運筹報导

（4）

中国科学院数学研究所
运筹学研究室主编

1978年9月

目录

关于数学规划的逼近问题及下半连续稳定性

陈光亚

（中国科学院数学研究所）

一、在实际问题中，由于测导的误差必然会使形成的数学规划模型与原来的问题有微小差别。另一方面，同样重要的是如果原问题的解决有困难，人们总是希望代替以新的，容易求解的模型而不致引起本质的变化。这样就引起了数学规划稳定性或近似理论的研究。它们的共同出发点是这样的。有下面两个规划，

$$P_1:\ \inf_{x\in A_1} f_1(x),\quad P_2:\ \inf_{x\in A_2} f_2(x) \qquad (1.1)$$

当 f_1 与 f_2，A_1 与 A_2 以某种"距离"邻近时，它们的最优解是否也以某种方式邻近？如果我们将规划 P 与其最优解集 $M(P)$ 的对应关系看成一个多值映象 M，问题就涉及此映象的上半连续及下半连续性。对于映象 M 的上半连续性已有很多的研究[4],[5],[6]。但是对其下半连续性的研究全都作了最优解是唯一的假设。然而从多值映象的观点来看，最优解是单点，则多值映象 M 的上半连续与下半连续是一致的。这样，可以说 M 的下半连续性至今还没有研究。这种现象似乎也是自然的。因为一个非常简单的数学规划，M 也可以不是下半连续的，例如图1显示的数学规划问题：在(1.1)中令 $A_t=[a,a+t]$

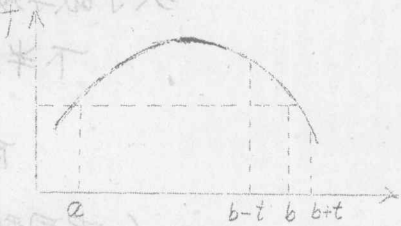
$t\in[-\alpha,\alpha]$，$0<\alpha<b-a$，

$f_t(x)=\varphi(x)$，$\forall t$，$\varphi(x)$ 在

整个数直线上连续，如图一，规

划 P_0 的最小解集 $M_0=\{a,b\}$。

而 $t\neq 0$ 时，P_t 的解集



（图一）

$M_t=\{b+t\}\ (t>0)$，$M_t=\{a\}\ (t<0)$，显然 M_t 在 $t=0$ 不是下半连续的。

从上面例子看来，使得 M 是下半连续（连续）的数学规划似乎是很稀少的。其实不然。本文证明了在一定条件下，全体数学规划的集合，合理定义了距离函数后，构成一个完备距离空间。而使得 M 具有某种连续性质的数学规划在此空间是处处稠密的。文中第三节处理一般数学规划（即单目标规划），第四节处理多目标规划[9]问题。我们处理方法类似于〔2〕中对多值映象不动点，〔3〕中对策论的平衡点的处理方法。本文第五节研究了凸规划的下半连续稳定性的问题，给出了一个下半连续稳定的充分必要条件。

二　设 X 是一个紧致的距离空间，其距离函数为 d，用 2^X 表示 X 的所有非空紧致子集的集合，在 2^X 上的 Hansdorft 距离是如下定义的：对于任意的 $\varepsilon>0$，及任意的 $A\in 2^X$，定义

$$U(\varepsilon,A)=\{x\mid x\in X,\ d(x,A)<\varepsilon\} \tag{2.1}$$

其中：$d(x,A)=\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$.

对于任意的 A，$B \in 2^X$，A与B之间的距离定义为：

$$\mathcal{D}(A,B)=\inf\{\varepsilon \mid A\subset U(\varepsilon,B),\ B\subset U(\varepsilon,A)\} \quad (2.2)$$

