Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

Chaoji Ketang

新课标

超级课堂

丛书主编/王后雄　本册主编/田祥高

高中数学

5

(必修)

- 考点分类例析
- 方法视窗导引
- 防错档案预警
- 专题优化测训

華中師範大學出版社

新课标

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

丛书主编/王后雄　本册主编/田祥高

超级课堂

高中数学

5

(必修)

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

同步专题突破超级课堂 高中数学5(必修)丛书主编:王后雄,本册主编:田祥高
—武汉:华中师范大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-5622-3786-0
Ⅰ.同… Ⅱ.①王… ②田… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 167389 号

同步专题突破超级课堂 高中数学5(必修)

丛书主编:王后雄　　**本册主编**:田祥高
责任编辑:张桂娜　王金娥　　**责任校对**:罗　艺　　**封面设计**:甘　英
选题设计:第一编辑室(027－67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027－67863040　027－67867076　027－67867371　027－67861549
传真:027－67863291　　**邮购**:027－67861321
网址:http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北省鄂南新华印务有限公司　　**督印**:章光琼
字数:353 千字
开本:889mm×1194mm　1/16　　**印张**:12.5
版次:2009 年 3 月第 1 版　　**印次**:2009 年 3 月第 1 次印刷
定价:22.50 元

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材的要求，指明学习和考试具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

板块一　解三角形

第1讲　正弦定理

课标解读　　学法导引

考点分类例析

考点1　正弦定理

专题优化测训

学业水平测试

高考水平测试

答案与提示

超级链接

最佳导学模式，学案式名师指津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

优化测训

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

同步专题突破超级课堂 高中数学5（必修）

目 录

板块一　解三角形

第1讲　正弦定理

课标解读

1. 通过对特殊三角形边角间数量关系的研究，发现正弦定理，初步学会运用由特殊到一般的思想方法发现数学规律.

2. 了解正弦定理的证明，能运用正弦定理解有关三角形，以及运用正弦定理解决相关问题.

3. 通过对本讲的学习，进一步增强灵活运用所学知识分析问题、解决问题的能力.

学法导引

学习本讲内容时，要善于运用平面几何知识以及平面向量知识证明正弦定理；应掌握用正弦定理将三角形的边角之间关系相互转化的功能；已知两边和其中一边的对角解三角形时，解的个数的判定是本讲学习的难点，突破难点的方法是：充分利用平面几何作图方法将解的个数与圆、射线之间的公共点个数联系起来，或结合正弦函数图象以及三角形内角和定理分析解决问题.

考点分类例析

考点1　正弦定理

核心总结

在一个三角形中，各边和它所对的角的正弦的比相等，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

考题1　若△ABC的三内角A、B、C满足$A+C=2B$，且最大边为最小边的2倍，求三角形三内角之比.

【解析】　设△ABC的三内角从小到大依次为$B-\alpha$、B、$B+\alpha$.

$\because A+B+C=\pi$，　$\therefore B-\alpha+B+B+\alpha=\pi$，　$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

再设最小边为a，则最大边为$2a$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$，即　$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

即　$\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ 三内角分别为$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$，它们的比为$1:2:3$.

【变式1-1】　在△ABC中，若$A:B:C=1:2:3$，求$a:b:c$.

考题2　在△ABC中，内角A、B、C的对边分别为a、b、c. 其中$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan A+\tan C+\tan\frac{\pi}{3}=\tan A\tan C\tan\frac{\pi}{3}$.

(1)求角B的大小；

(2)求$a+c$的取值范围.

难点突破

正弦定理除了利用三角函数的定义及平面向量方法证明之外，还可利用平面几何证明$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为△$ABC$外接圆的半径，如图1-1所示），也可以利用三角形面积来证明（如图1-2，AB边上高$CD=b\sin A$，　$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}cb\sin A$，同理$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ca\sin B$，　$\therefore \frac{1}{2}cb\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$，$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$）.

