普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

高等数学 下册

（理工类）

（简明版）

第二版

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

高等数学 下册

（理工类）（简明版）第二版

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（理工类·简明版）/吴赣昌主编．2版．
北京：中国人民大学出版社，2008
普通高等教育“十一五”国家级规划教材．大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-08915-7

Ⅰ．高…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 006352 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学立体化教材
高等数学（理工类·简明版）
第二版
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2006 年 10 月第 1 版 2008 年 3 月第 2 版
印　　张	32.75 插页 2	**印　　次**	2008 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	599 000	**定　　价**	56.00 元（上、下册，含光盘）

总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立了一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，迄今，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和教学考研网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化简明系列教材，共包含两大类六门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经管类**：微积分，线性代数及概率论与数理统计三门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．

◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．

◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．

◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源多元化的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、实验教学、综合训练等功能模块，

以充分满足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑、数学实践以及综合提高训练等方面的需要. 其主要特点有:

◆ 多媒体教案: 按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点.

◆ 习题详解: 逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习.

◆ 综合训练: 总结每章教学知识点，通过精选的总习题和历届考研真题进一步揭示解题的一般规律和技巧，利于学生综合提高.

◆ 知识点交互: 利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习.

立体化教材的配套建设服务

1.《* * * * 多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 数学教研网(www.math123.cn)

其中，《* * * * 多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《* * * * 多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点:

◆ 多媒体教案: 教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节.

◆ 现代教学优势与传统教学优势的融合: 教学系统内设置了系统导航、文件缩放与手写笔等功能，使教师在课堂教学过程中既可很好地利用现代教学的优势，又可很好地保持传统教学的优势.

◆ 教学系统的扩展: 教学系统内设置了丰富的扩展端口，教师在课堂教学过程中，可以多种方式(Word、Powerpoint、Flash 等)链接和补充教学建设内容.

◆ 教学备课系统: 搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位教师的个性化授课特点.

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 25 000 余道，具有以下特点:

◆ 试题类型丰富: 含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

◆ 组卷功能强大: 教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，通过人工调整按钮，可以很方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

◆ 直接实现试卷的 Word 排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改.

◆ 大容量试卷库: 试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考; 用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功

能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能：使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

数学教研网(www.math123.cn)是为全国广大师生，尤其是采用大学数学立体化教材的师生提供信息资讯、教学资源与配套服务的网站.网站设计了动态信息、教材建设、教学文件、教学系统、题库系统、课程网站、考研资讯、数学实验、数学建模、交流访谈、数学史话、数学欣赏、征订信息等主要栏目，其中有丰富的教学软件资源供广大师生免费下载.网站力图建设成为国内大学数学教与学的门户型通用平台.

立体化教材的建设是一项崭新的事业.令我们欣慰的是，与当初启动这个项目时相比，现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境(从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设)和软硬件技术(从软件开发平台到计算机相关硬件技术)都已经非常成熟了.当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也随着计算机软硬件技术的进步迎刃而解了.

2000年以来，尤其是2002年9月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类)出版以来，我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

编　者

2008年1月18日

目　录

第 8 章　多元函数微分学

第 9 章　重积分

第 10 章　曲线积分与曲面积分

第 11 章　无穷级数

第8章　多元函数微分学

在第1章至第6章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数．但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量(因变量)与另外多个变量(自变量)的相互依赖关系，由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数的微分学．讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为二元函数的有关概念和方法大多有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法大多能自然推广到二元以上的多元函数．

§8.1　多元函数的基本概念

一、平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似，我们引入平面上点的邻域概念．

设$P(x_0, y_0)$为直角坐标平面上一点，δ为一正数，称点集

$$\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

为点P的**δ邻域**，记为$U_\delta(P)$，或简称为邻域，记为$U(P)$，而点集$U_\delta(P)-\{P\}$称为点P的去心邻域，记为$\mathring{U}_\delta(P)$．