则 2^X 是带距离函数 $\mathcal{D}$ 的紧緻距离空间。

设 Y 是带距离函数 h 的距离空间，$F: Y \longrightarrow 2^X$，是 Y 到 X 的多值映象，即对任意 $y\in Y$，$F(y)\subset X$，是 X 的非空紧緻集，我们说 F 在点 $y\in Y$ 是上半连续的，如果对每个 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得当 $\eta\in Y$，$h(\eta,y)<\delta$，有

$$F(\eta)\subset U(\varepsilon, F(y)) \quad (2.3)$$

我们说 F 在点 $y\in Y$ 是下半连续的，如果对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\eta\in Y$，$h(\eta,y)<\delta$，有

$$F(y)\subset U(\varepsilon, F(\eta)) \quad (2.3)$$

我们说 F 在 $y\in Y$ 是闭映象，如果 $y_n\in Y$，$(n=1,2,\cdots)$，$y_n\longrightarrow y$，$x_n\longrightarrow x$，$x_n\in F(y_n) \Longrightarrow x\in F(y)$。我们说 F 在 $y\in Y$ 是开映象，如果 $y_n\in Y$，$(n=1,2,\cdots)$ $y_n\longrightarrow y$，$x\in F(y)$，存在序列 $\{x_n\}\in X$，$x_n\in F(y_n)$ $\forall n$，使得 $x_n\longrightarrow x$。我们知道当 X 是紧緻距离空间时，上述定义的 F 的上半连续性与 F 的闭性，F 的下半连续性与 F 的开性是等价的。

三、我们考虑具有抽象形式的数学规划问题，设 X 是紧

缴距离空间，f是定义在 X 上的连续函数，$R\in 2^X$，数学规划p具有如下形式：

$$p:\quad \min_{x\in R} f(x) \tag{3.1}$$

由于R是非空紧缴集，则这样形式的数学规划的最优解一定存在，并且数学规划p完全由函数f与约束集合R唯一确定，即由二元组(f,R)唯一确定，让定义在X上的全体连续函数形成的空间记为$C[X]$，定义$C[X]$上的距离函数ρ如下：对任意的$f,g\in C[X]$，

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)| \tag{3.2}$$

则$C(X)$是带距离函数ρ的完备距离空间，考虑乘积空间$C[X]\times 2^X$，定义下面的距离函数h：对于任意的(f,A)，$(g,B)\in C[X]\times 2^X$，

$$h((f,A),(g,B))=\rho(f,g)+\mathcal{D}(A,B) \tag{3.3}$$

则$C[X]\times 2^X$成为带距离函数h的完备距离空间。由于数学规划与$C[X]\times 2^X$中元素的一一对应关系，我们可以用$C[X]\times 2^X$来代替全体数学规划的集合$\mathcal{P}$，即$\mathcal{P}\equiv C[X]\times 2^X$，$\mathcal{P}$是一个带距离函数$h$的完备的距离空间，其每一个元素$p\in\mathcal{P}$表示一个确定的数学规划，让$p\in\mathcal{P}$，$p=(f,R)$，其对应的最优解集合记为$M(p)=\{x_0\in X\mid f(x_0)=\min_{x\in R} f(x)\}$，

显然，对任意的 $p\in\mathcal{P}$，$M(p)$ 是 X 的非空紧缀集，这就定义了多值映象 $M:\mathcal{P}\to 2^X$。

引理3.1．多值映象 M 在 $\mathcal{P}$ 上是上半连续的。

〔证〕：设 $p_n\to p$，$\bar{x}_n\to x_0$，$\bar{x}_n\in M(p_n)\ \forall n$．这里 $p_n=\{f_n,R_n\}$，因为 $\mathcal{P}$ 是 $C[X]\times 2^X$．其投形映象 T：$T(p)=R\in 2^X$，且 T 在 $\mathcal{P}$ 上是连续的映象。由 T 的上半连续性知，当 $p_n\to p$，$\bar{x}_n\to x_0$，$\bar{x}_n\in M(p_n)\subset R_n=T(p_n)$ 时，有 $x_0\in R=T(p)$。如果 $x_0\bar{\in} M(p)$．则在 $M(p)$ 中存在一点 x，使得 $f(x)<f(x_0)$。因为 $x\in M(p)\subset R=T(p)$．由 T 的下半连续性，可找到序列 $\{x_n\}$，$x_n\in T(p_n)=R_n\ \forall n$，使得 $x_n\to x$．由 f 的连续性及 $\bar{x}_n\to x_0$ 知，存在 N，当 $n\geq N$ 时，有 $f(x_n)<f(\bar{x}_n)$。由于 $p_n\to p$，得到 $\rho(f_n,f)\to 0$，即 $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\to 0$，则存在 $N_1\geq N$，当 $n\geq N_1$ 时，有 $f_n(x_n)<f_n(\bar{x}_n)$，但是对于任何的 n，有 $\bar{x}_n\in M(p_n)$ 是规划 p_n 的最小解．所以有 $f_n(x_n)\geq f_n(\bar{x}_n)$，此矛盾说明只能有 $x_0\in M(p)$，即多值映象 M 在 p 点是上半连续的。

