高等财经院校“十一五”精品系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

郝秀梅　陈晓兰　主编

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校“十一五”精品系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

郝秀梅　陈晓兰　主编

经济科学出版社
Economic Science Press

责任编辑：吕　萍　张建光
责任校对：杨晓莹
版式设计：代小卫
技术编辑：邱　天

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郝秀梅，陈晓兰主编．—北京：经济科学出版社，2009．4
（高等财经院校“十一五”精品系列教材）
ISBN 978－7－5058－7893－8

Ⅰ．线…　Ⅱ．①郝…②陈…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材　Ⅳ．0151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 009260 号

线性代数
郝秀梅　陈晓兰　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www. esp. com. cn
电子邮件：esp@ esp. com. cn
汉德鼎印刷厂印刷
永胜装订厂装订
787×1092　16 开　16.5 印张　300000 字
2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷
印数：0001—5000 册
ISBN 978－7－5058－7893－8　定价：24.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

总　序

21 世纪最短缺的是什么？人才。

大学是以人才培养和科学研究为己任，大学教育说到底是一种人文教育，大学是养育人文精神的地方。尽管科学研究是当今评价一所大学水平和地位的重要内容，但是，支撑科学研究的基础是人才的培养。一所大学要培养出优秀的、具有国际化和市场竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，就不可能有高水平的高等教育；没有高质量的人才培养，就不可能产生一流或特色鲜明的大学。中国的大学教育已从往日的“精英教育”走向“大众教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提高？教材建设的功能愈显重要。

一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。尤其是在当今知识爆炸的21 世纪。为了提高教学质量，深化教学改革，山东财政学院启动了“十一五”精品教材建设工程。该项工程以精品课程教材建设为目标，以重点学科（专业）培育为基础，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十一五”精品系列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。为保证编写质量，本系列教材从选题、立项到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关，突出财经特点，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务。两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材将各学科领域最新教学与研究成果进行提炼、吸收，实现了教

学、科研结合的大学教育目标。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，我们在教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示了当今社会发展的新理论、新方法和新成果。

本系列教材是山东财政学院教学质量与教学改革工程建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授和专家多年教学的经验和心血，是大家共同努力的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

高等财经院校“十一五”精品系列
教材建设委员会
2009 年元月

前　　言

任何一门课程的内容都不是固定不变的．但是，在一般情况下，任何一门课程的内容又都是相对稳定．《线性代数》作为高等财经院校一门重要的学科共同基础课，它的内容也是这样的．《线性代数》从总的内容来说，虽然大同小异，但对教材的不同处理还是有着较大的差异．一本较适用的线性代数教材一方面应当具有足够的理论深度，以满足现代经济理论研究发展的需要；另一方面又尽可能由浅入深，使初学者感到入门并不难，从而提高深入掌握其理论和基本方法的信心．基于此，根据国家教委《高等学校经济管理学科数学基础教学大纲》的要求，结合多年的教学研究实践，在此基础上编写了这本教材．

本书是山东省精品课程《线性代数》的建设成果之一．全书共分六章，内容涉及行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等知识．

针对高等学校财经类专业的教学内容和课程体系改革总体目标要求，为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强．我们在编写这套教材时主要考虑了以下几个问题：

1. 在编写过程中，除注意线性代数本身的科学性、系统性和严密性外，还特别注意了可接受性、条理性、通俗性和前后的连贯性，力求以通俗的语言向读者介绍线性代数最基础的知识．例如，在理论的阐述、概念的引入方面，要符合人的认识规律．如何把线性代数中各种抽象概念阐述得通俗易懂，使缺乏抽象数学训练的低年级学生能较好地接受这些概念，是我们编写本书时着重考虑的一个问题．对个别冗长、烦琐的推理则略去，而更突出有关理论、方法的应用．

2. 在编写本教材时，体现了内容与实际要求的协调统一，适度地引入考研数学试题作为例题与习题，可以使学生在学习基本知识的过程中接受或接触到比较综合性的知识考查形式，提高了本书的适应性；同时，也加强了习题与正文内

容的协调性和针对性，注意了考研大纲变化的要求和专业后续课程的需要，教材各章均配备了A、B两部分不同类型、不同难度、不同要求的习题. A部分习题的水平就已符合本课程基本要求，B部分习题的难度要大一些，主要是为那些渴望再进一步提高的学生准备的. 各章中打有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的专业或学生编写的，可以作为选学内容或学生自学用.

3. 重视对数学思想的渗透以及对数学方法的介绍和应用. 附录一通过介绍数学应用软件与数学实验内容，目的是让学生了解线性代数有关知识的具体应用，培养学生的数学分析思维方式，提高学生分析问题、解决问题的能力，为学生学习与掌握现代科学理论，特别是现代经济理论，从事经济研究，提供了有用的方法和工具. 附录二引入了线性代数的发展历程，目的是让学生深切体会到科学的发展是需要科学家不懈的努力和探索，引导、启发学生学好该门课程的兴趣.

