\dfrac{b+a}{c}\right) \leqslant 1,$

$\therefore\quad \sqrt{2}\,c \geqslant a+b.$




（图5）

几何方法——如图5. 过$A$

点引 $DA \perp AB$，且使 $DA=AB=c$，连结 $BD$，则 $BD=\sqrt{2}\,c$．延长 $AC$ 至 $E$，使 $CE=CB$，则 $AE=a+b$．

∵ $\angle ADB=\angle AEB=45°$，

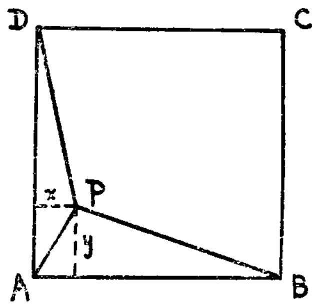
∴ $A$、$B$、$E$、$D$ 四点共圆．

又 $\angle BAD=90°$，

∴ $BD$ 是此圆的直径，它必定大于或等于弦 $AE$，

即 $\sqrt{2}\,c \geqslant a+b$．

**例 4** $P$ 是正方形 $ABCD$ 内的一点，已知 $PA=1cm$，$PB=3cm$，$PD=\sqrt{7}\,cm$，求正方形 $ABCD$ 的面积．



（图 6）

**解**：代数方法——如图 6．设正方形的边长为 $a$，$P$ 点到 $AD$、$AB$ 的距离分别为 $x$，$y$，则有

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots (1) \\ (a-x)^2+y^2=9 & \cdots\cdots (2) \\ x^2+(a-y)^2=7 & \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

（2）-（3）得

$$y-x=\frac{1}{a} \qquad \cdots\cdots (4)$$

（1）× 2 -（4）$^2$ 得

$$x+y=\sqrt{2-\frac{1}{a^2}} \qquad \cdots\cdots (5)$$

由（4）和（5），可求得

$$x=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\sqrt{2-\frac{1}{a^2}}\right),$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\sqrt{2-\frac{1}{a^2}}\right).$$

代入（2）整理，得

$$a^4-16a^2+50=0,$$

$$\therefore\quad a^2=8\pm\sqrt{14}\quad(cm^2).$$

因为共点的三个邻角 $\angle APB$、$\angle APD$ 和 $\angle DPB$ 中，至少有两个是钝角．如果 $\angle APB$ 为钝角，则 $a>3$ 即 $a^2>9$；如果 $\angle APD$ 为钝角，则 $a>\sqrt{7}$，即 $a^2>7$，故 $a^2=8-\sqrt{14}$ 应舍去．即正方形 $ABCD$ 的面积为 $8+\sqrt{14}$ 平方厘米．

几何方法——如图 7．引 $AE\perp AP$，且取 $AE=AP=1cm$，连结 $DE$、$PE$．

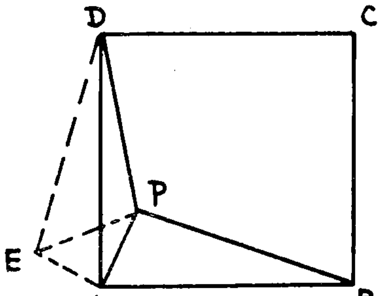
$\because\quad \angle DAE=\angle BAP$

（角的两边分别垂直），

$\therefore\quad \triangle ADE\cong\triangle ABP$．

故 $DE=BP=3$(cm)．

又 $\triangle AEP$ 是等腰直角三角形，



（图 7）

$$\therefore\quad \angle APE=45°,\qquad EP=\sqrt{2}\,(cm).$$

由于 $DE^2=9$，$EP^2=2$，$DP^2=7$，

$$\therefore\quad DE^2=EP^2+DP^2,$$

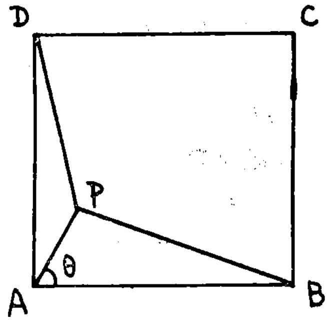
$$\angle EPD=90°,\qquad \angle APD=135°.$$

根据余弦定理，有

$$AD^2=AP^2+DP^2-2\cdot AP\cdot DP\cdot\cos 135^\circ$$
$$=1+7+\sqrt{14}=8+\sqrt{14}\ .$$