定义．我们说 $x\in M(p)$ 是数学规划 p 的本质稳定最优解，简称本质稳定点，如果对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $q\in\mathcal{P}$，$h(p,q)<\delta$ 时有 $x\in U(\varepsilon,M(q))$．

对于本质稳定点的定义可以这样来了解。如果x是数学规划p的本质稳定点，则当数学规划序列$\{p_n\}$逼近p时，可找到序列$\{x_n\}$也逼近x，其中每个x_n是p_n的最优解，我们来证明，如果数学规划p的所有最优解都是本质稳定点，则多值映象M在p点也是下半连续的。

引理3.2. 数学规划p的所有最优解是本质稳定点的充分必要条件是p是多值映象M的连续点。

证. 必要性. 由引理1，只须证明M在p点是下半连续的即可。对于每一个$\varepsilon>0$，由于$M(p)$是非空紧致集. 则存在$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset M(p)$，有$M(p)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U(\frac{\varepsilon}{2},x_i)$。又由对$\forall_i$，$x_i$是$p$的本质稳定点，则存在$\delta>0$，当$q\in\mathcal{P}$，$h(p,q)<\delta$时，有$x_i\in U(\frac{\varepsilon}{2},M(q))$，$\forall i=1,2,\cdots,n$.

于是

$$M(p)\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(\frac{\varepsilon}{2},x_i)\subset U(\varepsilon,M(q)). \quad (3.4)$$

即M在p点是下半连续的.

充分性. 设M在p点是下半连续的. 则对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$q\in\mathcal{P}$，$h(p,q)<\delta$时有

$$M(p)\subset M(\varepsilon,M(q)).$$

由定义，$M(p)$的每一个点都是p的本质稳定点.

定理3.1. 对每一个数学规划$p\in\mathcal{P}$及任意的$\varepsilon>0$，总存在一个数学规划$q\in\mathcal{P}$，使得$h(p,q)<\varepsilon$，且q的每

个最优解都是本质稳定点，换言之，多值映象 M 的连续点在在空间 P 上是处处稠密的。

证。对于任意 $\varepsilon>0$，设

$$N(\varepsilon)=\left\{p\left|\begin{array}{l}p\in P,\text{对任意}\delta>0,\text{存在}q\in P\text{且}h(p,q)<\delta\\ \text{使得}M(p)\not\subset U(\varepsilon',M(q)),\ \forall\varepsilon',\ 0<\varepsilon'<\varepsilon\end{array}\right.\right\} \tag{3.5}$$

则 M 所有连续点集合可表示成

$$D=P-\bigcup_{\varepsilon>0}N(\varepsilon) \tag{3.6}$$

显然，如果 $\eta<\varepsilon$，有 $N(\varepsilon)\subset N(\eta)$，因此

$$D=P-\bigcup_{\eta>0}N(\eta) \tag{3.7}$$

其中 $\eta>0$ 通过全下的有理数。

由于 P 是完备距离空间，由 Baire 定理，欲证 D 在 P 上处处稠密，只须证明：对于每个 $\varepsilon>0$，$N(\varepsilon)$ 是在 P 上无处稠密即可。