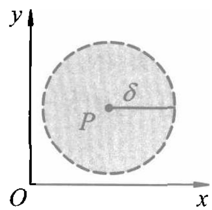

图 8－1－1

根据这一定义，点P的δ邻域实际上是以点P为圆心、δ为半径的圆的内部(见图8－1－1)．

下面我们利用邻域来描述平面上点和点集之间的关系．

设E是平面上的一个点集，P是平面上的一个点，则点P与点集E之间必存在以下三种关系之一：

(1) 如果存在点P的某一邻域$U(P)$，使得$U(P) \subset E$，则称P为E的**内点**(见图8－1－2中的点P_1)．

(2) 如果存在点P的某个邻域$U(P)$，使得$U(P) \cap E = \varnothing$，则称$P$为$E$的**外点**(见图8－1－2中的点$P_2$)．

(3) 如果点P的任意一个邻域内既有属于E的点也有不属于E的点，则称P为E的**边界点**(见图8－1－2中的点P_3)．

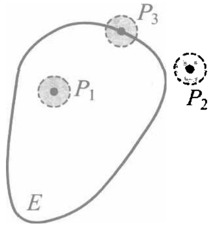

图 8－1－2

点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**.

根据上述定义可知，点集 E 的内点必属于 E，而 E 的边界点则可能属于 E 也可能不属于 E.

如果按点 P 的邻近处是否有无穷多个点来分类，则有：

(1) 如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}_{\delta}(P)$ 内总有点集 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

(2) 设点 $P\in E$，如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得

$$U(P)\bigcap E=\varnothing,$$

则称 P 为 E 的**孤立点**.

根据点集所属点的特征，可进一步定义一些重要的平面点集.

(1) 如果点集 E 内任意一点均为 E 的内点，则称 E 为**开集**.

(2) 如果点集 E 的余集 $\overline{E}$ 为开集，则称 E 为**闭集**.

(3) 如果点集 E 内的任何两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为**连通集**(见图 8–1–3).

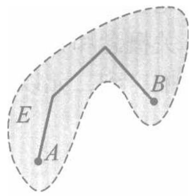

图 8–1–3

(4) 连通的开集称为**区域**或**开区域**.

(5) 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

(6) 对于点集 E，如果存在某一正数 K，使得 $E\subset U_K(O)$，则称 E 为**有界集**，其中 O 为坐标原点.

(7) 一个点集如果不是有界集，就称它为**无界集**.

例如，点集 $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 是一区域，并且是一有界区域 (见图 8–1–4).

点集 $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是一闭区域，并且是一有界闭区域(见图 8–1–5). 而点集 $\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$ 是一无界区域(见图 8–1–6).

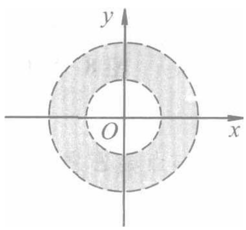

图 8–1–4

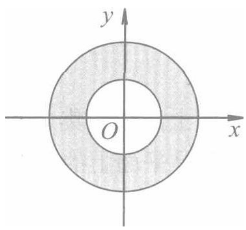

图 8–1–5

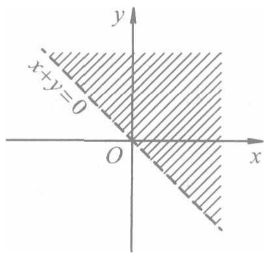

图 8–1–6

二、n 维空间的概念

我们知道，数轴上的点与实数一一对应，实数的全体记为 $\mathbf{R}$；平面上的点与二元有序数组 (x,y) 一一对应，二元有序数组 (x,y) 的全体记为 $\mathbf{R}^2$；空间中的点与三元有序数组 (x,y,z) 一一对应，三元有序数组 (x,y,z) 的全体记为 $\mathbf{R}^3$. 这样，$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 就分别对应于数轴、平面和空间.

一般地，设 n 为取定的一个自然数，我们称 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，而每个 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n 维空间的点**，$\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 来表示，即 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，数 x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标. 当所有的 $x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，这个点称为 $\mathbf{R}^n$ 的**坐标原点**，记为 O.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离，规定为

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间的距离的定义是一致的.

前面就平面点集所叙述的一系列概念，可推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.

例如，设点 $P_0\in\mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta,\ P\in\mathbf{R}^n\}$$

就称为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P 的 **δ 邻域**. 以邻域为基础，可以进一步定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念. 这里不再赘述.