本书是山东财政学院“十一五”重点精品教材建设项目，由财政学院郝秀梅教授、陈晓兰教授任主编，具体分工如下：郝秀梅编写第1章、第4章，刘蒲凰、马玉林编写第2章，刘纪芹编写第3章，陈晓兰编写第5章，刘太琳编写第6章，韩建新编写附录. 本教材由郝秀梅负责总体框架结构、大纲制定、全书统稿及审定.

在本书的编写过程中我们参阅并借鉴了相关的文献资料，并得到了同行专家的指导与帮助，在此表示衷心的感谢. 特别感谢经济科学出版社的编辑们和山东财政学院教务处的有关领导和老师的大力支持.

由于编者水平所限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2009年元月

目　录

第 1 章　行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算．此外，介绍用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组的克莱姆（Cramer）法则．通过本章的学习，让学生理解行列式的定义、熟练掌握行列式的性质以及几种常见行列式的计算方法，会用克莱姆法则求解特殊的线性方程组．

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶、三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中产生的．所谓线性方程组，是指未知量的最高次数是一次的方程组．在中学代数中我们已学过解二元、三元线性方程组，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

用同样方法消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有惟一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为了便于记忆，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

这样，规定的记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式，它含有两行、两列，横写的称为行，竖写的称为列．行列式中，数 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 称为行列式的元素，第一个下标 i 表示这个元素位于第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示此元素位于第 j 列，称为列标．如 a_{21} 就是第二行第一列上的元素．

从上述得知，二阶行列式是这样两项的代数和，分别是：从左上角到右下角的对角线（又称为行列式的主对角线）上两元素的乘积，取正号；从右上角到左下角的对角线（又称为次对角线）上两元素的乘积，取负号．为了方便记忆二阶行列式的这两项，我们用画线的方法，即实线（主对角线）上元素的乘积减去虚线（次对角线）上元素的乘积（见图 1－1）.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1－1

例 1.1.1 计算二阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - (-2) \times 5 = 18.$

例 1.1.2 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$，问：当 λ 为何值时 $D \neq 0$?

解 因为 $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$，当 $(\lambda-2)(\lambda+1) \neq 0$ 时，$D \neq 0$. 即当 $\lambda \neq -1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时，$D \neq 0$.

根据二阶行列式定义，（1－2）式两个分子、分母可分别写成：

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

如果我们记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时方程组（1－1）的惟一解（1－2）可以写成：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1.1.3　解线性方程组 $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2. \end{cases}$

解　因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$，

所以，方程组的惟一解为：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-3}{-1}=3,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{-1}=-1.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1-4}$$

同前面一样，为便于记忆，我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-5}$$

称为三阶行列式．它含有三行三列，是六项的代数和．这六项我们可用对角线法则来记忆，如图 1－2 所示．实线上三个元素的乘积组成的三项取正号，虚线上三个元素的乘积组成的三项取负号，这种方法称为三阶行列式的对角线展开法．

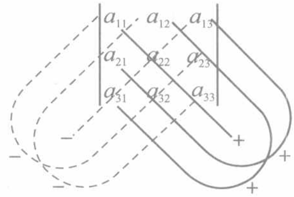

图 1－2

值得注意的是：上述对角线展开法仅适用于三阶及三阶以下的行列式计算，对于三阶以上的行列式计算，不能使用此对角线展开法.

例 1.1.4 当 λ 为何值时，$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$?

解 $D=\lambda\times\lambda\times1+1\times1\times0+0\times1\times0-0\times\lambda\times0-\lambda\times0\times1-1\times1\times1$
$=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$,

由 $D=0$，得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$. 因此，当 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$ 时，$D=0$.

用消元法解方程组（1-4），可以得到与方程组（1-1）类似的结论，记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

将 D 中第 1、第 2、第 3 列分别换成常数项列 b_1、b_2、b_3 得到的行列式记为 D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时，方程组（1-4）有惟一解，这个解可写成如下的表达式：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.5 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\ x_2-2x_3=-3,\\ 5x_1-2x_2+7x_3=22,\\ 2x_1-5x_2+4x_3=4.\end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 5 & -2 & 7\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}=63\neq0,\ D_1=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 22 & -2 & 7\\ 4 & -5 & 4\end{vmatrix}=63,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 5 & 22 & 7\\ 2 & 4 & 4\end{vmatrix}=123,\ D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 22\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}=189.$$

所以，方程组的惟一解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

有了二阶与三阶行列式，我们可以把 $D\neq 0$ 时的方程组（1－1）及（1－4）的解很简单地用公式表达出来．但在实际问题中往往遇到未知量个数不止三个的线性方程组，那么在解这类线性方程组时，自然会想到它的解是否也能有类似的表达式？为此我们需要将二阶、三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念．

1.1.2 排列与逆序

定义 1.1.1 由 1，2，…，n 组成一个有序数组，称为一个 **n 级排列**．

例如，132 是一个 3 级排列，4132，2143，1234 都是 4 级排列．

在中学代数中已知，由 1，2，…，n 所组成的 n 级排列共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 21=n!$ 个．

定义 1.1.2 在一个 n 级排列中，如果较大的数排在较小的数前面，则称它们构成一个**逆序**，一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**．

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$．

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．

例如，排列 4132 中，4 与 1，4 与 3，4 与 2 和 3 与 2 各构成一个逆序，共有 4 个逆序，即 $N(4132)=4$，这是一个偶排列．排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，是一个偶排列，通常称其为 n 级**标准排列**．

应该指出，我们同样可以考虑任意 n 个不同的自然数所组成的排列，一般地也称为 n 级排列．对这样一个 n 级排列同样可以定义上面这些概念．如 3542 是一个 4 级排列，3 与 2，5 与 4，5 与 2 及 4 与 2 各构成一个逆序，共有 4 个逆序，即 $N(3542)=4$，这是一个偶排列．

例 1.1.6 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数．

解 因为在这个排列中，n 后面比它小的数有 $n-1$ 个，$n-1$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个，…，3 后面比它小的数有 2 个，2 后面比它小的数有 1 个，所以

$$N(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

在一个 n 级排列中，互换某两个数码的位置，其余数码不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换．例如，对排列 4132 经过 1、3 对换后，得到一个新排列 4312，原来的偶排列变为奇排列．一般地说，对换具有下列性质：

定理 1.1.1 一个排列经过一个对换后，奇偶性改变．

这就是说，经过一个对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证略．

利用定理 1.1.1 可以证明下面一个重要结论．

定理 1.1.2　在全部 n 级排列中，偶排列和奇排列各占一半，都是$\frac{n!}{2}$个（$n\geqslant 2$）．

证　设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列为 p 个，偶排列为 q 个．若对每一个奇排列都施以同一的对换，则由定理 1.1.1 可知，p 个奇排列全部变成了偶排列，于是 $p\leqslant q$；同理，如果将全部偶排列也施以同一的对换，则 q 个偶排列全部变成奇排列，于是 $q\leqslant p$. 所以，只有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.1.3　n 阶行列式

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，我们首先分析二阶、三阶行列式的特点．

由（1－3）式和（1－5）式可以看出：

（1）二阶行列式有 2！项，每一项是两个元素的乘积，且这两个元素既位于不同行又位于不同列，一般项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，其中 j_1j_2 是两个数码 1 与 2 的排列. 当行标按标准顺序 12 排列时，列标取尽了 1，2 数码的所有排列；同样，三阶行列式共有 3！项，每一项是三个元素的乘积，且这三个元素既位于不同行又位于不同列，一般项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是三个数码 1，2，3 的排列．当行标按标准顺序 123 排列时，列标取尽了 1，2，3 数码的所有排列．

（2）每一项前面所带符号（正号或负号）与该项列标所成排列的奇偶性有关．（1－5）式中第一、二、三项的列标所成排列分别是 123，231，312，它们都是偶排列，这三项前面都带正号；第四、五、六项的列标所成排列分别是 321，213，132，它们都是奇排列，这三项前面都带负号．二阶行列式显然也符合这个原则．

上面对二阶和三阶行列式的分析对于我们理解一般行列式定义是有帮助的，下面给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.1.3　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-6}$$

的代数和，其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，每一项（1-6）都按下列规则带有符号：当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，式（1-6）带有正号，当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，式（1-6）带有负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1-7}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

由定义立即看出，n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的．由定理 1.1.2 可知，冠以正号的项和冠以负号的项（不计元素本身所带符号）各占一半．

n 阶行列式（1-7）有时简记为 $D=|a_{ij}|$，并将元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在斜线（从左上角到右下角的对角线）称为该 n 阶行列式的**主对角线**，把元素 a_{1n}，a_{2n-1}，…，a_{n1}所在斜线（从右上角到左下角对角线）称为该 n 阶行列式的**次对角线**．

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 1.1.7　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　四阶行列式展开项的一般形式为：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

第一行非零元素只有 $a_{12}=2$，第二行非零元素只有 $a_{23}=3$，第三行非零元素只有 $a_{34}=4$，第四行非零元素只有 $a_{41}=1$. 而这 4 个非零元素又在不同列，因此上述四阶行列式展开式中只有一项非零项，其余项都等于零，即

$$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=2\times3\times4\times1=24.$$

该项列标所成排列 2341 是奇排列，因此这一项前面带负号．所以