

2009

中国大手笔 教育在线
firstedu.org.cn

GCT入学资格考试 **应试指导**

数学分册

GCT入学资格考试应试指导编审委员会 编著

第5版

gct

中国大手笔 教育在线
firstedu.org.cn 网络课堂学习卡

登录 www.firstedu.org.cn

点击“会员注册”，注册后“登录系统”；
点击“学习卡注册”，然后自助选课学习。

卡号 0100 1090 3032 0222 955

密码：刮开涂层



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

2009

2009

2009

2009

数学分析

第5版



GCT 入学资格考试应试指导

数 学 分 册

第 5 版

GCT 入学资格考试应试指导编审委员会 编著



机械工业出版社

本书是 GCT 入学资格考试应试指导丛书之一，全书每章内容均由基本考点介绍、代表性例题精解、同步测试与强化训练和同步测试与强化训练答案与解析 4 部分组成。

本书由 GCT 入学资格考试应试指导编审委员会倾力打造，内容紧扣考试大纲，体例切合应试人员需求，注重实际演练，讲究方法与技巧，定位准确、思路清晰，有助于应试者从容应考，获得高分。

图书在版编目 (CIP) 数据

GCT 入学资格考试应试指导 数学分册/GCT 入学资格考试
应试指导编审委员会编著. —5 版. —北京: 机械工业出版社,
2009.2.

ISBN 978-7-111-26367-8

I. G ... II. G ... III. 高等数学—研究生—入学考试—自学
参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 021235 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 边 萌 责任编辑: 边 萌

责任印制: 杨 曦

三河市国英印务有限公司印刷

2009 年 3 月第 5 版第 1 次印刷

184mm×260mm·22 印张·540 千字

0001—5000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-26367-8

定价: 33.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

销售服务热线电话: (010) 68326294

购书热线电话: (010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010) 68354423

封面无防伪标均为盗版

第5版丛书序言

随着工程硕士研究生教育的蓬勃发展,2001年底国家成立非全日制研究生入学资格考试研究小组,在借鉴国外研究生选拔方式的基础上,提出了改革我国非全日制硕士研究生入学资格考试的新办法。国务院学位办工程硕士入学考试研究小组经过充分的调查研究,提出了两段制考试录取办法,定于2003年开始实施,考试大纲也随之改变。

2004年,国务院学位办发布了《硕士专业学位研究生入学资格考试指南(2004年版)》,适用范围除工程硕士外,还增加了农业推广硕士和兽医硕士。硕士专业学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test,简称GCT)作为国务院学位办新实行的一种考试,考试名称虽然在原来的基础上去掉了“工程”二字,但其考试对象主要还是工程硕士考生。

GCT试卷由4部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语(语种为英语、俄语、德语和日语)运用能力测试。GCT试卷满分400分,每部分各占100分。考试时间为3小时,每部分为45分钟。

语言表达能力测试部分主要是以语文为工具,测试考生在知识积累基础上的语言表达能力。通过考生对字、词、句、篇的阅读、分辨与理解,考查其掌握基本的自然科学和人文社会科学知识的水平,特别是运用语言工具对知识进行表达的能力。

数学基础能力测试部分主要是以数学基础知识为背景,重点考查考生所具有的基本数学素养、对基本数学概念的理解,考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析问题、解决问题的能力。

逻辑推理能力测试部分主要是考查考生应用常用的逻辑分析方法,通过对已获取的各种信息和综合知识的理解、分析、综合、判断、归纳等,引出概念、寻求规律,对事物间的关系或事件的走向趋势进行合理的判断与分析,确定解决问题的途径和方法。

外语运用能力测试部分考试所涉及的基本内容相当于四年制大学非外语专业毕业生应达到的水平,通过词汇与语法、阅读理解、完形填空等题型着重测试考生运用外语的能力。

GCT试题均采用客观选择题,含阅读理解、分析判断、正误辨识、情景分析、数理解题、逻辑推理等。答题形式为选择、填空等。试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学……

为帮助广大考生把握考试方法和技能,我们组织相关专家对本套GCT入学资格考试应试指导丛书2008年版的基础上进行了精心的修订,包括语文分册、数学分册、英语分册、逻辑分册共4册。我们对本套丛书作了不同程度的调整和改动。不仅使本套丛书更加科学、系统,也使其针对性较前一年有所增强。本套丛书的编写充分体现了如下特色。

(1)集合清华大学、北京大学和中国人民大学的权威信息,综合名师的辅导精华,全力推出2009年GCT入学资格考试整体解决方案。

(2)精辟阐明解题思路,全面展现题型变化。根据命题思路,列题型、讲方法,充分展示解题技巧和其内在规律性。

(3)科学预测、权威预测、最新预测。有效地把握命题特点,精编了足量的经典习题和模拟试题,强调反应速度,迅速提高考生的应试能力。

本套丛书的出版得到了北京大学和清华大学部分专家和教授的大力支持，在此表示深深的谢意。

本套丛书附有超值赠送服务。凡是购买本书者，都将免费获得由 GCT 联考著名辅导专家主讲的、价值 100 元的“中国大手笔教育在线网络课程”。考生可以登录 www.firstedu.org.cn，免费注册用户名和密码，登录系统进行学习卡注册，然后可以自由选择 GCT 联考精讲班和模拟冲刺班的相关辅导课程进行学习。

GCT 联考辅导班课程均由 GCT 入学资格考试应试指导编审委员会与辅导专家团名师主讲，领衔主讲老师具有丰富的命题研究、讲课和阅卷评卷经验。

本套丛书由中国大手笔教育在线提供全程的技术服务与网络课堂支持。凡是购买本书的考生均可享受中国大手笔教育在线提供的一系列教学服务，如免费下载相应网络教学资料、最新大纲变化信息以及本套丛书相关修订内容的补充、权威考试资讯等。

最后祝各位考生在 GCT 联考中取得优异成绩！

中国大手笔教育在线客服咨询热线：010-58608676

网址：www.firstedu.org.cn

GCT 入学资格考试应试指导编审委员会

第 5 版前言

自 2003 年起, 工程硕士专业学位研究生的入学资格考试开始了重要变革。其中, 数学基础能力测试旨在考查考生对数学基础知识的掌握以及分析问题和解决问题的能力。数学基础能力测试共分 5 部分: 算术、代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数。考试题目共 50 个, 考试时间 45 分钟。

为了有助于广大考生系统备考, 并顺利通过本门考试, 我们特别对 GCT 入学资格考试应试指导《数学分册》进行了精心的修订。

本书按考试题型共分为 6 个部分: 算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数及模拟试题与解析。每章内容都由基本考点介绍、代表性例题精解、同步测试与强化训练、同步测试与强化训练答案与解析 4 部分组成。

GCT 入学资格考试应试指导《数学分册》是广大专家和教授智慧和劳动的结晶, 是一份宝贵的资料。其中的每一道试题, 既反映了 GCT 联考数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求, 又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此, 对照考试大纲分析、研究这些试题, 考生不仅可以了解 GCT 联考以来数学考试的全貌, 而且可以方便地了解有关试题和信息, 从中发现规律, 归纳出各部分内容的重、难点以及常考的题型, 进一步把握考试的特点及命题的思路和规律, 从容应考, 获得高分。

在此, 给考生的数学复习备考提出以下几点建议:

第一, 动手做题, “绝知此事要躬行”。本书给 GCT 联考考生提供了锻炼自己和检测自己的机会。参阅本书时, 应该先动手做题, 然后将所得结果与本书的解法加以比较, 看自己哪些做对了、哪些做错了, 为什么会做错。建议考生把本书的全部试题做 2~3 遍, 达到对所有的题目一见就能够熟练、正确地解答出来的程度。要准确把握哪些知识是要求了解的, 哪些知识是要求理解的, 哪些知识是要求掌握的, 哪些知识是要求灵活运用的, 对这 4 个层次进行概括性的归纳, 进而明确复习的重点。