(i) $N(\varepsilon)$ 是闭集。

让 $p\in\overline{N(\varepsilon)}$，对任意的 $\delta>0$，及任意的 $\varepsilon'<\varepsilon$，选择 ε_1 使得 $0<\varepsilon_1<\varepsilon-\varepsilon'$，由于 M 在 p 点是上半连续的，则存在 $\delta_1>0$，当 $q\in P$，$h(p,q)<\delta_1$ 时，有

$$M(q)\subset U(\varepsilon_1,M(p))。$$

可以假定 $\eta=\delta-\delta_1>0$，因为 $p\in\overline{N(p)}$，则存在

$q \in N(\varepsilon)$，使得 $h(p,q) < \delta_1$，于是

$$M(q) \subset U(\varepsilon_1, M(p))$$

因为 $q \in N(\varepsilon)$，对 $\eta > 0$，存在 $r \in P$，且 $h(p,q) < \eta$，使得

$$M(q) \not\subset U(\varepsilon'', M(r))$$

其中 $\varepsilon'' = \varepsilon_1 + \varepsilon' < \varepsilon$.

因此对于 $\delta > 0$，存在 $r \in P$，有

$$h(p,r) \leq h(p,q) + h(q,r) < \delta_1 + \eta = \delta$$

使得对 $\forall \varepsilon' < \varepsilon$.

$$M(p) \not\subset U(\varepsilon', M(r))$$

这证明了 $p \in N(\varepsilon)$，即 $N(\varepsilon) = \overline{N(\varepsilon)}$，$N(\varepsilon)$ 是闭集。

(ii) $N(\varepsilon)$ 在 P 上无处稠密.

因 $N(\varepsilon)$ 是闭集，只要证明 $N(\varepsilon)$ 不包含 P 的一个非空开子集即可。假若不然，设 $N(\varepsilon)$ 包含 P 的一个非空开子集 U. 我们选择的实数系 $\varepsilon_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots$，及 $\eta > 0$ 使得，

$$0 < \eta < \cdots < \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i < \cdots < \varepsilon_1 < \varepsilon$$

现选择 $p_1 \in U$，并假设 $p_i \in U$ 已选择，因 M 在 p_i 点是上半连续的，对于 $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} > 0$，存在 $\delta > 0$ 当 $q \in P$，$h(p_i, q) < \delta$ 时，有 $M(q) \subset U(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, M(p_i))$.
我们能够这样选择 $\delta > 0$，使 p_i 的 δ—邻域包含在 U 中，因为 $p_i \in N(\varepsilon)$，对于 $\delta > 0$，存在 $p_{i+1} \in P$ 且

$h(p_i, p_{i+1}) < \delta$ 使得

$$M(p_i) \not\subset U(\varepsilon_{i+1}, M(p_{i+1}))$$

于是我们选出 $p_{i+1} \in U$，使得

$$M(p_{i+1}) \subset U(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, M(p_i))$$

我们来证明当 $j > i$ 时 有

$$M(p_i) \not\subset U(\varepsilon_j, M(p_j)) \tag{3.8}$$

因为当 $j = i+1$ 时 (3.8) 是正确的. 设 $j > i$ 是正确的而对 $j+1$ 不正确. 即有 $M(p_i) \subset U(\varepsilon_{j+1}, M(p_{j+1}))$。利用 $M(p_{j+1}) \subset U(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}, M(p_j))$ 得到 $M(p_i) \subset U(\varepsilon_j, M(p_j))$ 这与假设矛盾. 因此，当 $i \neq j$ 时 或者有 $M(p_i) \not\subset U(\varepsilon_j, M(p_j))$ 或者有 $M(p_j) \not\subset U(\varepsilon_i, M(p_i))$，即是当 $i \neq j$ 时

$$\mathcal{D}(M(p_i), M(p_j)) \geq \min\{\varepsilon_i, \varepsilon_j\} > \eta > 0 \tag{3.9}$$

于是序列 $\{M(p_i)\} \subset 2^X$ 没有收敛子序列，这与 2^X 是紧致距离空间矛盾. 这就证明了 $N(\varepsilon)$ 在 P 上 是无处稠密的

定理1说明了使得多值映象 M 是下半连续的数学规划在所有数学规划构成的完备距离空间中是处处稠密的。

关于数学规划的逼近问题，[7] 中得到下面的结果. 如果用一个数学规划去近似表示原来的数学规划，则新的数学规划的 ε—最优解是原规划的 ε_1—最优解. ε_1 是由 ε 及两个

