函数论初步

周丽珍　易中　编著

冶金工业出版社

函數论初步

函数论初步

周丽珍 易 中 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2009

内容简介

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数11个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书，也可以供有关专业的工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

函数论初步/周丽珍等编著. —北京：冶金工业出版社，2009.1

ISBN 978-7-5024-4758-8

Ⅰ. 函…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 函数论　Ⅳ. 0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 209752 号

出版人　曹胜利

地　址　北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009

电　话　(010)64027926　电子信箱　postmaster@cnmip.com.cn

策划编辑　张　卫　责任编辑　王雪涛　美术编辑　李　心

版式设计　张　青　责任校对　王永欣　责任印制　牛晓波

ISBN 978-7-5024-4758-8

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2009 年 1 月第 1 版，2009 年 1 月第 1 次印刷

850mm×1168mm　1/32；9.125 印张；244 千字；282 页；1-2000 册

29.00 元

冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893

冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号(100711)　电话：(010)65289081

(本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换)

前　言

函数论是数学的基本组成部分，属于数学分析的范畴，包括单复变函数、级数理论、广义函数、多复变函数等分支。这些内容既相对独立又相互联系，读者可以从中初步了解函数论的概貌。由于篇幅所限，书中所述的分支内容只能是“片段性”的，读者可以根据具体的需要选择阅读。

本书从整函数和亚纯函数、三角级数、群上概周期函数、准解析函数的微积分、代数体函数、无穷维空间函数的积分、非线性映射的微分、奥尔里奇空间、广义函数、Picard 定理证明、多复变函数 11 个方面介绍了函数论的初步知识。

本书可以作为各级各类高等院校的数控、自控、仪器仪表、无线电、暖通、工民建、建筑物理等专业的参考书，也可以供有关专业的工程技术人员使用。

限于作者的水平，书中有不妥之处，恳请读者不吝赐教。

作　者

目　　录

1 整函数和亚纯函数

1.1 无穷乘积

1.1.1 无穷乘积的收敛性

设a_1、a_2、…、a_l、…为复数序列，称

$$\prod_{l=1}^{\infty} a_l = a_1 a_2 \cdots a_l \cdots \tag{1.1}$$

为无穷乘积，a_l 称为第 l 个因子。取

$$p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$$

称 p_n 为部分乘积。命 a_l 不为零，若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ 存在且等于 $p(p\neq 0)$，则称式(1.1)收敛于 p，p 称为无穷乘积的值，记作 $p = \prod\limits_{l=1}^{\infty} a_l$；若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ 不存在或 $p=0$，则称式(1.1)发散。

也可以用ε语言表述无穷乘积的收敛性。式(1.1)收敛于p是指任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$l>N$时有

$$\left|\frac{p}{p_l}-1\right|<\varepsilon$$

因为$a_l=\dfrac{p_l}{p_{l-1}}$，若无穷乘积收敛，则当$l\to\infty$时$a_l\to 1$。这是无穷乘积收敛的必要条件，但非充分条件。

为方便讨论，一般将无穷乘积写成如下形式

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+a_l) \tag{1.2}$$

式(1.2)收敛的必要条件为$a_l\to 0$。

对式(1.2)与其相应的级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l) \qquad (1+a_l\neq 0) \tag{1.3}$$

进行比较，其中每一项选取对数主值。

定理 1.1 无穷乘积式(1.2)收敛的充要条件为无穷级数式(1.3)收敛。

证明:(1) 充分性。令

$$q_n = \sum_{l=1}^{n} \log(1 + a_l)$$

推出

$$p_n = e^{q_n}$$

由于式(1.3)收敛,即 $q_n \to q$,注意到指数函数的连续性,因此 $p_n \to e^q$。

(2) 必要性。令

$$p_n = \rho_n e^{i\varphi_n} \quad 且\ 1 + a_l = r_l\, e^{i\theta_l} \qquad (-\pi < \theta_l \leqslant \pi)$$

于是

$$\varphi_n = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n \qquad \rho_n = r_1 r_2 \cdots r_n$$