即正方形 $ABCD$ 的面积为 $8+\sqrt{14}$平方厘米。

三角方法——如图8。设正方形$ABCD$的边长为 $a$, $\angle PAB=\theta$ 。



（图 8）

根据余弦定 理, 在 $\Delta APB$ 中, 有

$$PB^2=AP^2+AB^2-2\cdot AP\cdot AB\cdot\cos\theta,$$

即 $$2a\cdot\cos\theta=a^2-8 \quad\cdots\cdots(1)$$

同理, 在 $\Delta APD$ 中, 有

$$PD^2=AP^2+AD^2-2\cdot AP\cdot AD\cdot\cos(90^\circ-\theta),$$

即 $$2a\cdot\sin\theta=a^2-6 \quad\cdots\cdots(2)$$

$(1)^2+(2)^2$ 得

$$4a^2=(a^2-8)^2+(a^2-6)^2,$$

整理得

$$a^4-16a^2+50=0,$$

$\therefore\quad a^2=8+\sqrt{14}$ （其中舍去$8-\sqrt{14}$）

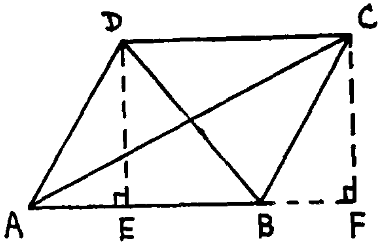
即正方形 $ABCD$ 的面积为 $8+\sqrt{14}$平方厘米。

说明：例 3 和例 4 若用解析方法，其推演和计算与代数方法基本相同。解析几何是借助坐标系，用代数方法来研究几何图形的性质。所以，用代数方法和解析方法来求解几何问题，虽然形式上有所不同，但其实质是一致的。解决几何问题，用解析方法较代数方法容易，且常常有成法可循，思

路比较清楚。故在下面的问题中，我们将采用几何方法、三角方法和解析方法来加以解决。

例 5　求证：平行四边形两条对角线的平方和等于相邻两边平方和的二倍。

证：几何方法——如图9．作$DE\perp AB$，$CF\perp AB$．根据勾股定理，有



（图 9）

$$AC^2=AF^2+CF^2$$
$$=(AB+BF)^2+(BC^2-BF^2)$$
$$=AB^2+BC^2+2\cdot AB\cdot BF \qquad \cdots\cdots (1)$$
$$BD^2=BE^2+DE^2=(AB-AE)^2+(AD^2-AE^2)$$
$$=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AE \qquad \cdots\cdots (2)$$

易知　$\Delta ADE\cong\Delta BCF$，

$\therefore$　$AE=BF$．

(1)＋(2) 得

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)．$$

三角方法——参看图9．令 $\angle ABC=\alpha$，$\angle DAB=\beta$．这时有　$\alpha+\beta=180°$，

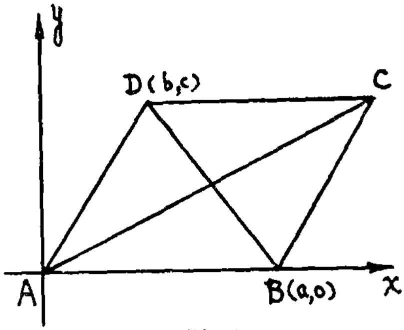
根据余弦定理，有

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$$
$$=AB^2+BC^2+2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\beta,$$
$$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\beta．$$

上面两式相加，便得

$$AC^2+BD^2=2\cdot(AB^2+BC^2).$$

解析方法——如图10。以$A$为原点，$AB$为$x$轴建立直角坐标系。设$B$点的坐标为$(a,0)$，$D$点的坐标为$(b,c)$，则$C$点的坐标为$(a+b,c)$，于是

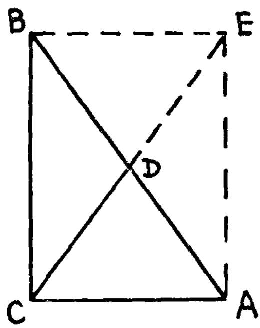


(图10)

$$|AB|=a,$$
$$|AD|=\sqrt{b^2+c^2},$$
$$|AC|=\sqrt{(a+b)^2+c^2},$$
$$|BD|=\sqrt{(a-b)^2+c^2},$$

$$\therefore\quad AC^2+BD^2=(a+b)^2+c^2+(a-b)^2+c^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2),$$
$$AB^2+AD^2=a^2+b^2+c^2,$$
故 $$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$$
$$=2(AB^2+BC^2).$$

**例 6** 求证：直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半。



(图11)

**证：** 几何方法——如图11. 延长$CD$至$E$，使$DE=CD$，连结$BE$、$AE$。

$\because\quad BD=DA,\ CD=DE,$

$\angle ACB=90°,$

$\therefore$ 四边形$ACBE$是一矩形。