规划目标函数值之差的上下界决定（当约束集合不变时）。〔7〕中未接触到最优解的逼近问题，现在的问题是一个数学规划的所有最优解是本质稳定点具有甚么特征？当 $M(p)$ 是单点时，我们有如下的定理。

定理3.2　数学规划 p 的最优解是唯一的，则此最优解是本质稳定点。

证：由引理1，多值映象 M 在 P 点是上半连续的，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $q\in P$，$h(p,q)<\delta$ 时有

$$M(q)\subset U(\varepsilon,M(p))$$

由于 $M(p)$ 是单点，则又有

$$M(p)\subset U(\varepsilon,M(q)).$$

由定义，则 $M(p)$ 是本质稳定点。

四、设 S 是 R_m 上的开凸锥，则 $S\cup\{0\}$ 在 R_m 上定义了一个偏序"$\succ_s$"。考虑下面多目标规化问题[8]。（向量极值问题）。

$$p:\quad \max_{x\in R} f(x)\qquad (VMP)\qquad (4.1)$$

其中 R 为紧缴距离空间 X 的非空紧缴集，$R\in 2^X$，$f=(f_1,\cdots,f_m)$ 是 X 到 R_m 的连续映象，$f_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 是 X 上的连续函数，由〔9〕中定理3.1知，多目标规划（4.1）弱有效解（有效解）一定存在，我们将所有的多目标规划（4.1）组成的集合记为 P，而 P 中每一元素被 $m+1$ 元组

$(f_1,\cdots,f_m,R)$ 唯一决定，则

$$\mathcal{P}\equiv C[X]\times\cdots\times C[X]\times 2^X \qquad (4.2)$$

其中 $C[X]$ 是 m 次笛卡儿乘积。此乘积空间 $\mathcal{P}$ 是带距离函数 h 的完备距离空间。h 定义如下：设 $(f_1,\cdots,f_m,A)$，$(g_1,\cdots,g_m,B)\in\mathcal{P}$，

$$h((f_1,\cdots,f_m,A),(g_1,\cdots,g_m,B))=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\rho(f_i,g_i)+\mathcal{D}(A,B) \qquad (4.3)$$

其中 ρ 是 $C[X]$ 上的均匀收敛距离函数，$\mathcal{D}$ 是 2^X 上的 Hausdorff 距离，对于任意的多目标规划 $p\in\mathcal{P}$。由〔9〕中引理 3.1 知 $M(p)$ 是非空紧致集，这就定义了一个多值映象 $M:\ \mathcal{P}\to 2^X$。

引理 4.1 多值映象 M 在 $\mathcal{P}$ 上是上半连续的。

证：设 $p_n\to p$，$\bar{x}_n\to x_0$，$\bar{x}_n\in M(p_n)$ $\forall n$，这里 $p_n=(f_1^{(n)},\cdots,f_m^{(n)},R_n)$，$p=(f_1,\cdots,f_m,R)$ 因为 $\mathcal{P}\equiv C[X]\times\cdots\times C[X]\times 2^X$ 是乘积空间，其投影映象 T：$\mathcal{P}\to 2^X$，$T(p)=R\in 2^X$ 在 $\mathcal{P}$ 上是连续的。由 T 的上半连续性知 $x_0\in R=T(p)$。如果 $x_0\bar{\in}M(p)$，则存在一点 $x\in R$ 使得有 $(f_1(x),\cdots,f_m(x))\neq(f_1(x_0),\cdots,f_m(x_0))$，且 $(f_1(x),\cdots,f_m(x))\geq_S(f_1(x_0),\cdots,f_m(x_0))$。即 $(f_1(x),\cdots,f_m(x))-(f_1(x_0),\cdots,f_m(x_0))=s\neq 0$，$s\in S\setminus\{0\}$.