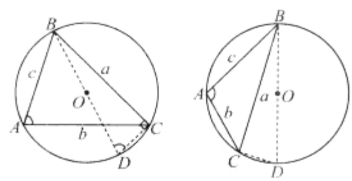


图1-1

【解析】 (1)由 $\tan A+\tan C+\tan\frac{\pi}{3}=\tan A\tan C\tan\frac{\pi}{3}$ 得

$$\tan A+\tan C=-\tan\frac{\pi}{3}(1-\tan A\tan C),$$

可知 $1-\tan A\tan C\neq 0$,否则 $\tan A\tan C=1$,$\tan A+\tan C=0$,互相矛盾.

$\therefore \frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\tan\frac{\pi}{3}$,即 $\tan(A+C)=-\sqrt{3}$.

而 $0<A+C<\pi$,所以 $A+C=\frac{2\pi}{3}$. $\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=1$,

$\therefore a=\sin A$,$c=\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$,

$\therefore a+c=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$, $\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

于是 $\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,则 $a+c$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$.

【变式 1-2】 在△ABC 中,$c=2\sqrt{2}$,$a>b$,$C=\frac{\pi}{4}$,$\tan A\tan B=6$,试求 a、b 及三角形的面积.

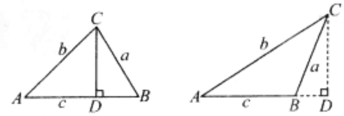


图 1-2

方法视窗

正弦定理具有把三角形的边角之间关系相互转化的功能.如考题 1,利用正弦定理把三角形中的 a 和 $2a$ 转化为 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,从而顺利地求出 A、B、C 三内角.

考点 2 正弦定理的活用

核心总结

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 有如下变形公式,它在解题中有着广泛的应用.

(1)$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$; (2)$a\sin B=b\sin A$, $c\sin B=b\sin C$, $c\sin A=a\sin C$;

(3)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$; (4)$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$(其中 R 为三角形外接圆的半径);

(5)$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

考题 3 在△ABC 中,求证:$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$.

【解析】 由正弦定理将等式左边的边统一转化为角的三角函数,从而转化成三角恒等式证明的问题.

证明 $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$$\therefore 左边=\frac{2R\sin A-2R\sin C\cos B}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}=\frac{\sin(B+C)-\sin C\cos B}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$$

$$=\frac{\sin B\cos C}{\sin A\cos C}=\frac{\sin B}{\sin A}=右边.$$

【变式 2-1】 在△ABC 中,求证:$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

方法视窗

如何活用正弦定理,其关键在于观察、分析问题的结构特征,确定解题的基本方向,再灵活地选择相应的公式.如在考题 3 中,待证明的恒等式左边有边角关系混在一起,而右边只有角之间的关系,因此应将左边的"边"统一转化为"角"来表示.

考点3 利用正弦定理解三角形

核心总结

1. 解三角形：一般的，我们把三角形的三个角 A、B、C 和它们的对边 a、b、c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

2. 利用正弦定理可解决下列两类型的三角形：

(1)已知两角及一边，求其余两边； (2)已知两边及其中一边的对角，求另两角及另一边.

考题4 在△ABC中，(1) $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$B=45^\circ$，求A； (2) $A=30^\circ$，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，求B； (3) $a=3$，$b=4$，$A=60^\circ$，求B； (4) $A=30^\circ$，$B=45^\circ$，$a=2$，求c.

【解析】 利用正弦定理求解.

(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

又 $A\in(0,\pi)$， ∴ $A\approx37.76^\circ$或$A\approx142.24^\circ$.

而 $142.24^\circ+45^\circ>180^\circ$，这与 $A+B<180^\circ$矛盾， ∴ $A\approx37.76^\circ$.

(2)由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ∴ $B=45^\circ$或135°.

(3)由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{2}{\sqrt{3}}>1$， ∴ 这样的角$B$不存在.

(4)∵ $C=180^\circ-(A+B)=105^\circ$，又$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，

∴ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin75^\circ}{\sin30^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

【变式3-1】 在△ABC中，已知 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，求A、C和c.

方法视窗

由考题4可知，利用正弦定理解三角形的基本类型及解法如下：

条件	解法
A、B、a	$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，$C=\pi-(A+B)$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$
a、b、A	$\sin B=\frac{b}{a}\sin A$，$C=\pi-(A+B)$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

防错档案

1. 易错点

已知 a、b 和 A 解三角形，得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=m$，此时，易错的地方是忽视钝角$B$的存在(如在考题4(1)中漏掉一解 $A\approx142.24^\circ$). 事实上，由正弦函数 $y=\sin x$ 的图象可知，一般在$(0,\pi)$上满足 $\sin B=m$ 的角有两个，这两个解是否是三角形的解，还需要讨论，参看“考点4”.

2. 防错良方

在$(0,\pi)$上满足 $\sin B=m$ 的角有两个.

考点4 三角形解的个数的讨论

核心总结

已知 a、b、A，由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=m$，进一步求解时则需要利用 $\sin B$ 的取值范围及 $A+B<\pi$ 进行讨论：

(1)当 $\sin B>1$ 时，则这样的角B不存在，即三角形无解.

(2)当 $\sin B\leqslant1$ 时，则在$[0^\circ,180^\circ]$内存在角B，使 $\sin B=m$，但此时三角形不一定有解. 即

①当 $\sin B=1$ 时，$B=90^\circ$，若 $A<90^\circ$时，则三角形有一解；若 $A\geqslant90^\circ$，则无解.

②当 $\sin B=m<1$ 时，设满足 $\sin B=m$ 的锐角为α，钝角为β，则当 $A+\alpha>180^\circ$时三角形无解；$A+\alpha<180^\circ$时三角形有解，且当 $A+\beta<180^\circ$时有两解，当 $A+\beta\geqslant180^\circ$时有一解.

考题5 不解三角形，判断下列各题解的个数.

(1)$a=5$，$b=4$，$A=120^\circ$； (2)$a=7$，$b=14$，$A=150^\circ$；

(3)$a=9$，$b=10$，$A=60^\circ$； (4)$c=50$，$b=72$，$C=135^\circ$.

【解析】 (1)$\sin B=\frac{b}{a}\sin120^\circ=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$， ∴ △$ABC$有一解.

(2)$\sin B=\frac{b}{a}\sin150^\circ=1$，而 $A=150^\circ$， ∴ △ABC无解.

方法视窗

讨论三角形解的个数时应抓住两点：一是其正弦值与“1”的大小关系，从而决定等于此正弦值的角是否存在；二是由此正弦值所确定的角(在$0^\circ\sim180^\circ$内)有几个？它们与已知角的和是否小于180°？

也可用几何作图方法讨论，即已知 a、b 及 A，则：

(3) $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，而$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$，∴当$B$为锐角时，满足$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$的角有$60^\circ<B<90^\circ$，故对应的钝角$B$有$90^\circ<B<120^\circ$，也满足$A+B<180^\circ$，故$\triangle ABC$有两解.

(4) $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{72}{50}\sin C>\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

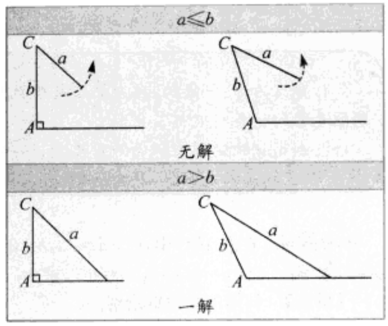
∴ $B>45^\circ$，∴ $B+C>180^\circ$，故$\triangle ABC$无解.

【变式 4-1】 在$\triangle ABC$中，判断下列各题解的情况：

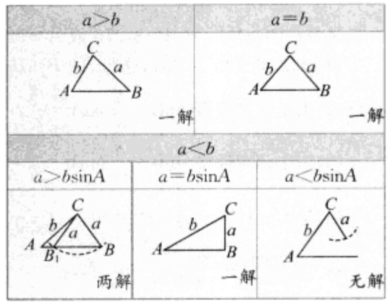
(1) $a=7, b=14, A=30^\circ$； (2) $a=30, b=25, A=150^\circ$；

(3) $a=6, b=9, A=45^\circ$； (4) $b=9, c=10, B=60^\circ$.

(1) 当 $A\geqslant 90^\circ$ 时



(2) 当 A 为锐角时



考点 5 利用正弦定理判断三角形的形状

核心总结

判断三角形形状问题，主要是判定三角形是否为某些特殊的三角形，如直角三角形、锐角三角形、钝角三角形、等腰三角形、等边三角形等.

考题 6 根据下列条件判断$\triangle ABC$的形状.

(1) $\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}$；

(2) $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$.

【解析】 (1)根据正弦定理有 $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

代入已知等式中有

$$\frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin C}{\cos\frac{C}{2}}\Rightarrow\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin C}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}.$$

而$0<\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，∴ $\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{2}$.

故$\triangle ABC$是正三角形.

(2)由正弦定理知 $a=2R\sin A, b=2R\sin B$. 将它们代入已知条件可得

方法视窗

1. 判断三角形的形状，最终目标是判定三角形是否为某些特殊的三角形，其研究途径有二：(1)研究边与边之间的关系：是否两边相等，是否三边相等，是否满足$a^2+b^2=c^2$等；(2)研究角与角的关系：是否有两角相等，是否三个角相等，有无直角，有无钝角，是否均为锐角等.

2. 当所给的条件含有边和角，判定三角形的形状时，应利用正弦定理将条件统一为"边"之间的关系或"角"之间的关系，如考题6.

防错档案

1. 易错点

在考题6(2)的求解过程中，一要注意$\sin^2A-\sin^2B$的变形技巧；二要注意等式①

$$(\sin^2A+\sin^2B)\sin(A-B)=(\sin^2A-\sin^2B)\sin(A+B)$$

又∵　$\sin^2A-\sin^2B=\dfrac{1-\cos2A}{2}-\dfrac{1-\cos2B}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(\cos2B-\cos2A)$

$=\sin(A+B)\sin(A-B)$,

∴ $(\sin^2A+\sin^2B)\sin(A-B)=\sin^2(A+B)\sin(A-B)$,　①

∴ $\sin(A-B)(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)=0$(∵ $A+B+C=\pi$).

∴ $\sin(A-B)=0$ 或 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$.

∴ $A=B$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$.

故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

【变式 5-1】 根据下列条件判断△ABC 的形状:

(1) $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,且 B 为锐角;

(2) $b\sin B=c\sin C$,且 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$.

中两边的 $\sin(A-B)$ 不可轻易约掉,否则会遗失一种情况.

2. 防错良方

解三角形时不要在等式两边轻易地除以含有边角的因式.

考点 6　正弦定理的综合应用

核 心 总 结

利用正弦定理解决三角形中的综合问题的关键在于:充分利用正弦定理的边角关系相互转化这一功能.

常见的综合问题有:正弦定理与平面向量、三角形、三角函数的综合交汇问题.

考题 7 已知$|\boldsymbol{a}|=8$, $|\boldsymbol{b}|=7$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°,求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

【解析】 利用平行四边形法则画出示意图,利用图形的直观性及正弦定理求解.

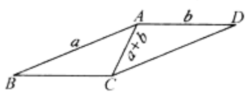


图 1-3

如图 1-3 所示,以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作▱$ABCD$,使 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\angle BAC=60°$.

由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$,

∴ $\sin\angle ACB=\dfrac{8\sin60°}{7}\approx0.9897$,

∴ $\angle ACB=81.79°$ 或 $\angle ACB=98.21°$.

故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 141.79°或 158.21°.

【变式 6-1】 (2007,山东)在△ABC 中,角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, $\tan C=3\sqrt{7}$.

(1)求 $\cos C$;

(2)若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{5}{2}$,且 $a+b=9$,求 c.

方法视窗

1. 解决平面向量与正弦定理应用的综合问题,应充分利用向量的几何特征,将向量问题转化为三角形的问题,如考题 7.

2. 利用正弦定理解决有关三角形的综合问题,关键是充分利用正弦定理所具有的边角互化的功能,如考题 8.

3. 正弦定理与三角函数的交汇问题,其核心考查的是三角函数的有关知识,因此应以正弦定理为工具,将问题转化为三角函数问题.

◎ **考题 8** 如图 1-4，在等腰$\triangle ABC$中，底边$BC=1$，底角B的平分线BD交AC于D，求BD的取值范围.

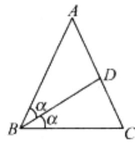


图 1-4

【解析】 设$\angle ABC=2\alpha$，则$\angle ABD=\angle CBD=\alpha$，

$\therefore\ \angle ACB=2\alpha, A=180^\circ-4\alpha$，

$\angle BDC=A+\angle ABD=180^\circ-3\alpha$.

因为$BC=1$，在$\triangle BCD$中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}，即\frac{BD}{\sin2\alpha}=\frac{1}{\sin(180^\circ-3\alpha)}，$$

所以 $BD=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin3\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha}$

$$=\frac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1}=\frac{2}{4\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

因为$0^\circ<\alpha<45^\circ$，所以$\dfrac{\sqrt2}{2}<\cos\alpha<1$.

而当$\cos\alpha$增大时，BD递减，且当$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt2}{2}$时，$BD=\sqrt2$；当$\cos\alpha=1$时，$BD=\dfrac{2}{3}$.

故BD的取值范围为$\left(\dfrac{2}{3},\sqrt2\right)$.

【变式 6-2】 已知$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线. 求证：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

【变式 6-3】 在$\triangle ABC$中，若$C=3B$，求$\dfrac{c}{b}$的取值范围.

◎ **考题 9** （2007，全国）在$\triangle ABC$中，已知内角$A=\dfrac{\pi}{3}$，边$BC=2\sqrt3$. 设内角$B=x$，周长为y.

(1)求函数$y=f(x)$的解析式和定义域；

(2)求y的最大值.

【解析】 (1) $\triangle ABC$的内角和$A+B+C=\pi$，由$A=\dfrac{\pi}{3}$，$B>0$，$C>0$得$0<B<\dfrac{2\pi}{3}$.

应用正弦定理知

$$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt3}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x，AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

因为$y=AB+BC+AC$，

所以 $y=4\sin x+4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt3\left(x\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

防错档案

1. 易错点

解决正弦定理的综合应用问题（特别涉及取值范围、最值等问题），易错点是：忽视对角的取值范围的研究. 如在考题 8 中，若不研究α的取值范围，就会得出错误的结论. 而在变式 6-3 中，由正弦定理及三角恒等变换得到$\dfrac{c}{b}=4\cos^2B-1$，若没有研究角B的取值范围，误认为$0\leqslant\cos^2B<1$，就会得出"$0<\dfrac{c}{b}<3$"的错误结论.

2. 防错良方

求变量取值范围及最值时必须研究变量角的取值范围.

(2) 因为 $y=4\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)+2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\left(x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\right)$,

所以当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{3}$时,y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

【变式 6-4】 (2007,湖北)已知△ABC 的面积为 3,且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant6$,设$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta$.

(1)求 θ 的取值范围;

(2)求函数 $f(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos2\theta$ 的最大值与最小值.

专题优化测训

学业水平测试

1. (考点 1)在△ABC 中,一定成立的等式是(　　).

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

2. (考点 5)在△ABC 中,$\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{5}{\sin C}$,则△$ABC$ 是(　　).

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3. (考点 3)在△ABC 中,a、b、c 分别是 A、B、C 所对的边,若 $A=105°$,$B=45°$,$b=2\sqrt{2}$,则 $c=$______.

4. (考点 6)在△ABC 中,$a=5$,$B=45°$,$C=105°$,则其面积 $S=$______.

5. (考点 3、4)在△ABC 中,已知 $a=26\text{cm}$,$b=28\text{cm}$,$A=50°$,解此三角形.(角度精确到 1°,边长精确到 1cm)

高考水平测试

1. (考点 1)在△ABC 中,已知$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$,则 $\sin A:\sin B:\sin C$ 等于(　　).

A. 6:5:4　　B. 7:5:3

C. 3:5:7　　D. 4:5:6

2. (考点 4)满足条件 $a=4$,$b=3\sqrt{2}$,$A=45°$的△ABC 的个数是(　　).

A. 一个　　B. 两个　　C. 无数个　　D. 不存在

3. (考点 3)已知△ABC 中,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,$B=30°$,则△ABC 的面积是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. (考点 3、4,2008,北京)已知△ABC 中,$a=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{3}$,$B=60°$,那么角 A 等于(　　).

A. 135°　　B. 90°　　C. 45°　　D. 30°

5. (考点 3,2008,陕西)△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,若 $c=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{6}$,$B=120°$,则 a 等于(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

6. (考点 1,2005,江苏)若△ABC 中,$A=\frac{\pi}{3}$,$BC=3$,则△ABC 的周长为(　　).

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　　B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　　D. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

7. (考点 6,2005,辽宁)若钝角三角形三内角的度数成等差数列,

且最大边长与最小边长的比值为m,则m的取值范围是(　　).

A. $(1,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $[3,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

8.(考点6,2008,浙江)在$\triangle ABC$中,角A、B、C所对的边分别为a、b,c.若$(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$,则$\cos A=$______.

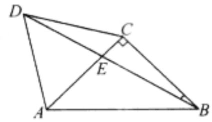
9.(考点4)在$\triangle ABC$中,已知条件如下,这些三角形有没有解?若有解,有几个解?并说明理由.

(1)$a=16,b=20,A=106°$;　(2)$a=30,b=30,A=50°$;

(3)$a=20,b=34,A=72°$;　(4)$a=18,b=22,A=30°$.

10.(考点5)小明家和小军家相距3千米,小军家在小明家东边距学校4千米,若学校在小明家东北方向上,问小明家距学校多少千米(结果保留两个有效数字)?

11.(考点6,2008,海南、宁夏)如图,$\triangle ACD$是等边三角形,$\triangle ABC$是等腰直角三角形,$\angle ACB=90°$,BD交AC于E,$AB=2$.



第11题图

(1)求$\cos\angle CBE$的值;

(2)求AE.

12.(考点6,2008,全国)在$\triangle ABC$中,$\cos B=-\frac{5}{13}$,$\cos C=\frac{4}{5}$.

(1)求$\sin A$的值;

(2)设$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{33}{2}$,求$BC$的长.

第2讲 余弦定理

课标解读

1. 理解余弦定理的证明,熟练掌握余弦定理及其变形形式.

2. 会用余弦定理及其变形形式解三角形.

3. 能综合运用正弦定理、余弦定理及三角形的面积公式等解与三角形有关的问题.

学法导引

本讲的重点是余弦定理的证明及其应用.余弦定理揭示了任意三角形的边角之间的客观规律,是解三角形的重要工具,它是以前学习的三角函数与平面向量知识在三角形中的交汇点.本讲学习的难点是准确把握余弦定理的作用及适用范围,突破难点的关键在于把握它的结构特征.

考点分类例析

考点1 余弦定理

核心总结

余弦定理:三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍,即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

考题1 在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{3}+1$,$b=\sqrt{3}-1$,$C=120°$,求c边的长.

【解析】 此题是典型的利用余弦定理的题,已知两边及夹角,求第三边的问题.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cos 120°}$$
$$=\sqrt{10}.$$

【变式1-1】 已知在$\triangle ABC$中,$A=60°$,最大边和最小边的长是方程$3x^2-27x+32=0$的两实根,求边BC的长.