三、二元函数的概念

定义 1 设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任一点 (x, y)，按照某种法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的**二元函数**，它在 (x, y) 处的函数值记为 $f(x, y)$，即 $z=f(x, y)$，其中 x, y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 点集 D 称为该函数的**定义域**，数集 $\{z\,|\,z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

注：关于二元函数的定义域，我们仍做如下约定：如果一个用算式表示的函数没有明确指出定义域，则该函数的定义域理解为使算式有意义的所有点 (x, y) 所构成的集合，并称其为**自然定义域**.

类似地，可定义三元及三元以上的函数. 当 $n\geq 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**.

例 1 求二元函数

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域.

解 要使表达式有意义，必须

$$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leq 1\\ x-y^2>0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}2\leq x^2+y^2\leq 4\\ x>y^2\end{cases},$$

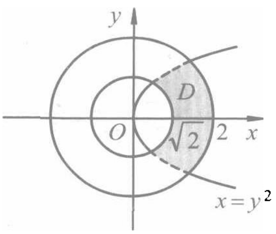

图 8-1-7

故所求定义域（见图8-1-7）

$$D=\{(x, y) \mid 2 \le x^2+y^2 \le 4,\ x>y^2\}.$$

例 2　已知函数 $f(x+y, x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $f(x, y)$.

解　设 $u=x+y$, $v=x-y$, 则

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},$$

所以
$$f(u,v)=\frac{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2-\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}=\frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

即有
$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

二元函数的几何意义

设 $z=f(x, y)$ 是定义在区域 D 上的一个二元函数，点集

$$S=\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$$

称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 易见，属于 S 的点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 满足三元方程

$$F(x, y, z)=z-f(x, y)=0,$$

故二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面(见图 8–1–8)，定义域 D 就是该曲面在 xOy 面上的投影.

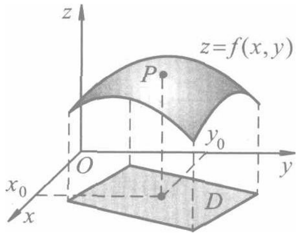

图 8–1–8

例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心、1 为半径的上半球面(见图 8–1–9)，它的定义域 D 是 xOy 面上以原点为圆心的单位圆.

又如，二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示顶点在原点的圆锥面 (见图 8–1–10)，它的定义域 D 是整个 xOy 面.

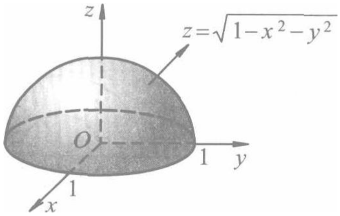

图 8–1–9

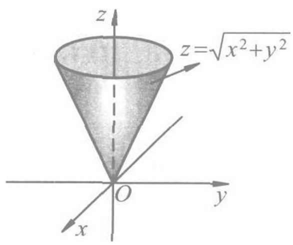

图 8–1–10

四、二元函数的极限

与一元函数的极限概念类似，二元函数的极限也是反映函数值随自变量变化而

变化的趋势.

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$ 恒有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为**函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限**. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A\ ((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则，在此不再详述. 为了区别于一元函数的极限，我们称二元函数的极限为**二重极限**.

值得注意的是，在定义 2 中，动点 P 趋向点 P_0 的方式是任意的(见图8-1-11). 即若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，则无论动点 P 以何种方式趋于点 P_0，都有 $f(P)\to A$. 这个命题的逆否命题常常用来证明一个二元函数的二重极限不存在.

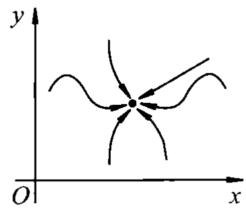

图 8-1-11

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解 因为当 $xy\neq 0$ 时，有

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|+|y|}{2|xy|}=\frac{1}{2|y|}+\frac{1}{2|x|}\to 0\ (x\to\infty,\ y\to\infty),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$

例5 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证明 取 $y=kx$ (k 为常数)，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

易见题设极限的值随 k 的变化而变化，故题设极限不存在.

五、二元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**间断**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称该函数在**区域 D 内连续**. 在区域 D 上连续的二元函数的图形是区域 D 上的一张连续曲面.