再由T的下半连续性，则可以找到序列 $\{x_n\}$，$x_n \in T(p_n) = R_n \ \forall n$，使得 $x_n \to x$。因为 $S \setminus \{0\}$ 是开集，则存在 S 的一个邻域 $V(S) \subset S \setminus \{0\}$，由于 $f_i \ i=1,2,\cdots,m$，的连续性及 $x_n \to x \quad \bar{x}_n \to x_0$。则存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时有

$$(f_1(x_n),\cdots,f_m(x_n)) - (f_1(\bar{x}_n),\cdots,f_m(\bar{x}_n)) \in V(S) \subset S \setminus \{0\}.$$

又由于 $p_n \to p$。得到

$$(f_1^{(n)},\cdots,f_m^{(n)}) \to (f_1,\cdots,f_m).$$

则存在正整数 $N_1 \geq N$，使得当 $n \geq N_1$ 时有

$$(f_1^{(n)}(x_n),\cdots,f_m^{(n)}(x_n)) - (f_1^{(n)}(\bar{x}_n),\cdots,f_m^{(n)}(\bar{x}_n)) \in V(S).$$

这样就有 $(f_1^{(n)}(\bar{x}_n),\cdots f_m^{(n)}(\bar{x}_n)) \neq (f_1^{(n)}(x_n),\cdots,f_m^{(n)}(x_n))$，且 $(f_1^{(n)}(x_n),\cdots f_m^{(n)}(x_n)) \succ_S (f_1^{(n)}(\bar{x}_n),\cdots,f_m^{(n)}(\bar{x}_n))$。但是由于 $x_n \in R_n$，$\bar{x}_n \in M(p_n)$。这是不可能此矛盾说明 $x_0 \in M(p)$，即 M 在 p 点是上半连续的。

定义2. 我们说 $x \in M(p)$ 是多目标规划 p 的本质稳定弱有效解，如果对每一个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $g \in P$，$h(p.g) < \delta$ 时，有 $x \in U(\varepsilon, M(g))$。

证明了引理4.1后，我们同样可以建立类似引理3.2，定理3.1，3.2的结果，证明方法是同样的。

引理4.2. 多目标规划 p 的所有弱有效解是本质稳定弱

有效解的充分必要条件是 p 是多值映象 M 的连续点。

定理4.1 对每一个多目标规划 $p\in \mathcal{P}$ 及任忌的 $\varepsilon>0$，总存在一个多目标规划 $q\in \mathcal{P}$，使得 $h(p,q)<\varepsilon$，且 q 的每一个弱有效解都是本质稳定弱有效解。换言之，多值映象 M 的连续点在空间 $\mathcal{P}$ 上是处处稠密的。

定理4.2 多目标规划 p 的弱有效解是唯一的，则此弱有效解是本质稳定弱有效解。

五．考虑如下的带参数的凸规划：

$$\inf_{x\in C(t)} h(x,t) \tag{5.1}$$

其中 $t\in T$，T 是连通的距离空间。$\forall t\in T$，$C(t)\in R^n$ 是凸子集，不失一般性可假定 $h(x,t)$ 是 x 的真凸函数（本节所用术语及符号可参看〔8〕）。

令 $f_t(x)=h(x,t)+\delta(x\mid C(t))=\begin{cases} h(x,t), & x\in C(t)\\ +\infty, & x\bar{\in} C(t)\end{cases}$

显然，问题（5.1）等价于下面的无约束凸规划问题：

$$\inf_{x\in R^n} f_t(x) \qquad t\in T \tag{5.2}$$

在规划问题（5.2）中，对每一个 $t\in T$，对应了一个最优解集 $\Gamma(t)$，从而构成了一个多值映象 $\Gamma_t:\ t\longrightarrow \Gamma(t)\subset R^n$。

设 $f_t(x)$ 是 x 的闭的真凸函数，它的共轭函数

$f_t^*(x^*) = \sup_x\{<x, x^*> - f(x)\}$，由〔8〕定理 12.2 知，$f_t^*(x^*)$ 是 X^* 的闭的真凸函数。

设 $C \subset R^n$ 是凸子集，C的支持函数 $\delta^*(x^*|C) = \sup\{<x, x^*> | x \in C\}$。

我们知道，当 $f(x) = \delta(x|C)$ 是 C 的指示函数时，$f^*(x^*) = \delta^*(x^*|C)$。

$f(x)$ 是 R^n 到 $[-\infty, +\infty]$ 上的任意函数，$f'(x, y)$ 表示 $f(x)$ 在 x 点关于向量 y 的方向导数。