而无穷乘积收敛,这样 ρ_n、$e^{i\varphi_n}$都趋近于不为零的极限。设

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = R \qquad \lim_{n\to\infty} e^{i\varphi_n} = e^{i\varphi} \tag{1.4}$$

所以任给 $\varepsilon > 0$,必存在正整数 N,当 $n > N$ 时

$$\varphi_n = \varphi + 2k_n\pi + \varepsilon_n \tag{1.5}$$

式中 $|\varepsilon_n| < \varepsilon$。依式(1.5)

$$\theta_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} = 2\pi(k_n - k_{n-1}) + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$$

取 $\Delta k = k_n - k_{n-1}$、$\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$,则 Δk 为整数,$|\Delta\varepsilon| < 2\varepsilon$,得

$$\theta_n = 2\Delta k\pi + \Delta\varepsilon$$

因 $-\pi < \theta_n \leqslant \pi$,故当 ε 很小时,必应 $\Delta k = 0$,也就是当 n 充分大时所有 k_n 相等,$k_n = k$,且

$$\varphi_n = \varphi + 2k\pi + \varepsilon_n$$

又

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi + 2k\pi$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log R + i(\varphi + 2k\pi)$$

表明上式等号左端收敛。

如果无穷级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$ 绝对收敛，那么称无穷乘积 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$ 绝对收敛。

定理1.2 无穷乘积 $\prod\limits_{l=1}^{\infty}(1+a_l)$ 绝对收敛的充要条件为无穷级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$ 绝对收敛。

证明：只需证明 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$ 与 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$ 同时绝对收敛即可。因为两个级数至少有一个收敛，所以当 $l\to\infty$ 时 $a_l\to 0$。这样存在整数 N，当 $n\geqslant N$ 时 $|a_l|\leqslant\frac{1}{2}$，有

$$\left|\frac{\log(1+a_l)}{a_l}-1\right|=\left|-\frac{a_l}{2}+\frac{a_l^2}{3}-\frac{a_l^3}{4}+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{2}$$

得

$$\frac{1}{2}|a_l|\leqslant|\log(1+a_l)|\leqslant\frac{3}{2}|a_l|$$

故 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\log(1+a_l)$ 与 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_l$ 同时绝对收敛。

1.1.2 函数项的无穷乘积

设 $u_l=u_l(z)$，今考虑函数项的无穷乘积

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+u_l) \tag{1.6}$$

式中 u_1、u_2、…为定义在点集 E 上的函数。取

$f_n(z)=\prod\limits_{l=1}^{\infty}[1+u_l(z)]$，若函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在点集 E 上的任意一点 z 均收敛于非零值，则称式(1.6)在 E 上一致收敛。

定理1.3 若 $\prod\limits_{l=1}^{\infty}(1+u_l)$ 满足

$$|u_l|<M_l \qquad (l=1,2,\cdots;z\in E)$$

式中M_l与z无关，且$\sum_{l=1}^{\infty}M_l$收敛，则$\prod_{l=1}^{\infty}(1+u_l)$在$E$上一致收敛。

定理1.3也称为维尔斯特拉斯判别法。

证明：命$p_n=\prod_{l=1}^{n}(1+M_l)$，$f_n(z)=\prod_{l=1}^{n}(1+u_l)$。因为$\sum_{l=1}^{\infty}M_l$收敛，由定理1.2知$\prod_{l=1}^{\infty}(1+M_l)$也收敛，所以当$n\to\infty$时$p_n$存在极限。而对$n>m$，

$$f_n(z)=f_m(z)\prod_{l=m+1}^{n}[1+u_l(z)]$$

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f_m(z)|&=|f_m(z)|\left|\prod_{l=m+1}^{n}[1+u_l(z)]-1\right|\\&\leqslant\prod_{l=1}^{m}(1+M_l)\left[\prod_{l=m+1}^{n}(1+M_l)-1\right]=p_n-p_m\end{aligned}$$

由于$\{p_n\}$存在极限，利用柯西准则，对任给$\varepsilon>0$，必存在m，使当$n>m$时

$$0<p_n-p_m<\varepsilon$$

也就是对$n>m$及对E中的一切点z，均有

$$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$$

故$\{f_n(z)\}$在E上一致收敛，表明式(1.6)在E上一致收敛。

定理1.4　设$\prod_{l=1}^{\infty}[1+u_l(z)]$在区域$D$内任意一个有界闭区域上一致收敛于$f(z)$，且每一个$u_l(z)$在$D$内解析，则$f(z)$在$D$内解析。

【例1.1】　讨论无穷乘积

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

的收敛性。

解：因为$\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$绝对收敛，所以该无穷乘积绝对收敛。

【例1.2】　讨论无穷乘积

$$\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots$$

的收敛性。

解:因为$\frac{|z|}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以当$z\neq 0$时发散,这样该无穷乘积非绝对收敛。

1.1.3 Poisson-Jensen 公式

首先给出全纯函数的概念。函数$f(z)$在点a上全纯是指其在点a的某个邻域内可以展开成关于$z-a$的幂级数;函数在某点上的全纯性等价于其在该点上的解析性。如果一个函数在某区域内的每一点都是全纯的,那么称之为在该区域是全纯的。

当$f(z)$在整个复平面上除可能有极点外处处解析时称$f(z)$为亚纯函数;当$f(z)$在整个复平面上解析时称$f(z)$为整函数。显然整函数是亚纯函数的特例。整函数可以作为多项式的推广,亚纯函数可以作为部分分式的推广。有理函数属于亚纯函数,而非有理函数称为超越亚纯函数。

在讨论整函数与亚纯函数时经常应用Jensen 公式、Poisson-Jensen 公式,尤其是在亚纯函数中 Poisson-Jensen 公式的作用更大。

定理1.5 设$f(z)$在圆$|z|\leqslant\rho$上亚纯,a_p、b_q分别为$f(z)$在圆$|z|<\rho$内的零点和极点,则对任意值$z=re^{i\theta}(0\leqslant r<\rho、0\leqslant\theta<2\pi)$有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi + \sum_{p=1}^{n}\log\left|\frac{\rho(z-a_p)}{\rho^2-\overline{a}_p z}\right| - \sum_{q=1}^{m}\log\left|\frac{\rho(z-b_q)}{\rho^2-\overline{b}_q z}\right| \tag{1.7}$$

而$p=1、2、\cdots、n$;$q=1、2、\cdots、m$。

证明:(1) 设$f(z)$在$|z|\leqslant\rho$上无零点、极点,于是对任意取定

的一个点 $z_0=r_0e^{i\theta_0}(0\leqslant r_0<\rho,0\leqslant\theta_0<2\pi)$，函数

$$\frac{\rho^2-|z_0|^2}{\rho^2-\overline{z}_0z}\log f(z)$$

在 $|z|\leqslant\rho$ 上全纯。根据柯西公式，得

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{\rho^2-|z_0|^2}{(\rho^2-\overline{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)}\log f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad (1.8)$$

在 $|\zeta|=\rho$ 上，若记 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$，则 $\mathrm{d}\zeta=i\rho e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$ 且

$$(\rho^2-\overline{z}_0\zeta)(\zeta-z_0)=\rho e^{i\varphi}[\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta-\varphi)+r_0^2]$$

这样由式(1.2)给出

$$\log f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r_0^2}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}\log f(\rho e^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

在上式等号两边取实部，有

$$\log|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-r_0^2}{\rho^2-2\rho r_0\cos(\theta_0-\varphi)+r_0^2}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$

注意到点 z_0 的任意性，表明式(1.7)成立，称式(1.7)为 Poisson-Jensen 公式。

(2) 如果仅仅假设 $f(z)$在 $|z|<\rho$ 内无零点、极点，但在 $|z|=\rho$ 上可能存在有限个零点、极点，那么仍可以证明式(1.7)成立。事实上，此时式(1.8)中的被积函数仅具有对数奇性，因而积分仍有意义。在每个零点和极点处，只需对积分线圆周 $|\zeta|=\rho$ 作改动并通过极限过程就可证明式(1.8)成立，进而式(1.7)也成立。

