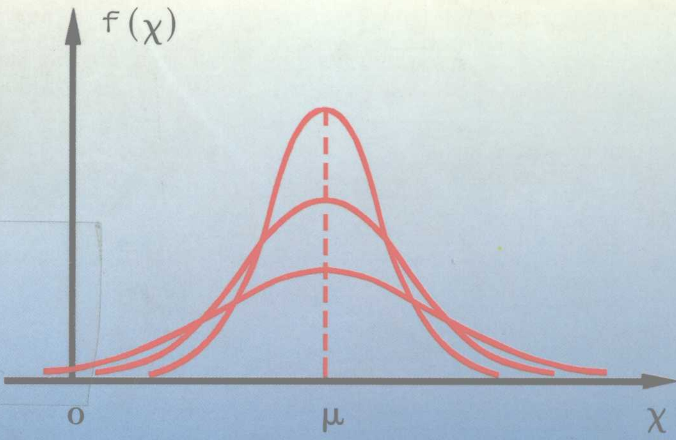
工程数学

——线性代数与概率统计

郁时炼　王俊海　吴建国　主编



安徽大学出版社

工程数学

—线性代数与概率统计

郁时炼　王俊海　吴建国　主编

安徽大学出版社

工 程 数 学

——线性代数与概率统计

郁时炼　王俊海　吴建国　主编

安 徽 大 学 出 版 社 出 版 发 行
（合肥市肥西路 3 号　邮编 230039）
中国科学技术大学印刷厂印刷　新华书店经销

开本 850×1168　1/32　印张 10.5　字数 228 千
1998 年 11 月第 1 版　1998 年 11 月第 1 次印刷
印数 9000 册

特约编辑 杜先能　责任编辑 李　虹　封面设计 孟献辉

ISBN 7－81052－192－6/O·12　定价 11.00 元
如有印装质量问题，请与出版社联系调换

序

自从第二次世界大战以来，数学在社会生活中的作用发生了革命性的变化。计算机的发展，使数学的方法得以转化为先进的数学技术，转化为现实的生产力和竞争力。这种变化首先在军事领域显示出意想不到的威力，然后才迅速传播到经济、社会的各个领域，在军事上也已深入到武器、装备、通讯、指挥、后勤、管理等方方面面。所以现代化的国防已离不开先进的数学，各种人才都需要有良好的数学素养。过去有人把应付考试作为数学课的目的，早已不符合时代要求。学数学不但是长知识，更是长才智。因此对教员、教材和教学方法的要求也提高了。

军队指挥院校的专科，迫切需要适合学员实际情况的教材。由于教学时数比较少，必须突出重点，讲概念注重实例，讲方法注重实用。随着教学条件的改善，还可辅以计算机实验，让学员看到形象的演示，得到活用的体验，既节省时间，又增进兴趣，同时还提高了动手能力。数学教育处于改革时期，军校也不例外。

《工程数学》是与《高等数学》（微积分）并列的基

础课，主要内容是线性代数和概率统计，都是信息时代最常用的数学工具。这本教材是由空军后勤学院、汽车管理学院和蚌埠坦克学院合作编写的，它吸收了近年来军校数学课教改的成果，是三所院校数学教员丰富的教学经验的结晶。它及时地满足了当前的需要，相信会对全军院校数学教育的发展起到很好的作用。

姜伯驹

1998.6

编者的话

1997年9月,在南京召开的首届军队院校数学课程教学改革研讨会上,不少代表谈到初级指挥院校专科的《工程数学》课程一直采用地方院校的相应教材,其重点、难点以及选用的例题、习题与我们军校的实际情况和教学要求有着很多不相适应的地方,以致给教学工作带来不少困难。为了贯彻军委新时期军事战略方针,增强质量建军的观念,切实提高军校专科《工程数学》的教学质量,空军后勤学院、汽车管理学院和蚌埠坦克学院在总参军训部和三校领导的鼓励与支持下,在蚌埠协作中心的协调下,决定合作编写《工程数学》教科书。

《工程数学》是我军初级指挥院校专科的一门重要的基础课,它对培养学员的文化素质和应用能力起着重要的作用。我们根据总参军训部颁发的《基础课程教学基本要求》,参照国家教委的有关意见,从初级指挥院校的实际情况出发,体现专科教育的特色,不强调严格、细致的数学推导,而强调如何理解基本概念、如何掌握基本方法,侧重于分析问题和解决问题,这就是我们编写的指导思想。在教材内容的选取上注意主次分明、深浅得当并吸收最新的教改成果;对基本概念、基本方法和基本理论的叙述力求阐明它们的客观背景和实际意义,便于学员理解和自学;本书还重视基本运算和基本技能的训练,尽量减少抽象的逻辑证明;较多地选取了应用于军事、指挥和科学管理等方面的例题和习题。在体系结构上,本着

优化的原则，精选内容、避免不必要的重复。每节后附有习题，书末附有参考答案。全书教学时数为60—80课时，带*号的内容可供不同专业选用。

中科院院士姜伯驹教授不仅在百忙中为本书审稿并撰写序言，而且在编写过程中，不断提出宝贵的意见和建议，使我们受益匪浅。在这里，我们向他致以衷心的感谢。同时我们还要向所有帮助过本书出版的部门和同志致谢。总之，没有他们的帮助，本书难以付梓。

本书上篇为线性代数，含四章；下篇为概率统计，含五章。上篇前三章由蚌埠坦克学院编写；后一章及下篇后两章由汽车管理学院编写；下篇前三章由空军后勤学院编写。主编为郁时炼、王俊海和吴建国（排名不分先后），主审为袁新生、许依群和贾高（排名不分先后），参加编写的还有黄昭强、廖大庆、袁新生和许依群，全书由许依群统稿。解一般线性方程组的C语言源程序由奚和平完成。限于作者的水平，缺点和错误在所难免，恳请广大读者不吝赐教，以便再版时修订。

《工程数学》编写组　98.6.

