

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

Chaoji Ketang



超级课堂

丛书主编/王后雄

本册主编/田祥高

高中数学
5
(必修)

考点分类例析

方法视窗导引

防错档案预警

专题优化测训

 华中师范大学出版社

PDG



新课标

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

丛书主编/王后雄 本册主编/田祥高

超级课堂

高中数学

5

(必修)



 华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

同步专题突破 **超级课堂** 高中数学 **5** (必修) 丛书主编: 王后雄, 本册主编: 田祥高

—武汉: 华中师范大学出版社, 2009. 3

ISBN 978-7-5622-3786-0

I. 同… II. ①王… ②田… III. 数学课-高中-教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 167389 号

同步专题突破 **超级课堂** 高中数学 **5** (必修)

丛书主编: 王后雄

本册主编: 田祥高

责任编辑: 张桂娜 王金娥

责任校对: 罗 艺

封面设计: 甘 英

选题设计: 第一编辑室(027-67867361)

出版发行: 华中师范大学出版社 ©

社址: 湖北省武汉市珞喻路 152 号

销售电话: 027-67863040

027-67867076

027-67867371

027-67861549

传真: 027-67863291

邮购: 027-67861321

网址: <http://www.ccnupress.com>

电子信箱: hscbs@public.wh.hb.cn

印刷: 湖北省鄂南新华印务有限公司

督印: 章光琼

字数: 353 千字

印张: 12.5

开本: 889mm×1194mm 1/16

印次: 2009 年 3 月第 1 次印刷

版次: 2009 年 3 月第 1 版

定价: 22.50 元

欢迎上网查询、购书

若发现盗版书, 请打举报电话 027-67861321。

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素,锁定不同版本教材的要求,指明学习和考试具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导,揭示学习重点和难点,探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结,要点重点各个击破,典例创新引导,首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移,母题多向发散,预测高考可考变式题型,层层剖析深入变式训练。

板块一 解三角形

第1讲 正弦定理

课标解读

1. 通过对特殊三角形边角数量关系的研究,发现正弦定理,初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律。
2. 了解正弦定理的证明,能运用正弦定理解决有关三角

学法导引

学习本讲内容时,要善于运用平面几何知识以及平面几何知识证明正弦定理;应掌握用正弦定理将三角形的边角之间关系相互转化的功能;已知两边和其中一边的对角解三角形时,解的个数的判定是本讲学习的难点。

考点分类例析

考点1 正弦定理

核心总结

在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

◎ 考题1 若 $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 满足 $A+C=2B$,且最大边为最小边的2倍,求 $\triangle ABC$ 三内角之比。

【解析】 设 $\triangle ABC$ 的三内角从小到大依次依次为 $B-a, B, B+a$ 。

$\because A+B+C=\pi, \therefore B-a+B+B+a=\pi, \therefore B=\frac{\pi}{3}$ 。

再设最小边为 a ,则最大边为 $2a$ 。

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin(\frac{\pi}{3}-a)} = \frac{2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)}$, 即 $\sin(\frac{\pi}{3}+a) = 2\sin(\frac{\pi}{3}-a)$ 。

即 $\sin \frac{\pi}{3} \cos a + \cos \frac{\pi}{3} \sin a = 2(\sin \frac{\pi}{3} \cos a - \cos \frac{\pi}{3} \sin a)$ 。

$\therefore \tan a = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = \frac{\pi}{6}$ 。

$\therefore$ 三内角分别为 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, 它们的比为 $1:2:3$ 。

【变式1】 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A+B+C=1+\pi, 2, 3$,求 $a+b+c$ 。

考点突破

正弦定理除了利用三角函数的定义及平面几何方法证明之外,还可利用平面几何

证明 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R为 $\triangle ABC$ 的外

接圆半径)。

正弦定理具有把三角形的边长之间关

系相互转化的功能,如考题1,利用正弦定理

把三角形中的 a 和 $2a$ 转化为 $\sin(\frac{\pi}{3}+a) =$

防错档案

1. 新错点

已知 a, b 和 A 解三角形,得 $\sin B =$

$\frac{a}{b} \sin A = m$,此时,易错的地方是忽视角 B 的

专题优化测试

学业水平测试

1. (考点1) 在 $\triangle ABC$ 中,一定成立的等式是()。
A. $a \sin A = b \sin B$ B. $a \cos A = b \cos B$
C. $a \sin B = b \sin A$ D. $a \cos B = b \cos A$
2. (考点5) 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 则 $\triangle ABC$ 是()。
A. 直角三角形 B. 锐角三角形
C. 钝角三角形 D. 等腰三角形
3. (考点3) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 所对的边,若 $A=105^\circ, B=45^\circ, b=2\sqrt{2}$,则 $c=$ 。
4. (考点1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5, b=45^\circ, C=105^\circ$,则其面积 $S=$ 。
5. (考点3) 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=26\text{cm}, b=28\text{cm}, A=50^\circ$,解此三角形。(角度精确到 1° ,边长精确到 1cm)

高考水平测试

1. (考点1) 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$,则 $\sin A:\sin B:\sin C$ 等于()。
A. $5:6:4$ B. $7:5:3$
C. $3:5:7$ D. $4:5:6$
2. (考点1) 满足条件 $a=4, b=3, A=45^\circ$ 的 $\triangle ABC$ 的个数是()。
A. 一个 B. 两个 C. 无数个 D. 不存在
3. (考点3) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{3}, b=1, B=30^\circ$,则 $\triangle ABC$ 的面积是()。
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
4. (考点3, 4, 2008, 北京) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}, B=60^\circ$,那么角 A 等于()。
A. 135° B. 90° C. 15° D. 30°
5. (考点3, 2008, 陕西) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $c=\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, B=120^\circ$,则 a 等于()。
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2}$

答案与提示

板块一 解三角形 第1讲 正弦定理

【变式1】

【变式1】 $\because A+B+C=\pi, \therefore A+B+C=180^\circ$ 。

$\therefore A=30^\circ, B=60^\circ, C=90^\circ$ 。

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:2$ 。

故 $a:b:c=1:\sqrt{2}:2$ 。

【学业水平测试】

1. C [提示:由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $a \sin B = b \sin A$ 。]

2. A [提示:由已知有 $a \sin A = a \sin B, \sin C=3/4 \times 5/4$,又 $a \sin A = \sin C$ 。

$\therefore a+b+c=3+4+5$,故 $\triangle ABC$ 为直角三角形。]

【高考水平测试】

1. B [提示:设 $b+c=4k, c+a=5k, a+b=6k$,联立解得 $a=\frac{7}{2}k, b=\frac{5}{2}k, c=\frac{3}{2}k$ 。依正弦定理有 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=7:5:3$ 。]

2. B [提示: $a>b \Rightarrow A>B=45^\circ$ 或钝角,则 $A=135^\circ$ 。]

3. D [提示: $\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore A=60^\circ$ 或 120° 。]

4. C [提示:由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 。

又 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ 。

$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2$, $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore A=60^\circ$ 或 120° 。

5. D [提示:由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$ 。

超级链接

最佳导学模式,学案式名师指津。方法视窗、规律清单、防错档案,革新传统学习模式。

优化测试

学业水平测试、高考水平测试,习题层级清晰,水平测试立足教材、夯实基础,高考真题再现,提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时,解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案提示

提示解题思路,突破解析模式,规范标准答案,全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

同步专题突破 **超级必考** 高中数学 **5** (必修)

编 委 会

丛书主编:王后雄

本册主编:田祥高

编 者:王艳艳

廖建勋

祁国柱

黄浩胜

黄祥华

雷 虹

江 婷

江芙英

田 军

刘杰峰

彭晓斌

林 丽

魏 兰

刘 毅

肖 燕

苏 敏

宋春雨

刘丽洁

目 录

CONTENTS

板块一 解三角形

第1讲 正弦定理

- 考点1 正弦定理/1
- 考点2 正弦定理的活用/2
- 考点3 利用正弦定理解三角形/3
- 考点4 三角形解的个数的讨论/3
- 考点5 利用正弦定理判断三角形的形状/4
- 考点6 正弦定理的综合应用/5

第2讲 余弦定理

- 考点1 余弦定理/9
- 考点2 利用余弦定理解三角形/10
- 考点3 利用余弦定理判定三角形的形状/11
- 考点4 三角形的面积/12
- 考点5 正弦定理和余弦定理的综合应用/14
- 考点6 余弦定理的交汇问题/14

第3讲 解三角形的实际应用

- 考点1 测量距离/17
- 考点2 测量高度/18
- 考点3 测量角度/20
- 考点4 解三角形的实际应用问题/20

第4讲 解三角形中的几个综合问题探究

- 综合探究1 解三角形/25
- 综合探究2 正弦定理与余弦定理的综合探究/26
- 综合探究3 解三角形在几何中的应用/28
- 综合探究4 解三角形在实际问题中的应用/29

综合探究5 与解三角形有关的交汇问题/30

板块二 数列

第5讲 数列

- 考点1 数列的概念/34
- 考点2 数列的通项公式/35
- 考点3 函数与数列/36
- 考点4 递推数列/38
- 考点5 S_n 与 a_n 的关系/39
- 考点6 递推方法/40

第6讲 等差数列

- 考点1 等差数列的概念/43
- 考点2 等差数列的通项公式/44
- 考点3 等差中项/45
- 考点4 等差数列的设项/46
- 考点5 等差数列的性质/46
- 考点6 等差数列与一次函数/47
- 考点7 辅助数列/48
- 考点8 等差数列模型的实际应用/48

第7讲 等差数列的前 n 项和

- 考点1 等差数列的前 n 项和公式/51
- 考点2 等差数列的前 n 项和与二次函数/53
- 考点3 等差数列前 n 项和的最值问题/53
- 考点4 等差数列前 n 项和的性质/54
- 考点5 特殊数列的前 n 项和/55
- 考点6 等差数列的实际应用/57