第二, 准确定位, 注重基础知识的掌握与训练。首先, 考生应系统掌握大纲规定的基础知识, 对大纲规定的内容进行梳理, 形成知识网络; 其次, 在接触一定量的题型之后, 头脑中留下的不是纷繁的题目, 而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能, 以及基本的数学思想和方法。不论是数学理论的建立, 还是数学运算和逻辑推理, 无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。

第三, 注重实际演练, 讲求方法与技巧, 高效补差。复习时演练一定量的习题是非常必要的, 它是提高考试成绩的重要手段, 但也不要搞题海战术, 重要的是要吃透大纲规定的基本考点, 提高分析问题和解决问题的能力。解题时既要考虑解题的通性通法, 又要分析它的特殊性, 寻求最佳解决方法, 提高解题能力和对新题型的适应能力。

第四, “做题, 总结, 再做题”, 实现高效复习的良性循环。在解题的基础上认真总结, 及时归纳。这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律, 又能培养探索和创新的能力。如果只是一味地做题, 把做题的多少作为复习效果与努力程度的一个标准, 而不注重

及时总结，那么考生所收到的实际复习成效是值得怀疑的。如果不对疑难问题进行认真的分析和清理，那么下次碰到类似或者相同的问题还是束手无策。

由于时间有限，本书的错误和纰漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

编 者

目 录

第5版丛书序言

第5版前言

第一部分 算 术

| | |
|-----------------------|--------------------------|
| 第一章 算术 1 | 第三节 比和比例 4 |
| [基本考点介绍]..... 1 | [代表性例题精解]..... 5 |
| 第一节 数的概念与性质..... 1 | [同步测试与强化训练]..... 12 |
| 第二节 数的四则运算..... 2 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... 14 |

第二部分 初 等 代 数

| | |
|----------------------------|---|
| 第二章 数和代数式 17 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... 55 |
| [基本考点介绍]..... 17 | 第五章 集合、映射和函数 59 |
| 第一节 实数..... 17 | [基本考点介绍]..... 59 |
| 第二节 复数..... 19 | 第一节 集合..... 59 |
| 第三节 代数式..... 22 | 第二节 映射和函数..... 60 |
| [代表性例题精解]..... 25 | [代表性例题精解]..... 64 |
| [同步测试与强化训练]..... 31 | [同步测试与强化训练]..... 67 |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... 32 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... 69 |
| 第三章 方程和方程组 35 | 第六章 数列、数学归纳法 71 |
| [基本考点介绍]..... 35 | [基本考点介绍]..... 71 |
| 第一节 一元一次方程..... 35 | [代表性例题精解]..... 74 |
| 第二节 一元二次方程..... 35 | [同步测试与强化训练]..... 77 |
| 第三节 二元一次方程组..... 37 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... 77 |
| 第四节 一元高次方程..... 37 | 第七章 排列、组合、二项式定理和 古典概率 80 |
| 第五节 简单的超越方程..... 38 | [基本考点介绍]..... 80 |
| [代表性例题精解]..... 38 | 第一节 排列和组合..... 80 |
| [同步测试与强化训练]..... 42 | 第二节 二项式定理..... 81 |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... 43 | 第三节 古典概率问题..... 82 |
| 第四章 不等式 46 | [代表性例题精解]..... 88 |
| [基本考点介绍]..... 46 | [同步测试与强化训练]..... 93 |
| [代表性例题精解]..... 48 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... 95 |
| [同步测试与强化训练]..... 53 | |

第三部分 几何与三角

| | | | |
|-------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 第八章 常见几何图形 | 99 | [同步测试与强化训练]..... | 121 |
| [基本考点介绍]..... | 99 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 124 |
| 第一节 常见平面几何图形..... | 99 | | |
| 第二节 常见的空间..... | 100 | | |
| [代表性例题精解]..... | 101 | | |
| [同步测试与强化训练]..... | 107 | | |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 108 | | |
| 第九章 三角学 | 111 | | |
| [基本考点介绍]..... | 111 | | |
| 第一节 三角函数..... | 111 | | |
| 第二节 解三角形..... | 114 | | |
| 第三节 反三角函数..... | 115 | | |
| [代表性例题精解]..... | 116 | | |
| | | 第十章 平面解析几何 | 128 |
| | | [基本考点介绍]..... | 128 |
| | | 第一节 平面向量..... | 128 |
| | | 第二节 直线方程..... | 130 |
| | | 第三节 圆..... | 132 |
| | | 第四节 椭圆..... | 132 |
| | | 第五节 双曲线..... | 133 |
| | | 第六节 抛物线..... | 135 |
| | | [代表性例题精解]..... | 136 |
| | | [同步测试与强化训练]..... | 140 |
| | | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 141 |