与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算和复合运算后仍为二元连续函数. 由 x 和 y 的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所构成的一个可用式子表示的二元函数称为**二元初等函数**. 一切二元初等函数在其定义区域内是连续的. 这里所说的定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域. 利用这个结论，当求某个二元初等函数在其定义区域内一点的极限时，只要计算出函数在该点的函数值即可.

例 6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\left[\ln(1-0)+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right]=1.$$

特别地，在有界闭区域 D 上连续的二元函数也有类似于一元连续函数在闭区间上所满足的定理. 下面我们列出这些定理，但不做证明.

定理 1（最大值和最小值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

定理 2（有界性定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数在 D 上一定有界.

定理 3（介值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，若在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上必取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

习题 8-1

1. 设 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx,ty)$.

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

3. 设 $z = x + y + f(x-y)$, 且当 $y=0$ 时, $z = x^2$, 求 $f(x)$.

4. 求下列各函数的定义域：

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$;　　(2) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;　　(3) $z = \ln(y-x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$;　　(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

§8.2 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数的概念. 实际问题中，我们常常需要了解一个受到多种因素制约的变量，在其它因素固定不变的情况下，该变量只随一种因素变化的变化率问题，反映在数学上就是多元函数在其它自变量固定不变时，函数随一个自变量变化的变化率问题，这就是偏导数.

以二元函数 $z = f(x,y)$ 为例，如果固定自变量 $y = y_0$，则函数 $z = f(x, y_0)$ 就是 x 的一元函数，该函数对 x 的导数，就称为二元函数 $z = f(x,y)$ 对 x 的**偏导数**. 一般地，我们有如下定义：

定义 1　设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地，函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处**对 x 的偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad 或 \quad f_x(x_0, y_0).$$

例如，有

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处**对 y 的偏导数**为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\ \text{或}\ f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x, y 的函数，并称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**(简称为**偏导数**)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x\ \text{或}\ f_x(x,y).$$

同理可以定义函数 $z=f(x,y)$**对自变量 y 的偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y\ \text{或}\ f_y(x,y).$$

注：偏导数的记号 z_x，f_x 也记成 z_x'，f_x'，对后面的高阶偏导数也有类似的情形.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数.

例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的偏导数：

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

上述定义表明，在求多元函数对某个自变量的偏导数时，只需把其余自变量看做常数，然后直接利用一元函数的求导公式及复合函数求导法则来计算.

例 1　求 $z=f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　把 y 看做常数，对 x 求导，得

$$f_x(x,y)=2x+3y,$$

把 x 看做常数，对 y 求导，得

$$f_y(x,y)=3x+2y,$$

故所求偏导数

$$f_x(1,2)=2\times 1+3\times 2=8,\quad f_y(1,2)=3\times 1+2\times 2=7.$$

例 2　设 $z=x^y(x>0,\ x\neq 1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

证明　因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^{y}\ln x$$
$$=x^{y}+x^{y}=2z.$$

例 3 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 看作常数, 对 x 求导, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

利用函数关于自变量的对称性, 得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

关于多元函数的偏导数, 我们补充以下几点说明:

(1) 对一元函数而言, 导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可看做函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 的商, 但偏导数的记号 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体.

(2) 与一元函数类似, 对分段函数在分段点的偏导数要利用偏导数的定义来求. 例如, 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的偏导数为

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

偏导数的几何意义

设曲面的方程为 $z=f(x,y)$, $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 是该曲面上一点, 过点 M_0 作平面 $y=y_0$, 截此曲面得一条曲线, 其方程为

$$\begin{cases}z=f(x,y_0),\\ y=y_0,\end{cases}$$

则偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示上述曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴正向的斜率(见图8-2-1).

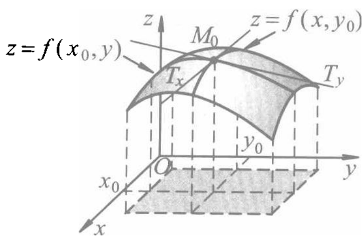

图 8-2-1

同理, 偏导数 $f_y(x_0,y_0)$就是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴正向的斜率.