第8讲 等比数列

- 考点1 等比数列的定义/60
- 考点2 等比中项/61
- 考点3 等比数列的通项公式/62
- 考点4 等比数列的判定/63
- 考点5 等比数列的设项/64
- 考点6 等比数列的性质/64
- 考点7 等比数列与等差数列/65
- 考点8 辅助数列/66
- 考点9 等比数列模型/67

第9讲 等比数列的前 n 项和

- 考点1 等比数列的前 n 项和公式/71
- 考点2 等比数列前 n 项和的性质/73
- 考点3 某些特殊数列的求和/74
- 考点4 等比数列的综合问题/74
- 考点5 等比数列前 n 项和的实际应用/76

第10讲 数列中的几个综合问题探究

- 综合探究1 求数列通项公式的常用方法/80
- 综合探究2 数列求和的常用方法/83
- 综合探究3 数列的综合问题/86
- 综合探究4 数列在实际问题中的应用/88
- 综合探究5 数列中的研究性学习问题/90

板块三 不等式

第11讲 不等关系

- 考点1 不等关系/94
- 考点2 不等式的基本性质/96
- 考点3 不等式的性质/97
- 考点4 利用不等式性质求取值范围/98
- 考点5 不等式性质与函数的交汇/99
- 考点6 不等关系的实际应用/100

第12讲 一元二次不等式

- 考点1 一元二次不等式及其解法/103
- 考点2 三个“二次”之间的关系/104
- 考点3 解一元二次不等式的逆向问题/106
- 考点4 含参数的一元二次不等式/107
- 考点5 一元高次不等式的解法/108
- 考点6 分式不等式的解法/108
- 考点7 一元二次不等式的实际应用问题/110

第13讲 二元一次不等式(组)与平面区域

- 考点1 二元一次不等式与平面区域/113
- 考点2 二元一次不等式组与平面区域/115
- 考点3 二元不等式(组)与平面区域/117

第14讲 简单的线性规划问题

- 考点1 线性规划/120
- 考点2 解答线性规划问题的两个误区/122
- 考点3 线性规划的实际应用/123
- 考点4 最优整数解问题/125
- 考点5 图解法的应用/126

第15讲 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$

- 考点1 基本不等式/129
- 考点2 基本不等式的活用/131
- 考点3 利用基本不等式求最值/132
- 考点4 利用基本不等式证明不等式/135
- 考点5 基本不等式的实际应用/136

第16讲 不等式中的几个综合问题探究

- 综合探究1 一元二次方程根的分布/140
- 综合探究2 不等式解法的基本思想方法/142
- 综合探究3 求参数的取值范围/145
- 综合探究4 不等式与函数/147
- 综合探究5 不等式在实际问题中的应用/149

模块5 水平测试/153

答案与提示(单独成册)

板块一 解三角形

第1讲 正弦定理

课标解读

1. 通过对特殊三角形边角间数量关系的研究,发现正弦定理,初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律.

2. 了解正弦定理的证明,能运用正弦定理解决有关三角形,以及运用正弦定理解决相关问题.

3. 通过对本讲的学习,进一步增强灵活运用所学知识分析问题、解决问题的能力.

学法导引

学习本讲内容时,要善于运用平面几何知识以及平面向量知识证明正弦定理;应掌握用正弦定理将三角形的边角之间关系相互转化的功能;已知两边和其中一边的对角解三角形时,解的个数的判定是本讲学习的难点,突破难点的方法是:充分利用平面几何作图方法将解的个数与圆、射线之间的公共点个数联系起来,或结合正弦函数图象以及三角形内角和定理分析解决问题.

考点分类例析

考点1 正弦定理

核心总结

在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

● 考题1 若 $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 满足 $A+C=2B$,且最大边为最小边的2倍,求三角形三内角之比.

【解析】 设 $\triangle ABC$ 的三内角从小到大依次为 $B-a, B, B+a$.

$$\because A+B+C=\pi, \therefore B-a+B+B+a=\pi, \therefore B=\frac{\pi}{3}.$$

再设最小边为 a ,则最大边为 $2a$.

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{3}-a)} = \frac{2a}{\sin(\frac{\pi}{3}+a)}, \text{ 即 } \sin(\frac{\pi}{3}+a) = 2\sin(\frac{\pi}{3}-a).$$

$$\text{即 } \sin \frac{\pi}{3} \cos a + \cos \frac{\pi}{3} \sin a = 2(\sin \frac{\pi}{3} \cos a - \cos \frac{\pi}{3} \sin a),$$

$$\therefore \tan a = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = \frac{\pi}{6}.$$

$\therefore$ 三内角分别为 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, 它们的比为 $1:2:3$.

【变式1-1】 在 $\triangle ABC$ 中,若 $A:B:C=1:2:3$,求 $a:b:c$.

● 考题2 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan A + \tan C + \tan \frac{\pi}{3} = \tan A \tan C \tan \frac{\pi}{3}$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 求 $a+c$ 的取值范围.

难点突破

正弦定理除了利用三角函数的定义及平面向量方法证明之外,还可利用平面几何

证明 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径,如图1-1所示),也可以利用三角形面积来证明(如图1-2, AB 边上高 $CD = b \sin A$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} cb \sin A$, 同理 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$, $\therefore \frac{1}{2} cb \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$,

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}).$$

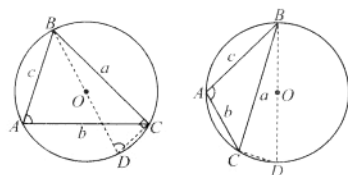


图1-1

【解析】 (1) 由 $\tan A + \tan C + \tan \frac{\pi}{3} = \tan A \tan C \tan \frac{\pi}{3}$ 得

$$\tan A + \tan C = -\tan \frac{\pi}{3} (1 - \tan A \tan C),$$

可知 $1 - \tan A \tan C \neq 0$, 否则 $\tan A \tan C = 1$, $\tan A + \tan C = 0$, 互相矛盾.

$$\therefore \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = -\tan \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } \tan(A+C) = -\sqrt{3}.$$

$$\text{而 } 0 < A+C < \pi, \text{ 所以 } A+C = \frac{2\pi}{3}. \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由正弦定理有 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 1,$$

$$\therefore a = \sin A, c = \sin C = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right),$$

$$\therefore a+c = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) = \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{于是 } \frac{1}{2} < \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \text{ 则 } a+c \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right].$$

【变式 1-2】 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2\sqrt{2}$, $a > b$, $C = \frac{\pi}{4}$, $\tan A \tan B = 6$, 试求 a, b 及三角形的面积.

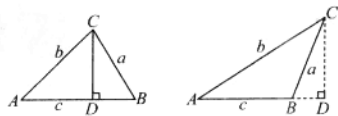


图 1-2

方法视窗

正弦定理具有把三角形的边角之间关系相互转化的功能. 如考题 1, 利用正弦定理把三角形中的 a 和 $2a$ 转化为 $\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$, 从而顺利地求出 A, B, C 三内角.

考点 2 正弦定理的活用

核心总结

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 有如下变形公式, 它在解题中有着广泛的应用.

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}; \quad (2) a \sin B = b \sin A, \quad c \sin B = b \sin C, \quad c \sin A = a \sin C;$$

$$(3) a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C; \quad (4) \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R} \text{ (其中 } R \text{ 为三角形外接圆的半径)};$$

$$(5) a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

● 考题 3 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}$.

【解析】 由正弦定理将等式左边的边统一转化为角的三角函数, 从而转化成三角恒等式证明的问题.

$$\text{证明 } \because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$\therefore \text{左边} = \frac{2R \sin A - 2R \sin C \cos B}{2R \sin B - 2R \sin C \cos A} = \frac{\sin(B+C) - \sin C \cos B}{\sin(A+C) - \sin C \cos A} \\ = \frac{\sin B \cos C}{\sin A \cos C} = \frac{\sin B}{\sin A} = \text{右边}.$$

$$\text{【变式 2-1】 在 } \triangle ABC \text{ 中, 求证: } \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 0.$$

方法视窗

如何活用正弦定理, 其关键在于观察、分析问题的结构特征, 确定解题的基本方向, 再灵活地选择相应的公式. 如在考题 3 中, 待证明的恒等式左边有边角关系混在一起, 而右边只有角之间的关系, 因此应将左边的“边”统一转化为“角”来表示.

考点3 利用正弦定理解三角形

核心总结

1. 解三角形:一般的,我们把三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

2. 利用正弦定理可解决下列两类型的三角形:

(1) 已知两角及一边, 求其余两边; (2) 已知两边及其中一边的对角, 求另两角及另一边.

◎ 考题4 在 $\triangle ABC$ 中, (1) $a=\sqrt{3}, b=2, B=45^\circ$, 求 A ; (2) $A=30^\circ, a=\sqrt{2}, b=2$, 求 B ; (3) $a=3, b=4, A=60^\circ$, 求 B ; (4) $A=30^\circ, B=45^\circ, a=2$, 求 c .

【解析】 利用正弦定理求解.

$$(1) \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A \approx 37.76^\circ$ 或 $A \approx 142.24^\circ$.

而 $142.24^\circ + 45^\circ > 180^\circ$, 这与 $A+B < 180^\circ$ 矛盾, $\therefore A \approx 37.76^\circ$.

$$(2) \text{ 由正弦定理得 } \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore B = 45^\circ \text{ 或 } 135^\circ.$$

$$(3) \text{ 由正弦定理得 } \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{3} > 1, \therefore \text{ 这样的角 } B \text{ 不存在.}$$

$$(4) \because C = 180^\circ - (A+B) = 105^\circ, \text{ 又 } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

【变式3-1】 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=45^\circ$, 求 A, C 和 c .

方法视窗

由考题4可知, 利用正弦定理解三角形的基本类型及解法如下:

条件	解法
A, B, a	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, C = \pi - (A+B), c = \frac{a \sin C}{\sin A}$
a, b, A	$\sin B = \frac{b}{a} \sin A, C = \pi - (A+B), c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

防错档案

1. 易错点

已知 a, b 和 A 解三角形, 得 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = m$, 此时, 易错的地方是忽视钝角 B 的存在 (如在考题4(1)中漏掉一解 $A \approx 142.24^\circ$). 事实上, 由正弦函数 $y = \sin x$ 的图象可知, 一般在 $(0, \pi)$ 上满足 $\sin B = m$ 的角有两个, 这两个解是否是三角形的解, 还需要讨论, 参看“考点4”.

2. 防错良方

在 $(0, \pi)$ 上满足 $\sin B = m$ 的角有两个.

考点4 三角形解的个数的讨论

核心总结

已知 a, b, A , 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = m$, 进一步求解时则需要利用 $\sin B$ 的取值范围及 $A+B < \pi$ 进行讨论:

(1) 当 $\sin B > 1$ 时, 则这样的角 B 不存在, 即三角形无解.

(2) 当 $\sin B \leq 1$ 时, 则在 $[0^\circ, 180^\circ]$ 内存在角 B , 使 $\sin B = m$, 但此时三角形不一定有解. 即

① 当 $\sin B = 1$ 时, $B = 90^\circ$, 若 $A < 90^\circ$ 时, 则三角形有一解; 若 $A \geq 90^\circ$, 则无解.

② 当 $\sin B = m < 1$ 时, 设满足 $\sin B = m$ 的锐角为 α , 钝角为 β , 则当 $A + \alpha > 180^\circ$ 时三角形无解; $A + \alpha < 180^\circ$ 时三角形有解, 且当 $A + \beta < 180^\circ$ 时有两解, 当 $A + \beta \geq 180^\circ$ 时有一解.

◎ 考题5 不解三角形, 判断下列各题解的个数.

(1) $a=5, b=4, A=120^\circ$; (2) $a=7, b=14, A=150^\circ$;

(3) $a=9, b=10, A=60^\circ$; (4) $c=50, b=72, C=135^\circ$.

【解析】 (1) $\sin B = \frac{b}{a} \sin 120^\circ = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \triangle ABC$ 有一解.

(2) $\sin B = \frac{b}{a} \sin 150^\circ = 1$, 而 $A = 150^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 无解.

方法视窗

讨论三角形解的个数时应抓住两点: 一是其正弦值与“1”的大小关系, 从而决定等于此正弦值的角是否存在; 二是由此正弦值所确定的角 (在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 内) 有几个? 它们与已知角的和是否小于 180° ?

也可用几何作图方法讨论, 即已知 a, b 及 A , 则:

(3) $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{10}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$, 而 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{5\sqrt{3}}{9} < 1$, $\therefore$ 当 B 为锐角时, 满足 $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的角有 $60^\circ < B < 90^\circ$, 故对应的钝角 B 有 $90^\circ < B < 120^\circ$, 也满足 $A + B < 180^\circ$, 故 $\triangle ABC$ 有两解.

$$(4) \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{72}{50} \sin C > \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

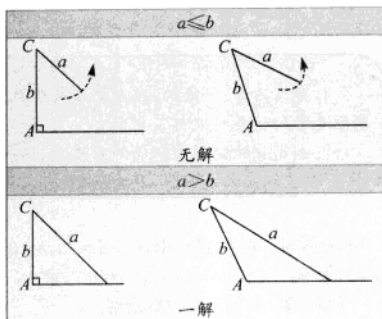
$\therefore B > 45^\circ$, $\therefore B + C > 180^\circ$, 故 $\triangle ABC$ 无解.

【变式 4-1】在 $\triangle ABC$ 中, 判断下列各题解的情况:

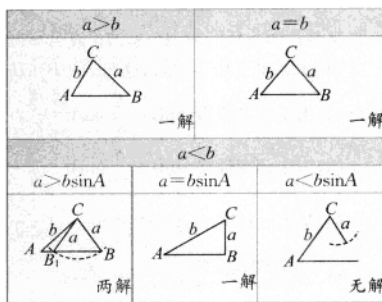
(1) $a=7, b=14, A=30^\circ$; (2) $a=30, b=25, A=150^\circ$;

(3) $a=6, b=9, A=45^\circ$; (4) $b=9, c=10, B=60^\circ$.

(1) 当 $A \geq 90^\circ$ 时



(2) 当 A 为锐角时



考点 5 利用正弦定理判断三角形的形状

核心总结

判断三角形形状问题, 主要是判定三角形是否为某些特殊的三角形, 如直角三角形、锐角三角形、钝角三角形、等腰三角形、等边三角形等.

● 考题 6 根据下列条件判断 $\triangle ABC$ 的形状.

$$(1) \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{b}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{C}{2}};$$

$$(2) (a^2 + b^2) \sin(A - B) = (a^2 - b^2) \sin(A + B).$$

【解析】(1) 根据正弦定理有 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$.

代入已知等式中有

$$\begin{aligned} \frac{2R \sin A}{\cos \frac{A}{2}} &= \frac{2R \sin B}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{2R \sin C}{\cos \frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin B}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin C}{\cos \frac{C}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \\ &\Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{而 } 0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2}.$$

故 $\triangle ABC$ 是正三角形.

(2) 由正弦定理知 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$. 将它们代入已知条件可得

方法视窗

1. 判断三角形的形状, 最终目标是判定三角形是否为某些特殊的三角形, 其研究途径有二: (1) 研究边与边之间的关系: 是否两边相等, 是否三边相等, 是否满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 等; (2) 研究角与角的关系: 是否有两角相等, 是否三个角相等, 有无直角, 有无钝角, 是否均为锐角等.

2. 当所给的条件含有边和角, 判定三角形的形状时, 应利用正弦定理将条件统一为“边”之间的关系或“角”之间的关系, 如考题 6.

防错档案

1. 易错点

在考题 6(2) 的求解过程中, 一要注意 $\sin^2 A - \sin^2 B$ 的变形技巧; 二要注意等式①

$$(\sin^2 A + \sin^2 B) \sin(A-B) = (\sin^2 A - \sin^2 B) \sin(A+B)$$

$$\text{又} \because \sin^2 A - \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2A}{2} - \frac{1 - \cos 2B}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2B - \cos 2A)$$

$$= \sin(A+B) \sin(A-B),$$

$$\therefore (\sin^2 A + \sin^2 B) \sin(A-B) = \sin^2(A+B) \sin(A-B),$$

$$\therefore \sin(A-B) (\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) = 0 (\because A+B+C=\pi),$$

$$\therefore \sin(A-B) = 0 \text{ 或 } \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 0,$$

$$\therefore A=B \text{ 或 } a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

【变式 5-1】 根据下列条件判断 $\triangle ABC$ 的形状:

(1) $\lg a - \lg c = \lg \sin B = -\lg \sqrt{2}$, 且 B 为锐角;

(2) $b \sin B = c \sin C$, 且 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

中两边的 $\sin(A-B)$ 不可轻易约掉, 否则会遗失一种情况.

2. 防错良方

解三角形时不要在等式两边轻易地除以含有边角的因式.

考点 6 正弦定理的综合应用

核 心 总 结

利用正弦定理解决三角形中的综合问题的关键在于: 充分利用正弦定理的边角关系相互转化这一功能.

常见的综合问题有: 正弦定理与平面向量、三角形、三角函数的综合交汇问题.

● 考题 7 已知 $|a|=8$, $|b|=7$, a 与 $a+b$ 的夹角为 60° , 求 a 与 b 的夹角.

【解析】 利用平行四边形法则画出示意图, 利

用图形的直观性及正弦定理求解.

如图 1-3 所示, 以 a 与 b 为邻边作 $\square ABCD$, 使 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, $\overrightarrow{AC}=a+b$, $\angle BAC=60^\circ$.

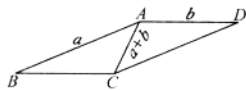


图 1-3

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB},$$

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{8 \sin 60^\circ}{7} \approx 0.9897,$$

$$\therefore \angle ACB = 81.79^\circ \text{ 或 } \angle ACB = 98.21^\circ.$$

故 a 与 b 的夹角为 141.79° 或 158.21° .

【变式 6-1】 (2007, 山东) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\tan C = 3\sqrt{7}$.

(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{5}{2}$, 且 $a+b=9$, 求 c .

方法视窗

1. 解决平面向量与正弦定理应用的综合问题, 应充分利用向量的几何特征, 将向量问题转化为三角形的问题, 如考题 7.

2. 利用正弦定理解决有关三角形的综合问题, 关键是充分利用正弦定理所具有的边角互化的功能, 如考题 8.

3. 正弦定理与三角函数的交汇问题, 其核心考查的是三角函数的有关知识, 因此应以正弦定理为工具, 将问题转化为三角函数问题.

● 考题8 如图1-4,在等腰 $\triangle ABC$ 中,底边 $BC=1$,底角 B 的平分线 BD 交 AC 于 D ,求 BD 的取值范围.

【解析】 设 $\angle ABC=2\alpha$,则 $\angle ABD=\angle CBD=\alpha$,

$$\therefore \angle ACB=2\alpha, A=180^\circ-4\alpha,$$

$$\angle BDC=A+\angle ABD=180^\circ-3\alpha.$$

因为 $BC=1$,在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \angle BDC}, \text{ 即 } \frac{BD}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin(180^\circ-3\alpha)},$$

$$\text{所以 } BD = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1} = \frac{2}{4\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

因为 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$,所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < 1$.

而当 $\cos\alpha$ 增大时, BD 递减,且当 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $BD=\sqrt{2}$;当 $\cos\alpha=1$ 时, $BD=\frac{2}{3}$.

故 BD 的取值范围为 $(\frac{2}{3}, \sqrt{2})$.

【变式6-2】 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.求证: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

【变式6-3】 在 $\triangle ABC$ 中,若 $C=3B$,求 $\frac{c}{b}$ 的取值范围.

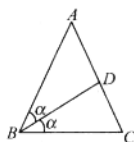


图1-4

● 防错档案

1. 易错点

解决正弦定理的综合应用问题(特别涉及取值范围、最值等问题),易错点是:忽视对角的取值范围的研究.如在考题8中,若不研究 α 的取值范围,就会得出错误的结论.而在变式6-3中,由正弦定理及三角恒等变换得到 $\frac{c}{b} = 4\cos^2 B - 1$,若没有研究角 B 的取值范围,误认为 $0 \leq \cos^2 B < 1$,就会得出“ $0 < \frac{c}{b} < 3$ ”的错误结论.

2. 防错良方

求变量取值范围及最值时必须研究变量角的取值范围.

● 考题9 (2007,全国)在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$,边 $BC=2\sqrt{3}$.设内角 $B=x$,周长为 y .

(1)求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

(2)求 y 的最大值.

【解析】 (1) $\triangle ABC$ 的内角和 $A+B+C=\pi$,由 $A=\frac{\pi}{3}$, $B>0$, $C>0$ 得

$$0 < B < \frac{2\pi}{3}.$$

应用正弦定理知

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 4\sin x, AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

因为 $y=AB+BC+AC$,

$$\text{所以 } y = 4\sin x + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) + 2\sqrt{3} \quad (x \in (0, \frac{2\pi}{3})).$$

$$(2) \text{ 因为 } y = 4\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}\left(x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)\right),$$

所以当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

【变式 6-4】(2007, 湖北) 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 且满足 $0 \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \leq 6$, 设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ .

(1) 求 θ 的取值范围;

(2) 求函数 $f(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

专题优化测训

学业水平测试

- (考点 1) 在 $\triangle ABC$ 中, 一定成立的等式是().
A. $a\sin A = b\sin B$ B. $a\cos A = b\cos B$
C. $a\sin B = b\sin A$ D. $a\cos B = b\cos A$
- (考点 5) 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{5}{\sin C}$, 则 $\triangle ABC$ 是().
A. 直角三角形 B. 锐角三角形
C. 钝角三角形 D. 等腰三角形
- (考点 3) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 所对的边, 若 $A = 105^\circ, B = 45^\circ, b = 2\sqrt{2}$, 则 $c =$ _____.
- (考点 6) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 5, B = 45^\circ, C = 105^\circ$, 则其面积 $S =$ _____.
- (考点 3, 4) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 26\text{cm}, b = 28\text{cm}, A = 50^\circ$, 解此三角形. (角度精确到 1° , 边长精确到 1cm)

高考水平测试

- (考点 1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(b+c) : (c+a) : (a+b) = 4 : 5 : 6$, 则 $\sin A : \sin B : \sin C$ 等于().
A. $6 : 5 : 4$ B. $7 : 5 : 3$
C. $3 : 5 : 7$ D. $4 : 5 : 6$
- (考点 4) 满足条件 $a = 4, b = 3\sqrt{2}, A = 45^\circ$ 的 $\triangle ABC$ 的个数是().
A. 一个 B. 两个 C. 无数个 D. 不存在
- (考点 3) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{3}, b = 1, B = 30^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是().
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (考点 3, 4, 2008, 北京) 已知 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, B = 60^\circ$, 那么角 A 等于().
A. 135° B. 90° C. 45° D. 30°
- (考点 3, 2008, 陕西) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c = \sqrt{2}, b = \sqrt{6}, B = 120^\circ$, 则 a 等于().
A. $\sqrt{6}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
- (考点 1, 2005, 江苏) 若 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}, BC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为().
A. $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ B. $4\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
C. $6\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ D. $6\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
- (考点 6, 2005, 辽宁) 若钝角三角形三内角的度数成等差数列,

且最大边长与最小边长的比值为 m , 则 m 的取值范围是().

- A. (1, 2) B. (2, +∞) C. [3, +∞) D. (3, +∞)

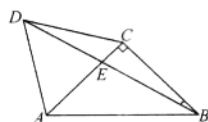
8. (考点 6, 2008, 浙江) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $(\sqrt{3}b - c)\cos A = a\cos C$, 则 $\cos A =$ _____.

9. (考点 4) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知条件如下, 这些三角形有没有解? 若有解, 有几个解? 并说明理由.

- (1) $a=16, b=20, A=106^\circ$; (2) $a=30, b=30, A=50^\circ$;
(3) $a=20, b=34, A=72^\circ$; (4) $a=18, b=22, A=30^\circ$.

10. (考点 5) 小明家和小军家相距 3 千米, 小军家在小明家东边距学校 4 千米, 若学校在小明家东北方向上, 问小明家距学校多少千米(结果保留两个有效数字)?

11. (考点 6, 2008, 海南、宁夏) 如图, $\triangle ACD$ 是等边三角形, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 交 AC 于 E , $AB=2$.



第 11 题图

(1) 求 $\cos \angle CBE$ 的值;

(2) 求 AE .

12. (考点 6, 2008, 全国) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = -\frac{5}{13}$, $\cos C = \frac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{33}{2}$, 求 BC 的长.

第2讲 余弦定理

课标解读

1. 理解余弦定理的证明, 熟练掌握余弦定理及其变形形式.
2. 会用余弦定理及其变形形式解三角形.
3. 能综合运用正弦定理、余弦定理及三角形的面积公式等解与三角形有关的问题.