引理 2.1. 设 $f(x)$ 是 R^n 上闭的真凸函数，$f(x)$ 的下确界有限，且可以达到，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对每一个 $x \in \{x | f(x) \leq \inf f + \delta\}$，均存在一个 $z \in U(x, \varepsilon)$ $(U(x, \varepsilon) = \{z \mid |z - x| < \varepsilon\})$，使得 $f(z) = \inf f$，则 $f(x)$ 的最小解集是非空闭有界凸集。

证：参看〔8〕定理 27.2。

引理 2.2. 设 $A \subset R^n$ 是有界吸收集*（Absoorbing）$A^\circ = \{x^* | <x, x^*> \leq 1, x \in A\}$，则 A° 是闭集，且任意包含A的闭集，必然也包含 A°。

证：显然 A° 是闭集，设任一闭集 $N \supset A$，如果存在 $x^* \in A^\circ$，$x^* \in N$，由于A是吸收集，则存在 $\bar{x} \in A$，及

---

* A为吸收集，如果对 $\forall x \in R^n$，$\exists \varepsilon > 0$，有 $\alpha x \in A$，$\forall \alpha$，$0 < |\alpha| < \varepsilon$。

$\alpha>0$，有 $x^*=\alpha\bar{x}$，同时因 $x^*\in N$，而 $A\subset N$，必有 $\alpha>1$。但是对于 $\forall x\in A$，有 $\langle x, x^*\rangle=\langle x,\alpha\bar{x}\rangle=\alpha\langle x,\bar{x}\rangle\leq 1$。令 $x=\bar{x}$，则 $\alpha\langle\bar{x},\bar{x}\rangle\leq 1$，得 $\alpha\leq 1$，这与 $\alpha>1$ 矛盾。只能有 $x^*\in N$。此矛盾说明 $A^\circ\subset N$。

定理1. 设对于 t_0 的某个邻域 $V(t_0)$，$\forall t\in V(t_0)$，$f_t(x)$ 满足引理1的条件，且 $\bigcup\limits_{t\in V(t_0)}\Gamma(t)$ 是有界闭集，则多值映象 Γ_t 在 $t=t_0$ 点是下半连续（看〔1〕）的充分必要条件是对每一个 $y\in R^n$，$f_t^{*'}(0,y)$ 在 t_0 点是 t 的下半连续函数。

证. 必要性. 设多值映象 Γ_t 在 t_0 点是下半连续的，对任意的 $\varepsilon>0$，及固定的 y，令 $U=\{x|\langle x,y\rangle>f_{t_0}^{*'}(0,y)-\varepsilon\}$。显然 U 是 R^n 的开子集，由〔8〕定理 27.1（g）及 $f_{t_0}^{*'}(0,y)$ 是闭函数，知 $f_{t_0}^{*'}(0,y)=\delta^*(y|\Gamma(t_0))=\sup\{\langle x,y\rangle|x\in\Gamma(t_0)\}\geq f_{t_0}^{*'}(0,y)$，则存在 $x\in\Gamma(t_0)$ 有 $\langle x,y\rangle>f_{t_0}^{*'}(0,y)-\varepsilon$。$\varepsilon>0$ 是任意实数，这说明 $U\cap\Gamma(t_0)\neq\phi$。因为 Γ_t 在 t_0 是下半连续的，则存在 t_0 的邻域 $U(t_0)\subset V(t_0)$，对 $\forall t\in U(t_0)$ 有 $\Gamma(t)\cap U\neq\phi$，即存在 $x_t\in\Gamma(t)$，有 $\langle x_t,y\rangle>f_{t_0}^{*'}(0,y)-\varepsilon$。也即 $\forall t\in U(t_0)$，有 $f_t^{*'}(0,y)>f_{t_0}^{*'}(0,y)>f_{t_0}^{*'}(0,y)-\varepsilon$，这说明 $f_t^{*'}(0,y)$ 在 t_0 点是