难点突破

余弦定理的证明

$$a^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$$
$$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=b^2+c^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

也可以利用三角函数定义及坐标法来证明.

考题2 (1)在$\triangle ABC$中,$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,求$\triangle ABC$的内角的度数.

(2)已知$\triangle ABC$的三边满足:①$a^2-a-2b-2c=0$;②$a+2b-2c+3=0$.求$\triangle ABC$中最大角的大小.

【解析】 (1)设$a=2k$,$b=\sqrt{6}k$,$c=(\sqrt{3}+1)k$,由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6k^2+(\sqrt{3}+1)^2k^2-4k^2}{2(\sqrt{3}+1)k\cdot\sqrt{6}k}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore A=45°$.

方法视窗

1. 用方程的思想理解和运用余弦定理:当等式$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$中含有未知数时,等式便成为方程.式中有四个量a、b、c和$\cos A$,知道任意三个便可解出另一个,如考题1.

2. 注意余弦定理的变形公式的灵活运用:

(1) $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$, a^2+c^2-

同理可得 $\cos B=\frac{1}{2}$， ∴ $B=60^\circ$， ∴ $C=180^\circ-A-B=75^\circ$.

(2)①式加②式得 $a^2-4c+3=0\Rightarrow c=\frac{1}{4}(a^2+3)$，

将上式代入②式中得 $b=\frac{1}{4}(a^2-2a-3)$.

∵ $b>0$，即 $\frac{1}{4}(a^2-2a-3)>0\Rightarrow a>3$($a<-1$ 舍)，

当 $a>3$ 时，$b-c=-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}<0\Rightarrow b<c$.

$$c-a=\frac{1}{4}a^2-a+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(a-1)(a-3)>0\Rightarrow c>a.$$

故边 c 是最大边，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+\left[\frac{1}{4}(a^2-2a-3)\right]^2-\left[\frac{1}{4}(a^2+3)\right]^2}{2a\times\frac{1}{4}(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2},$$

∴ $C=120^\circ$. 所以△ABC 中最大角 C 为 120°.

【变式 1-2】 在△ABC 中，$A>B>C$，三边的长为连续的自然数，且 $a=2\cdot c\cdot\cos C$，求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 的值.

$b^2=2ac\cos B$，$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$；

(2) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

考点 2 利用余弦定理解三角形

核心总结

利用余弦定理可解如下两类型的三角形：

(1)已知两边及夹角，求第三边； (2)已知三边，求角.

两边及夹角(如 a、b、C)	余弦定理 正弦定理	先用余弦定理求第三边，再用正弦定理求小边的对角，再由 $A+B+C=180^\circ$ 求出另一角，在有解时只有一解
三边	余弦定理	先用余弦定理求出较小的两边所对的角，再由 $A+B+C=180^\circ$ 求出第三角

考题 3 根据下列条件解三角形.

(1)$b=8$，$c=3$，$A=60^\circ$； (2)$a=20$，$b=29$，$c=21$.

【解析】 (1)根据余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=8^2+3^2-2\times8\times3\cos60^\circ=64+9-24=49$，

∴ $a=7$，由推论得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7^2+8^2-3^2}{2\times7\times8}=\frac{13}{14}\approx0.9286,$$

∴ $C=22^\circ$， ∴ $B=180^\circ-60^\circ-22^\circ=98^\circ$.

(2)根据余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{29^2+21^2-20^2}{2\times29\times21}\approx0.7241,$$

∴ $A=44^\circ$.

又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{20^2+21^2-29^2}{2\times20\times21}=0$，

方法视窗

已知两边及其中一边的对角，可用余弦定理求解(如变式 2-1)，有解、无解、有几解都一目了然，避免了用正弦定理后还要进行讨论的麻烦. 但要注意的是由余弦定理得到关于第三边的方程，如果是一个无理系数的一元二次方程，求解就比较麻烦.