学法导引

本讲的重点是余弦定理的证明及其应用. 余弦定理揭示了任意三角形的边角之间的客观规律, 是解三角形的重要工具, 它是以前学习的三角函数与平面向量知识在三角形中的交汇点. 本讲学习的难点是准确把握余弦定理的作用及适用范围, 突破难点的关键在于把握它的结构特征.

考点分类例析

考点1 余弦定理

核心总结

余弦定理: 三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍, 即 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacosB$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$.

● 考题1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$, $C = 120^\circ$, 求 c 边的长.

【解析】此题是典型的利用余弦定理的题, 已知两边及夹角, 求第三边的问题.

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \\&= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\cos 120^\circ} \\&= \sqrt{10}.\end{aligned}$$

【变式1-1】已知在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, 最大边和最小边的长是方程 $3x^2 - 27x + 32 = 0$ 的两实根, 求边 BC 的长.

难点突破

余弦定理的证明

$$\begin{aligned}a^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\&= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\&= b^2 + c^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A \\&= b^2 + c^2 - 2bccosA.\end{aligned}$$

也可以利用三角函数定义及坐标法来证明.

方法视窗

1. 用方程的思想理解和运用余弦定理: 当等式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ 中含有未知数时, 等式便成为方程, 式中有四个量 a, b, c 和 $cosA$, 知道任意三个便可解出另一个, 如考题1.

2. 注意余弦定理的变形公式的灵活运用:

$$(1) b^2 + c^2 - a^2 = 2bccosA, a^2 + c^2 -$$

● 考题2 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a : b : c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$, 求 $\triangle ABC$ 的内角的度数.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三边满足: ① $a^2 - a - 2b - 2c = 0$; ② $a + 2b - 2c + 3 = 0$. 求 $\triangle ABC$ 中最大角的大小.

【解析】(1) 设 $a = 2k, b = \sqrt{6}k, c = (\sqrt{3} + 1)k$, 由余弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6k^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 k^2 - 4k^2}{2(\sqrt{3} + 1)k \cdot \sqrt{6}k} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore A = 45^\circ.$$

同理可得 $\cos B = \frac{1}{2}$, $\therefore B = 60^\circ$, $\therefore C = 180^\circ - A - B = 75^\circ$.

(2) ①式加②式得 $a^2 - 4c + 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}(a^2 + 3)$,

将上式代入②式中得 $b = \frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3)$.

$\because b > 0$, 即 $\frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3) > 0 \Rightarrow a > 3$ ($a < -1$ 舍),

当 $a > 3$ 时, $b - c = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow b < c$.

$$c - a = \frac{1}{4}a^2 - a + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(a-1)(a-3) > 0 \Rightarrow c > a.$$

故边 c 是最大边,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + [\frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3)]^2 - [\frac{1}{4}(a^2 + 3)]^2}{2a \times \frac{1}{4}(a^2 - 2a - 3)} = -\frac{1}{2},$$

$\therefore C = 120^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 中最大角 C 为 120° .

【变式 1.2】 在 $\triangle ABC$ 中, $A > B > C$, 三边的长为连续的自然数, 且 $a = 2 \cdot c \cdot \cos C$, 求 $\sin A : \sin B : \sin C$ 的值.

$$b^2 = 2accosB, a^2 + b^2 - c^2 = 2abcosC;$$

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

考点 2 利用余弦定理解三角形

核 心 总 结

利用余弦定理可解如下两类型的三角形:

(1) 已知两边及夹角, 求第三边; (2) 已知三边, 求角.

两边及夹角(如 a, b, C)	余弦定理 正弦定理	先用余弦定理求第三边, 再用正弦定理求小边的对角, 再由 $A + B + C = 180^\circ$ 求出另一角, 在有解时只有一解
三边	余弦定理	先用余弦定理求出较小的两边所对的角, 再由 $A + B + C = 180^\circ$ 求出第三角

● 考题 3 根据下列条件解三角形.

(1) $b = 8, c = 3, A = 60^\circ$; (2) $a = 20, b = 29, c = 21$.

【解析】 (1) 根据余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \cos 60^\circ = 64 + 9 - 24 = 49,$$

$\therefore a = 7$, 由推论得

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{13}{14} \approx 0.9286,$$

$\therefore C = 22^\circ$, $\therefore B = 180^\circ - 60^\circ - 22^\circ = 98^\circ$.

(2) 根据余弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{29^2 + 21^2 - 20^2}{2 \times 29 \times 21} \approx 0.7241,$$

$\therefore A = 44^\circ$.

$$\text{又 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{20^2 + 21^2 - 29^2}{2 \times 20 \times 21} = 0,$$

● 方法视窗

已知两边及其中一边的对角, 可用余弦定理求解(如变式 2.1), 有解、无解、有几解都一目了然, 避免了用正弦定理后还要进行讨论的麻烦. 但要注意的是由余弦定理得到关于第三边的方程, 如果是一个无理系数的一元二次方程, 求解就比较麻烦.