第四部分 一元函数微积分

| | | | |
|---------------------------|-----|---------------------------|-----|
| 第十一章 极限与连续 | 145 | 第六节 函数的增减性、极值、最值..... | 172 |
| [基本考点介绍]..... | 145 | 第七节 曲线的凸凹、拐点及渐近线..... | 173 |
| 第一节 函数的有关概念和几种特性..... | 145 | [代表性例题精解]..... | 174 |
| 第二节 数列的极限..... | 147 | [同步测试与强化训练]..... | 185 |
| 第三节 函数的极限..... | 148 | [同步训练与强化训练答案与解析]..... | 188 |
| 第四节 无穷小量与无穷大量..... | 150 | | |
| 第五节 函数的连续性..... | 152 | | |
| [代表性例题精解]..... | 154 | | |
| [同步测试与强化训练]..... | 160 | | |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 162 | | |
| 第十二章 一元函数微分学 | 165 | | |
| [基本考点介绍]..... | 165 | 第十三章 一元函数积分学 | 196 |
| 第一节 导数的概念..... | 165 | [基本考点介绍]..... | 196 |
| 第二节 导数的运算..... | 167 | 第一节 不定积分的概念与计算..... | 196 |
| 第三节 微分..... | 169 | 第二节 不定积分的计算方法..... | 197 |
| 第四节 中值定理与泰勒公式..... | 170 | 第三节 定积分的概念及性质..... | 199 |
| 第五节 洛必达法则..... | 172 | 第四节 微积分基本公式与 | |
| | | 定积分的计算..... | 200 |
| | | 第五节 定积分的应用..... | 201 |
| | | [代表性例题精解]..... | 202 |
| | | [同步测试与强化训练]..... | 215 |
| | | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 218 |

第五部分 线性代数

| | | | |
|-----------------------|-----|--------------------|-----|
| 第十四章 行列式 | 225 | 第一节 行列式的概念与性质..... | 225 |
| [基本考点介绍]..... | 225 | 第二节 行列式的计算..... | 227 |

| | | | |
|-----------------------|------------|-------------------------------|------------|
| [代表性例题精解]..... | 229 | [同步测试与强化训练]..... | 277 |
| [同步测试与强化训练]..... | 236 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 279 |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 238 | | |
| 第十五章 矩阵 | 244 | 第十七章 线性方程组 | 284 |
| [基本考点介绍]..... | 244 | [基本考点介绍]..... | 284 |
| 第一节 矩阵的概念与运算..... | 244 | 第一节 线性方程组的基本概念..... | 284 |
| 第二节 可逆矩阵..... | 247 | 第二节 齐次线性方程组 $Ax=0$ | 285 |
| 第三节 初等变换与初等矩阵..... | 249 | 第三节 非齐次线性方程组 $Ax=B$ | 287 |
| 第四节 矩阵的秩..... | 251 | [代表性例题精解]..... | 289 |
| 第五节 分块矩阵..... | 252 | [同步测试与强化训练]..... | 296 |
| [代表性例题精解]..... | 253 | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 299 |
| [同步测试与强化训练]..... | 259 | 第十八章 矩阵的特征值和特征向量 | 304 |
| [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 261 | [基本考点介绍]..... | 304 |
| 第十六章 向量 | 267 | 第一节 特征值和特征向量的 | |
| [基本考点介绍]..... | 267 | 基本概念..... | 304 |
| 第一节 基本概念..... | 267 | 第二节 n 阶矩阵的相似关系与 | |
| 第二节 向量的线性相关性..... | 268 | 对角化..... | 305 |
| 第三节 向量组的极大无关组与秩..... | 270 | [代表性例题精解]..... | 307 |
| [代表性例题精解]..... | 271 | [同步测试与强化训练]..... | 313 |
| | | [同步测试与强化训练答案与解析]..... | 315 |

第六部分 模拟试题与解析

| | | | |
|----------------------|-----|----------------------|-----|
| 模拟试题(一)..... | 320 | 模拟试题(二)..... | 330 |
| 模拟试题(一) 参考答案与解析..... | 323 | 模拟试题(二) 参考答案与解析..... | 333 |

第一章 算 术

[基本考点介绍]

第一节 数的概念与性质

一、自然数和整数

用来表示物体个数的 0、1、2、3、…叫做自然数。一个物体也没有用 0 表示，1 是自然数的单位，0 也是自然数，自然数是整数。

二、分数和百分数

1. 分数

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数。表示其中一份的数是这个分数的单位。分数有真分数、假分数、带分数等。把“1”平均分成多少份的数，称为分数的分母；表示取了多少份的数，称为分数的分子。

分子比分母小的分数称为真分数。如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

分子比分母大或者分子、分母相等的分数称为假分数。如 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 、 $\frac{2}{2}$ 。

一个整数和一个真分数合成的数，称为带分数。如 $2\frac{1}{3}$ 、 $4\frac{2}{5}$ 。

两个自然数相除，它的商可以用分数表示。如 $a/b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

两个数的比，也可用分数表示。如 $a:b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

2. 百分数

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数。百分数也叫百分率或者百分比。百分数通常用“%”来表示。

3. 分数的基本性质

分数的分子和分母都乘以或者都除以相同的数（零除外），分数的大小不变。即

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \quad (b \neq 0, m \neq 0)$$

4. 约分和通分

把一个分数化成同它相等，但分子、分母都比较小的分数，称为约分。公约数为 1 的两个数为互质数。若一个分数的分子、分母是互质数，则这个分数称为最简分数，通过约分可以把分数化为最简分数。

把几个异分母分数分别化成和原来分数相等的同分母分数，称为通分。通分的方法是：先求出原来几个分母的最小公倍数，然后把各分数分别化成这个最小公倍数作分母的分数。乘积是 1 的两个数互为倒数。1 的倒数是 1，0 没有倒数。

三、数的整除

当整数 a 除以整数 b ($b \neq 0$)，除得的商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a 。当 a 能被 b 整除时，也称 a 是 b 的倍数， b 是 a 的约数。

约数的个数是有限的，其中最小的约数是 1，最大的约数是它本身；一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身。几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数，所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，所有公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数。

一个数只有 1 和它本身两个约数，叫做质数（素数）。一个数，如果除了 1 和它本身，还有其他约数，叫做合数。公约数只有 1 的两个数，叫做互质（素）数。分子与分母互质的分数称为最简分数。

个位上是 0、2、4、6、8 的数都能被 2 整除，个位上是 5 的数都能被 5 整除，各位上的数的和能被 3 整除的数本身也能被 3 整除。能被 2 整除的数称为偶数，不能被 2 整除的数称为奇数。

第二节 数的四则运算

一、四则运算

1. 加法

把两个（或几个）数合并成一个数的运算称为加法。

2. 减法

已知两个加数的和与其中一个加数，求另一个加数的运算，称为减法。

$$\text{和} - \text{一个加数} = \text{另一个加数}$$

$$\text{被减数} - \text{减数} = \text{差}$$

3. 乘法

一个数乘以整数，是求几个相同加数和的简便运算。一个数乘以小数（或分数），是求这个数的几分之几的运算，即

$$\text{被乘数} \times \text{乘数} = \text{积}$$

$$(\text{因数})(\text{因数})$$

4. 除法

已知两个因数的积与其中一个因数，求另一个因数的运算，称为除法，即

$$\frac{\text{积}}{\text{一个因数}} = \text{另一个因数}$$

$$\frac{\text{被除数}}{\text{除数}} = \text{商}$$

二、运算定律

1. 加法交换律

$$a+b=b+a$$

2. 加法结合律

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

3. 乘法交换律

$$a \times b = b \times a$$

4. 乘法结合律

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

5. 乘法分配律

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

$$(a-b) \times c = a \times c - b \times c$$

三、运算性质

1. 交换性质

$$a+b-c=a-c+b$$

$$a-b-c=a-c-b$$

$$(a \times b) \div c = (a \div c) \times b$$

$$(a \div b) \div c = (a \div c) \div b \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

2. 结合性质

$$a+b-c=a+(b-c)=a-(c-b)$$

$$a-b-c=a-(c+b)$$

$$a \times b \div c = a \times (b \div c) \quad (c \neq 0)$$

$$(a \div b) \times c = a \div (b \div c) \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

$$(a \div b) \div c = a \div (b \times c) \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

四、整数和小数四则混合运算

(1) 在一个没有括号的算式里，如果只含有同一级运算，应从左到右依次计算。如果既含有第一级运算（加减法），又含有第二级运算（乘除法），则应当先算第二级运算，后算第一级运算。

(2) 在一个有括号的算式里，则先进行括号内运算，运算顺序是先算小括号里的，再算中括号里的，最后算大括号里的算式。

五、分数四则混合运算

1. 分数四则运算法则

(1) 分数加减法

1) 同分母分数相加减，分子相加减，分母不变。

- 2) 异分母分数相加减, 先通分, 然后按照同分母分数的加减法法则进行计算。
 3) 带分数相加减, 整数部分、分数部分要分别相加减, 再把所有的数合并在一起。

(2) 分数乘法

- 1) 分数乘以整数, 用分子和整数相乘作积的分子, 分母不变。

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

- 2) 分数乘以分数, 用分子相乘的积作分子, 分母相乘的积作分母。

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

- 3) 分数中有带分数的, 要把带分数化成假分数, 然后再相乘。

(3) 分数除法 一个数除以另一个数 (零除外), 等于一个数乘以另一个数的倒数。

2. 分数四则混合运算

分数四则混合运算的顺序和整数四则混合运算的顺序相同。

整数加法和乘法的运算定律和加减乘除混合运算的性质, 在分数四则运算中也适用。

第三节 比和比例

一、比的定义和性质

1. 定义

两个数相除, 又称为这两个数的比, 即 $a:b = \frac{a}{b}$ (或 $a:b = a/b$), 其中 a 叫做比的前项, b 叫做比的后项, 相除所得的商叫做比值。如

$$3 : 2 = 1.5 \text{ (比值)}$$

前项 后项

2. 基本性质

比的前项与后项同乘 (或除) 以同一个不为零的数, 其比值不变。如

$$\frac{4}{3} : 2 = (\frac{4}{3} \times 3) : (2 \times 3) = 4 : 6 = (4/2) : (6/2) = 2 : 3$$

3. 百分比

在实际应用中, 常将比值表示成分数, 称为百分比 (或百分率)。此时分母 100 用符号 “%” 表示, 如

$$3:4=75\%, 4:2=200\%$$

二、比例

1. 定义

两个比相等时, 称为比例, 用字母表示为

$$a:b=c:d \text{ 或 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

其中, a 、 d 称为比例外项; b 、 c 称为比例内项。

若 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ 时, 称 b 为 a 、 c 的比例中项, 显然 a 、 b 、 c 均为正数时, b 是 a 、 c 的几何平均值。

2. 性质

比例 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 具有以下性质:

- 1) $ad=bc$ (外项积=内项积)。
- 2) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ 或 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (互换外项或内项)。
- 3) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (合比定理)。
- 4) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (分比定理)。
- 5) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (合分比定理)。

三、正反比例

若 $y=kx$ ($k \neq 0$, k 为常数), 则称 y 与 x 成正比, k 为比例系数。

若 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数), 则称 y 与 x 成反比, k 为比例系数。

[代表性例题精解]

【例 1】 已知 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}$, $\frac{b}{c} = -\frac{7}{9}$, $\frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$, 则 $\frac{a}{d} =$ ()。