目　　录

上篇　线性代数

第一章　行列式

本章将从解线性方程组入手引出二阶和三阶行列式，并把行列式的概念推广到 n 阶中去，进而讨论 n 阶行列式的性质和计算.最后介绍一种用行列式求解线性方程组的重要方法——克莱姆法则.

§1.1　二阶和三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

对(1.1)式利用加减消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{1.2}$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，(1.1)式的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

但(1.3)式不易记忆，应用时不方便.于是就引出了用符号来表示(1.3)式的结果，记

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

把(1.4) 式右边叫做**二阶行列式**. a_{11},a_{12}所在之位置叫做它的第一行;a_{11},a_{21}所在之位置叫做它的第一列(即横的叫行,纵的叫列) .行列式中的数又称为行列式的**元素**,如 a_{12}称为第一行、第二列上的元素.从(1.4)式得知,二阶行列式就是由其所有元素之间经特定的运算之后而得到的一个数.即从左上角到右下角的对角线(**主对角线**)上两个元素的乘积减去右上角到左下角的对角线(**次对角线**)上两个元素的乘积.如

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1\times5-(-2)\times3=11;$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\sin^2 x-(-\cos^2 x)=1.$$

这样一来,(1.3)式就可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.5}$$

若记$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

其中 D 是由(1.1) 式中 x_1,x_2 的系数组成的，称为**系数行列式**，D_1 是把 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 相应换成(1.1)式的常数项 b_1,b_2；而 D_2 则用常数项相应去换 D 中 x_2 的系数.

因此，线性方程组(1.1)式的解又可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

这样用二阶行列式来表达(1.1)式的解，既整齐又好记.

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases}2x-y=-2\\ x+3y=4.\end{cases}$$

解　因

$$D=\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=2\times3-(-1)\times1=7\neq0,$$

故方程组有解

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2&-1\\4&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}}=\frac{-2}{7},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&-2\\1&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}}=\frac{10}{7}.$$

再看三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.6}$$

用加减消元法可类似得到

$$Dx_1=D_1,\quad Dx_2=D_2,\quad Dx_3=D_3\tag{1.7}$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{33}a_{12}$$

$$+ a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} \tag{1.8}$$

$$D_1 = b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{32}a_{23} + b_2a_{32}a_{13} - b_2a_{33}a_{12}$$
$$+ b_3a_{23}a_{12} - b_3a_{22}a_{13}, \tag{1.9}$$

$$D_2 = a_{11}b_2a_{33} - a_{11}b_3a_{23} + a_{21}b_3a_{13} - a_{21}a_{33}b_1$$
$$+ a_{31}a_{23}b_1 - a_{31}b_2a_{13}, \tag{1.10}$$

$$D_3 = a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}a_{32}b_2 + a_{21}a_{32}b_1 - a_{21}b_3a_{12}$$
$$+ a_{31}b_2a_{12} - a_{31}a_{22}b_1. \tag{1.11}$$

故当 $D\neq0$ 时,则由(1.7)式得到

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{1.12}$$

类似于(1.4) 式,我们用下列符号来记(1.8)式右边运算的结果,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

上式右边的符号称为**三阶行列式**.

三阶行列式的计算可由一个所谓的“对角线法”来说明:

将行列式中的 9 个元素当作 9 个点,主对角线上三点之积 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 以及底边平行于主对角线的两个等腰三角形的三顶点之积 $a_{21}a_{32}a_{13}$ 与 $a_{31}a_{23}a_{12}$ 这三积之和,再减去次对角线上三点之积 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 以及底边平行于次对角线的两个等腰三角形的三顶点之积 $a_{21}a_{33}a_{12}$ 与 $a_{11}a_{32}a_{23}$ 的三积之和.如下图所示:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \to + \\ \to + \\ \to + \end{matrix} \qquad \begin{matrix} - \leftarrow \\ - \leftarrow \\ - \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

其实,三阶行列式也可以化为二阶行列式来计算,如(1.8)式可表示为

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{33}a_{12} - a_{32}a_{13}) \\ &\quad + a_{31}(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

例 2　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　$$\begin{aligned} D &= 1\times1\times5+3\times9\times1+8\times(-4)\times1-8\times1\times1 \\ &\quad -3\times5\times1-1\times9\times(-4) \\ &= 5+27-32-8-15+36=13. \end{aligned}$$

或　$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1\times\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} + 8\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 1\times41-3\times(-4)+8\times(-5) = 13. \end{aligned}$$

有了三阶行列式后,(1.12)式就可以整齐地表示为: