

函数论初步

周丽珍 易中 编著

冶金工业出版社

函数论初步

周国治 编 中 国 人民教育出版社

科学出版社

函数论初步

周丽珍 易 中 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2009

内 容 简 介

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数 11 个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书,也可以供有关专业的工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

函数论初步/周丽珍等编著. —北京:冶金工业出版社, 2009. 1

ISBN 978-7-5024-4758-8

I. 函… II. 周… III. 函数论 IV. 0174

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第209752号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号, 邮编100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn

策划编辑 张 卫 责任编辑 王雪涛 美术编辑 李 心

版式设计 张 青 责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-4758-8

北京百善印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

2009年1月第1版, 2009年1月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32; 9.125印张; 244千字; 282页; 1-2000册

29.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010)65289081

(本书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

函数论是数学的基本组成部分,属于数学分析的范畴,包括单复变函数、级数理论、广义函数、多复变函数等分支。这些内容既相对独立又相互联系,读者可以从中初步了解函数论的概貌。由于篇幅所限,书中所述的分支内容只能是“片段性”的,读者可以根据具体的需要选择阅读。

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数 11 个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书,也可以供有关专业的工程技术人员使用。

限于作者的水平,书中有不妥之处,恳请读者不吝赐教。

作 者

目 录

1 整函数和亚纯函数	1
1.1 无穷乘积	1
1.1.1 无穷乘积的收敛性	1
1.1.2 函数项的无穷乘积	3
1.1.3 Poisson-Jensen 公式	5
1.2 整函数	7
1.2.1 整函数的级与型	7
1.2.2 整函数的无穷乘积展开	15
1.3 亚纯函数	20
1.3.1 亚纯函数的分解定理	20
1.3.2 特征函数	24
2 三角级数	31
2.1 基本性质	31
2.2 三角级数的 M 集和 U 集	37
2.3 点集 E 与正数 θ 的乘积 E_θ	43
2.4 特殊的 M 集和特殊的 U 集	45
2.5 三角级数概表可测函数	56
2.6 正测度点集上取 ∞ 的可测函数	62
3 群上概周期函数	69
3.1 概周期函数定义	69
3.2 平均值定理	70
3.3 群的酉表示	75

3.4	近似定理	81
3.5	紧密群	83
4	准解析函数的微积分	89
4.1	准解析函数定义	89
4.1.1	生成元	89
4.1.2	卡尔曼定理	92
4.1.3	第二类准解析函数	99
4.2	微积分法	103
4.2.1	生成序列	103
4.2.2	微分法	107
4.2.3	积分法	110
4.2.4	黎曼曲面上的准解析性	113
5	代数体函数	116
5.1	代数体函数第一基本定理	116
5.2	代数体函数的增长级	121
5.3	代数体函数第二基本定理	125
5.4	代数体函数的亏量和亏值	130
5.5	代数体函数的唯一性问题	137
6	无穷维空间函数的积分	140
6.1	可测函数	140
6.1.1	弱可测与强可测	140
6.1.2	P -积分和 B -积分	142
6.1.3	有界变差函数	148
6.2	加头积分	154
6.2.1	平均值存在定理	154
6.2.2	积分条件	160
6.2.3	线性与二次泛函数	163

6.2.4	加头积分定义	165
7	非线性映射的微分	169
7.1	微分与导算子	169
7.1.1	G -微分和 F -微分	169
7.1.2	高阶微分	177
7.1.3	幂级数	182
7.2	隐函数定理	185
7.2.1	C^p 映射	185
7.2.2	隐函数的存在性和可微性	186
8	奥尔里奇空间	192
8.1	N 函数	192
8.2	奥尔里奇空间定义	201
8.3	范数计算	209
9	广义函数	216
9.1	形式傅里叶级数	216
9.2	H 型和 S 型广义函数	217
9.3	极限	226
10	Picard 定理证明	231
10.1	Picard 小定理	231
10.2	Picard 大定理	242
11	多复变函数	243
11.1	基本性质	243
11.1.1	全纯函数	243
11.1.2	开映射定理	246
11.2	解析开拓	250

11.2.1 全纯函数从多圆柱边界的开拓	250
11.2.2 Reinhardt 域	251
11.3 次调和函数	260
11.3.1 次调和函数性质	260
11.3.2 次调和函数例外集	271
11.4 Hartogs 定理	272
参考文献	282

1 整函数和亚纯函数

1.1 无穷乘积

1.1.1 无穷乘积的收敛性

设 $a_1, a_2, \dots, a_l, \dots$ 为复数序列, 称

$$\prod_{l=1}^{\infty} a_l = a_1 a_2 \cdots a_l \cdots \quad (1.1)$$

为无穷乘积, a_l 称为第 l 个因子。取

$$p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

称 p_n 为部分乘积。命 a_l 不为零, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 存在且等于 $p (p \neq 0)$, 则

称式 (1.1) 收敛于 p , p 称为无穷乘积的值, 记作 $p = \prod_{l=1}^{\infty} a_l$; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 不存在或 $p=0$, 则称式 (1.1) 发散。

也可以用 ϵ 语言表述无穷乘积的收敛性。式 (1.1) 收敛于 p 是指任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $l > N$ 时有

$$\left| \frac{p}{p_l} - 1 \right| < \epsilon$$

因为 $a_l = \frac{p_l}{p_{l-1}}$, 若无穷乘积收敛, 则当 $l \rightarrow \infty$ 时 $a_l \rightarrow 1$ 。这是无穷乘积收敛的必要条件, 但非充分条件。

为方便讨论, 一般将无穷乘积写成如下形式

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 + a_l) \quad (1.2)$$

式 (1.2) 收敛的必要条件为 $a_l \rightarrow 0$ 。

对式 (1.2) 与其相应的级数

$$\sum_{l=1}^{\infty} \log(1 + a_l) \quad (1 + a_l \neq 0) \quad (1.3)$$

进行比较, 其中每一项选取对数主值。

定理 1.1 无穷乘积式(1.2)收敛的充要条件为无穷级数式(1.3)收敛。

证明:(1) 充分性。令

$$q_n = \sum_{l=1}^n \log(1 + a_l)$$

推出

$$p_n = e^{q_n}$$

由于式(1.3)收敛, 即 $q_n \rightarrow q$, 注意到指数函数的连续性, 因此 $p_n \rightarrow e^q$ 。

(2) 必要性。令

$$p_n = \rho_n e^{i\varphi_n} \quad \text{且} \quad 1 + a_l = r_l e^{i\theta_l} \quad (-\pi < \theta_l \leq \pi)$$

于是

$$\varphi_n = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n \quad \rho_n = r_1 r_2 \cdots r_n$$

而无穷乘积收敛, 这样 $\rho_n, e^{i\varphi_n}$ 都趋近于不为零的极限。设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = R \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\varphi_n} = e^{i\varphi} \quad (1.4)$$

所以任给 $\varepsilon > 0$, 必存在正整数 N , 当 $n > N$ 时

$$\varphi_n = \varphi + 2k_n\pi + \varepsilon_n \quad (1.5)$$

式中 $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ 。依式(1.5)

$$\theta_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} = 2\pi(k_n - k_{n-1}) + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$$

取 $\Delta k = k_n - k_{n-1}$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$, 则 Δk 为整数, $|\Delta\varepsilon| < 2\varepsilon$, 得

$$\theta_n = 2\Delta k\pi + \Delta\varepsilon$$

因 $-\pi < \theta_n \leq \pi$, 故当 ε 很小时, 必应 $\Delta k = 0$, 也就是当 n 充分大时所有 k_n 相等, $k_n = k$, 且

$$\varphi_n = \varphi + 2k\pi + \varepsilon_n$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi + 2k\pi$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log R + i(\varphi + 2k\pi)$$

表明上式等号左端收敛。

如果无穷级数 $\sum_{l=1}^{\infty} \log(1+a_l)$ 绝对收敛, 那么称无穷乘积 $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ 绝对收敛。

定理 1.2 无穷乘积 $\prod_{l=1}^{\infty} (1+a_l)$ 绝对收敛的充要条件为无穷级数 $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ 绝对收敛。

证明: 只需证明 $\sum_{l=1}^{\infty} \log(1+a_l)$ 与 $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ 同时绝对收敛即可。因为两个级数至少有一个收敛, 所以当 $l \rightarrow \infty$ 时 $a_l \rightarrow 0$ 。这样存在整数 N , 当 $n \geq N$ 时 $|a_l| \leq \frac{1}{2}$, 有

$$\left| \frac{\log(1+a_l)}{a_l} - 1 \right| = \left| -\frac{a_l}{2} + \frac{a_l^2}{3} - \frac{a_l^3}{4} + \dots \right| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2}$$

得

$$\frac{1}{2} |a_l| \leq |\log(1+a_l)| \leq \frac{3}{2} |a_l|$$

故 $\sum_{l=1}^{\infty} \log(1+a_l)$ 与 $\sum_{l=1}^{\infty} a_l$ 同时绝对收敛。

1.1.2 函数项的无穷乘积

设 $u_l = u_l(z)$, 今考虑函数项的无穷乘积

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 + u_l) \quad (1.6)$$

式中 $u_1, u_2, \dots$ 为定义在点集 E 上的函数。取

$f_n(z) = \prod_{l=1}^n [1 + u_l(z)]$, 若函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在点集 E 上的任意一点 z 均收敛于非零值, 则称式(1.6)在 E 上一致收敛。