(3) 今考虑一般情况，令

$$\psi(z)=f(z)\frac{\prod_{q=1}^{m}\frac{\rho(z-b_q)}{\rho^2-\overline{b}_qz}}{\prod_{p=1}^{n}\frac{\rho(z-a_p)}{\rho^2-\overline{a}_pz}} \quad (1.9)$$

所以 $\psi(z)$在 $|z|<\rho$ 内全纯又无零点。对 $\psi(z)$应用式(1.7)，当 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$、$|a|<1$ 时，

$$\left|\frac{\rho(\zeta-a)}{\rho^2-\overline{a}\zeta}\right|=\left|\frac{\rho e^{i\varphi}-a}{\rho-\overline{a}e^{i\varphi}}\right|=\left|\frac{\rho-ae^{-i\varphi}}{\rho-\overline{a}e^{i\varphi}}\right|=1$$

于是

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) + r^2}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi$$

再利用式(1.9),即得式(1.7)。

当$f(0)\neq 0$、∞时,若式(1.7)中取$z=0$,则

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\mathrm{d}\varphi - \sum_{p=1}^{n}\log\frac{\rho}{|a_p|} + \sum_{q=1}^{m}\log\frac{\rho}{|b_q|} \tag{1.10}$$

式(1.10)称为Jensen 公式。

1.2 整函数

1.2.1 整函数的级与型

由整函数$f(z)$的定义知,$f(z)$可用幂级数表示

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \tag{1.11}$$

利用柯西公式

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \tag{1.12}$$

首先在无穷远点处整函数可能是解析的,这样$f(z)$为一个常数;其次无穷远点可能是$l\geqslant 1$重的极点,这样$f(z)$为l次多项式;最后无穷远点可能是$f(z)$的本性奇点,这时的$f(z)$称为超越整函数,如指数函数、三角函数等。

对于超越整函数,其最大模

$$M(r)=\max_{|z|<r}|f(z)|$$

是此类函数最重要的特征。因r为增函数,依刘维尔定理知它满足

$$\lim_{r\to\infty}M(r)=\infty \tag{1.13}$$

就超越整函数而言,$M(r)$比r的任何固定次幂增长得更快。另外,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=\infty \tag{1.14}$$

是正确的。事实上,若设

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=\mu<\infty$$

则对有限数 $\mu_0>\mu$，存在趋近于无穷大的序列 $\{r_n\}$，使对每一个 r_n 下式成立，

$$\log M(r_n)<\mu_0\log r_n$$

或

$$M(r_n)<r_n^{\mu_0}$$

于是利用柯西不等式，式(1.11)的系数满足

$$|a_l|\leqslant\frac{M(r_n)}{r_n^l}<r_n^{\mu_0-l}$$

因为此处 r_n 可取任意大值，所以对所有 $l>\mu_0>\mu$，泰勒级数的系数 a_l 全为零，结果 $f(z)$ 为多项式，其次数不高于 μ 的最大整数部分(即 $[\mu]$)。

今用指数函数估计超越整函数的增长。若存在 $\mu>0$ 使对一切充分大的 r，不等式

$$M(r)<\exp(r^{\mu}) \tag{1.15}$$

正确，则 $f(z)$ 称为有限级整函数。反之，对 $\mu>0$ 恒有适当的 r 使 $M(r)>\exp(r^{\mu})$，则 $f(z)$ 称为无穷级整函数。

【例 1.3】 $\exp(z)$ 为有限级整函数，$\exp[\exp(z)]$ 为无穷级整函数。

对有限级整函数，考虑 μ 的下确界；对这些 μ，从充分大的 $r>r(\mu)$ 开始式(1.15)成立，该下确界称为整函数的级，也就是增长的级，并以 ρ 表示，

$$\rho=\inf\mu\geqslant 0$$

对无穷级整函数，令 $\rho=\infty$，依定义，对 $\varepsilon>0$，不等式

$$M(r)<\exp(r^{\rho+\varepsilon}) \tag{1.16}$$

也正确。另一方面，存在 r_1、r_2、…、r_n、…满足

$$M(r_n)>\exp(r_n^{\rho-\varepsilon}) \tag{1.17}$$

从式(1.16)、式(1.17)可推出

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r}<\rho+\varepsilon$$