- A. $-\frac{14}{75}$ B. $\frac{14}{75}$ C. $\frac{75}{14}$ D. $-\frac{75}{14}$

答案: A。

解析: 已知 $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \div \frac{d}{c}$, 即

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \div \frac{d}{c} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{14}{75}, \text{ 故正确答案为 A。}$$

【例 2】 若 $(\sqrt{3}-a)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数, 则 $\frac{2}{a-b}$ 的值为 ()。

- A. $\sqrt{3}+1$ B. $\sqrt{3}-1$ C. 1 D. 2

答案: A。

解析: 因为 $(\sqrt{3}-a)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数,

$$\text{所以 } (\sqrt{3}-a)^2 + |b-1| = 0$$

$$(\sqrt{3}-a)^2 \geq 0, |b-1| \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-a) = 0, b-1=0 \Rightarrow a=\sqrt{3}, b=1 \Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

故正确答案为 A。

【例 3】 计算 $-9+5 \times (-6) - (-4)^2 \div (-8)$ 。

解析：原式 $=-9+5\times(-6)-16\div(-8)=-9-30+2=-37$

【例4】一件夹克标价为 a 元，现按标价7折出售，则售价用代数式表示为（ ）元。

- A. $7a$ B. $0.7a$ C. $1a$ D. $0.5a$

答案：B。

解析：一件夹克标价为 a 元，现按标价的7折出售，即按现价 a 元的70%出售，则售价用代数式表示为： $a\text{元}\times\frac{70}{100}=0.7a$ 元。

故正确答案为B。

【例5】如果单项式 $-3x^{4a-b}y^2$ 与 $\frac{1}{3}x^3y^{a+b}$ 是同类项，那么这两个单项式的积是（ ）。

- A. x^6y^4 B. $-x^3y^2$ C. $-\frac{8}{3}x^3y^2$ D. $-x^6y^4$

答案：D。

解析：依题意，得 $\begin{cases} 4a-b=3 \\ a+b=2 \end{cases}$ ，解之，得 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ 。

把 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ 代入原单项式，得 $-3x^{4a-b}y^2=-3x^3y^2$ ， $\frac{1}{3}x^3y^{a+b}=\frac{1}{3}x^3y^2$ 。

所以 $(-3x^{4a-b}y^2\times\frac{1}{3}x^3y^{a+b})=-3x^3y^2\times\frac{1}{3}x^3y^2=-x^6y^4$

故正确答案为D。

【例6】已知代数式 $3y^2-2y+6$ 的值为8，那么代数式 $\frac{3}{2}y^2-y+1$ 的值为（ ）。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案：B。

解析：由题知得 $3y^2-2y=2$ ，两边同除以2，得 $\frac{3}{2}y^2-y=1$ ，故原式的值为 $1+1=2$ ，故正确答案为B。

【例7】当 $x=-2$ ， $y=-3$ ， $z=1$ 时，求代数式 $3x^2y-[2x^2y-(2xyz-x^2z)-4x^2z]-xyz$ 的值。

解析：本题应先化简，然后再把 $x=-2$ ， $y=-3$ ， $z=1$ 代入求值。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3x^2y - [2x^2y - 2xyz + x^2z - 4x^2z] - xyz \\ &= 3x^2y - 2x^2y + 2xyz - x^2z + 4x^2z - xyz \\ &= x^2y + 3x^2z + xyz \end{aligned}$$

当 $x=-2$ ， $y=-3$ ， $z=1$ 时

$$\text{原式} = (-2)^2 \times (-3) + 3 \times (-2)^2 \times 1 + (-2) \times (-3) \times 1 = 6$$

【例8】粉刷一个长、宽、高分别为7m、5m、3m的房间，房间有两门一窗，门宽1m，高2.5m，窗宽与高都是1.5m，某品牌墙漆，每桶可粉刷墙壁 10m^2 ，粉刷房顶 15m^2 ，要将此房间粉刷一遍，至少需要此品牌墙漆（ ）桶。

- A. 6 B. 8 C. 9 D. 10

答案：C。