定理 1.3 若 $\prod_{l=1}^{\infty} (1 + u_l)$ 满足

$$|u_l| < M_l \quad (l=1, 2, \dots; z \in E)$$

式中 M_l 与 z 无关,且 $\sum_{l=1}^{\infty} M_l$ 收敛,则 $\prod_{l=1}^{\infty} (1+u_l)$ 在 E 上一致收敛。

定理1.3也称为维尔斯特拉斯判别法。

证明: 命 $p_n = \prod_{l=1}^n (1 + M_l), f_n(z) = \prod_{l=1}^n (1 + u_l)$ 。因为

$\sum_{l=1}^{\infty} M_l$ 收敛,由定理1.2 知 $\prod_{l=1}^{\infty} (1 + M_l)$ 也收敛,所以当 $n \rightarrow \infty$ 时 p_n

存在极限。而对 $n > m$,

$$f_n(z) = f_m(z) \prod_{l=m+1}^n [1 + u_l(z)]$$

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |f_m(z)| \left| \prod_{l=m+1}^n [1 + u_l(z)] - 1 \right|$$

$$\leq \prod_{l=1}^m (1 + M_l) \left[\prod_{l=m+1}^n (1 + M_l) - 1 \right] = p_n - p_m$$

由于 $\{p_n\}$ 存在极限,利用柯西准则,对任给 $\varepsilon > 0$,必存在 m ,使当 $n > m$ 时

$$0 < p_n - p_m < \varepsilon$$

也就是对 $n > m$ 及对 E 中的一切点 z ,均有

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

故 $\{f_n(z)\}$ 在 E 上一致收敛,表明式(1.6)在 E 上一致收敛。

定理1.4 设 $\prod_{l=1}^{\infty} [1 + u_l(z)]$ 在区域 D 内任意一个有界闭区域上一致收敛于 $f(z)$,且每一个 $u_l(z)$ 在 D 内解析,则 $f(z)$ 在 D 内解析。

【例1.1】 讨论无穷乘积

$$\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots$$

的收敛性。

解: 因为 $\frac{z^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛,所以该无穷乘积绝对收敛。

【例1.2】 讨论无穷乘积

$$\left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \cdots$$

的收敛性。

解: 因为 $\frac{|z|}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以当 $z \neq 0$ 时发散, 这样该无穷乘积非绝对收敛。

1.1.3 Poisson-Jensen 公式

首先给出全纯函数的概念。函数 $f(z)$ 在点 a 上全纯是指其在点 a 的某个邻域内可以展开成关于 $z-a$ 的幂级数; 函数在某点上的全纯性等价于其在该点上的解析性。如果一个函数在某区域内的每一点都是全纯的, 那么称之为在该区域是全纯的。

当 $f(z)$ 在整个复平面上除可能有极点外处处解析时称 $f(z)$ 为亚纯函数; 当 $f(z)$ 在整个复平面上解析时称 $f(z)$ 为整函数。显然整函数是亚纯函数的特例。整函数可以作为多项式的推广, 亚纯函数可以作为部分分式的推广。有理函数属于亚纯函数, 而非有理函数称为超越亚纯函数。

在讨论整函数与亚纯函数时经常应用 Jensen 公式、Poisson-Jensen 公式, 尤其是在亚纯函数中 Poisson-Jensen 公式的作用更大。

定理 1.5 设 $f(z)$ 在圆 $|z| \leq \rho$ 上亚纯, a_p, b_q 分别为 $f(z)$ 在圆 $|z| < \rho$ 内的零点和极点, 则对任意值 $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < \rho, 0 \leq \theta < 2\pi$) 有

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \log \left| \frac{\rho(z - a_p)}{\rho^2 - \bar{a}_p z} \right| - \sum_{q=1}^m \log \left| \frac{\rho(z - b_q)}{\rho^2 - \bar{b}_q z} \right| \end{aligned} \quad (1.7)$$

而 $p=1, 2, \dots, n; q=1, 2, \dots, m$ 。

证明: (1) 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq \rho$ 上无零点、极点, 于是对任意取定

的一个点 $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ ($0 \leq r_0 < \rho$, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$), 函数

$$\frac{\rho^2 - |z_0|^2}{\rho^2 - \bar{z}_0 z} \log f(z)$$

在 $|z| \leq \rho$ 上全纯。根据柯西公式, 得

$$\log f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{\rho^2 - |z_0|^2}{(\rho^2 - \bar{z}_0 \zeta)(\zeta - z_0)} \log f(\zeta) d\zeta \quad (1.8)$$

在 $|\zeta| = \rho$ 上, 若记 $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, 则 $d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ 且

$$(\rho^2 - \bar{z}_0 \zeta)(\zeta - z_0) = \rho e^{i\varphi} [\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta - \varphi) + r_0^2]$$

这样由式(1.2)给出

$$\log f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + r_0^2} \log f(\rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

在上式等号两边取实部, 有

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta_0 - \varphi) + r_0^2} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi$$

注意到点 z_0 的任意性, 表明式(1.7)成立, 称式(1.7)为 Poisson-Jensen 公式。

(2) 如果仅仅假设 $f(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内无零点、极点, 但在 $|z| = \rho$ 上可能存在有限个零点、极点, 那么仍可以证明式(1.7)成立。事实上, 此时式(1.8)中的被积函数仅具有对数奇性, 因而积分仍有意义。在每个零点和极点处, 只需对积分线圆周 $|\zeta| = \rho$ 作改动并通过极限过程就可证明式(1.8)成立, 进而式(1.7)也成立。

(3) 今考虑一般情况, 令

$$\psi(z) = f(z) \frac{\prod_{q=1}^m \frac{\rho(z - b_q)}{\rho^2 - \bar{b}_q z}}{\prod_{p=1}^n \frac{\rho(z - a_p)}{\rho^2 - \bar{a}_p z}} \quad (1.9)$$

所以 $\psi(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内全纯又无零点。对 $\psi(z)$ 应用式(1.7), 当 $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ 、 $|a| < 1$ 时,

$$\left| \frac{\rho(\zeta - a)}{\rho^2 - \bar{a}\zeta} \right| = \left| \frac{\rho e^{i\varphi} - a}{\rho - \bar{a}e^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{\rho - a e^{-i\varphi}}{\rho - \bar{a}e^{i\varphi}} \right| = 1$$

于是

$$\log |\psi(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi$$

再利用式(1.9), 即得式(1.7)。

当 $f(0) \neq 0, \infty$ 时, 若式(1.7)中取 $z=0$, 则

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{p=1}^n \log \frac{\rho}{|a_p|} + \sum_{q=1}^m \log \frac{\rho}{|b_q|} \quad (1.10)$$

式(1.10)称为 Jensen 公式。

1.2 整函数

1.2.1 整函数的级与型

由整函数 $f(z)$ 的定义知, $f(z)$ 可用幂级数表示

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (1.11)$$

利用柯西公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad (1.12)$$

首先在无穷远点处整函数可能是解析的, 这样 $f(z)$ 为一个常数; 其次无穷远点可能是 $l \geq 1$ 重的极点, 这样 $f(z)$ 为 l 次多项式; 最后无穷远点可能是 $f(z)$ 的本性奇点, 这时的 $f(z)$ 称为超越整函数, 如指数函数、三角函数等。

对于超越整函数, 其最大模

$$M(r) = \max_{|z| < r} |f(z)|$$

是此类函数最重要的特征。因 r 为增函数, 依刘维尔定理知它满足

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty \quad (1.13)$$

就超越整函数而言, $M(r)$ 比 r 的任何固定次幂增长得更快。另外,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \infty \quad (1.14)$$

是正确的。事实上, 若设

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \mu < \infty$$

则对有限数 $\mu_0 > \mu$, 存在趋近于无穷大的序列 $\{r_n\}$, 使对每一个 r_n 下式成立,

$$\log M(r_n) < \mu_0 \log r_n$$

或

$$M(r_n) < r_n^{\mu_0}$$

于是利用柯西不等式, 式(1.11)的系数满足

$$|a_l| \leq \frac{M(r_n)}{r_n^l} < r_n^{\mu_0 - l}$$

因为此处 r_n 可取任意大值, 所以对所有 $l > \mu_0 > \mu$, 泰勒级数的系数 a_l 全为零, 结果 $f(z)$ 为多项式, 其次数不高于 μ 的最大整数部分(即 $[\mu]$)。

今用指数函数估计超越整函数的增长。若存在 $\mu > 0$ 使对一切充分大的 r , 不等式

$$M(r) < \exp(r^\mu) \quad (1.15)$$

正确, 则 $f(z)$ 称为有限级整函数。反之, 对 $\mu > 0$ 恒有适当的 r 使 $M(r) > \exp(r^\mu)$, 则 $f(z)$ 称为无穷级整函数。

【例 1.3】 $\exp(z)$ 为有限级整函数, $\exp[\exp(z)]$ 为无穷级整函数。

对有限级整函数, 考虑 μ 的下确界; 对这些 μ , 从充分大的 $r > r(\mu)$ 开始式(1.15)成立, 该下确界称为整函数的级, 也就是增长的级, 并以 ρ 表示,

$$\rho = \inf \mu \geq 0$$

对无穷级整函数, 令 $\rho = \infty$, 依定义, 对 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$M(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon}) \quad (1.16)$$

也正确。另一方面, 存在 $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ 满足

$$M(r_n) > \exp(r_n^{\rho-\varepsilon}) \quad (1.17)$$

从式(1.16)、式(1.17)可推出

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon$$