西安交通大學“十一五”规划教材

最优化与最优控制

赫孝良　葛照强　编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學"十一五"规划教材

最优化与最优控制

赫孝良　葛照强　编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书介绍最优化与最优控制的基本理论与方法。最优化部分包括无约束最优化方法，约束最优化的理论和方法，还简单介绍了全局最优化方法。最优控制部分包括线性系统基础，求解最优控制问题的变分法、极大值原理和动态规划法，典型问题的最优控制和最优控制的一些数值解法。

本书可作为高等院校数学专业、工程领域各专业的高年级本科生、研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书。有微积分、线性代数基础的科技人员均可阅读。

图书在版编目(CIP)数据

最优化与最优控制/赫孝良，葛照强编著. —西安：西安交通大学出版社，2009.2

西安交通大学"十一五"规划教材

ISBN 978-7-5605-3029-1

Ⅰ.最… Ⅱ.①赫…②葛… Ⅲ.①最优化-高等学校-教材②最佳控制-高等学校-教材 Ⅳ.O224 O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 000553 号

书　　名 最优化与最优控制
编　　著 赫孝良　葛照强
责任编辑 叶 涛　毛 帆

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 18　**字数** 330 千字
版次印次 2009 年 2 月第 1 版　2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3029-1/O・292
定　　价 24.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前　言

在科学研究和生产实践中，人们常常面对这样的问题：在若干可行的方案（决策）中寻找最优的方案（决策）。这种问题称为最优化问题。例如：在工程设计中，如何选择设计参数，使得设计方案既满足设计要求，又能降低成本；在资源分配中，如何分配有限资源，使得分配方案既能满足各方面的基本要求，又能获得好的经济效益；在生产计划安排中，如何选择方案才能提高产值和利润；在城建规划中，如何安排布局才能有利于城市发展；宇宙飞船在月球上软着陆时，如何选择发动机的推力，才能使燃料消耗最少；等等.

为了解决最优化问题，人们逐步建立和发展了一门重要的学科——最优化。随着科学技术的发展，人们遇到的最优化问题越来越复杂，出现了动态最优化问题，称为最优控制问题。为了解决这种问题，最优控制理论应运而生。从狭义上讲，最优化和最优控制是两个独立的分支，从广义上讲，最优化包含最优控制.

最优化与最优控制的思想由来已久，在微积分产生时（甚至更早）就有了最优化与最优控制的萌芽，但是，最优化与最优控制形成一套完整的理论，成为独立的数学分支，则是近几十年的事情。1947 年美国数学家 Dantzig 提出了求解线性规划的单纯形法，奠定了最优化的基础。最优控制则是在 20 世纪 50 年代末，由贝尔曼和庞特里亚金的奠基性工作而确立的.

最优化与最优控制的应用非常广泛。在国民经济的各个部门，科学技术的各个领域中存在大量最优化与最优控制问题。目前，最优化在生产计划、交通运输、采矿冶金、机械设计、金融、贸易等方面，最优控制在空间技术、系统工程、经济管理、人口控制等方面都已得到卓有成效的应用。随着科学技术的发展和计算机的日益普及，最优化与最优控制将会发挥越来越大的作用.

本书是在使用多年的讲义基础上修订而成的。其中 1—6 章由赫孝良编写，7—13章由葛照强编写，全书由赫孝良统稿、定稿。

本书一直得到西安交通大学教务处、理学院等部门的关怀和支持，借此机会我们向有关方面一并深表谢意。

由于编者水平所限，书中难免有不足及错误之处，恳请读者和同行专家批评指正。

作　者

目录

第 1 章　最优化概论

在经济计划、工程设计、生产管理、交通运输、资源分配、信息处理等领域存在大量的最优化问题，即在众多可行的方案（决策）中寻找最优的方案（决策）．为了解决最优化问题，就产生了一门重要的学科——最优化．它研究决策问题的最优选择的性质，构造求解的计算方法，研究算法的结构和收敛性．一方面，最优化有着非常广泛的应用，几乎渗透到了所有科学技术的分支中，另一方面，最优化又是一个独立的数学分支．本章介绍最优化的数学模型、相关概念和一元函数最优化问题的求解方法．

1.1　最优化问题

1.1.1　问题实例

最优化问题普遍存在于科学研究、工程技术和经济管理领域，下面给出两个简单例子．

例 1.1　钢管运输问题

如图 1.1 所示，要铺设一条从 A 地到 B 地的输送天然气的主管道．需要首先从钢管厂（C 地）将钢管经铁路运到 A 地或 B 地，再用汽车将钢管运到铺设地点（沿管道有施工公路）．为方便计算，1 km 主管道钢管称为 1 单位钢管．1 单位钢管的铁路运价为 600 元/公里，公路运价为 1000 元/公里，问如何运输运费最少？

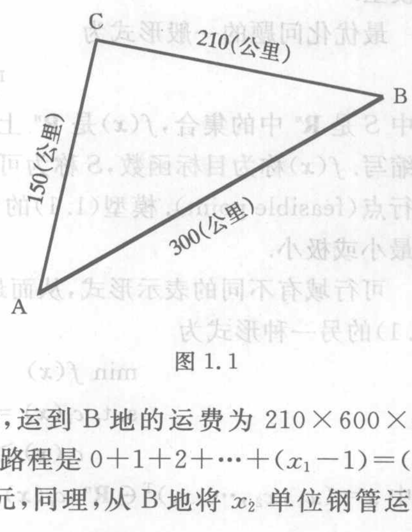

图 1.1

解析　设运到 A 地和 B 地的钢管分别为 x_1 和 x_2 单位，则 x_1 和 x_2 满足 $x_1+x_2=300$．运到 A 地的运费为 $150\times600\times x_1$ 元，运到 B 地的运费为 $210\times600\times x_2$ 元；从 A 地将 x_1 单位钢管运到铺设地点的总路程是 $0+1+2+\cdots+(x_1-1)=(x_1-1)x_1/2$ 公里，运费为 $1000\times(x_1-1)x_1/2$ 元，同理，从 B 地将 x_2 单位钢管运到

铺设地点的运费为 $1000\times(x_2-1)x_2/2$ 元，故总运费为

$$f(x_1,x_2)=500(x_1-1)x_1+500(x_2-1)x_2+90000x_1+126000x_2(\text{元})$$

上述问题归结为在满足 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_1+x_2=300$ 的条件下，求 x_1、x_2 使 $f(x_1,x_2)$ 达到最小.

例 1.2　生产成本问题

在生产的投入中，主要有两个因素：劳动力和资本. 设劳动力的报酬率为 w，资本的报酬率为 r. 问在产量不低于某水平 Q_0 的条件下，劳动力和资本各选取多少，才能使生产成本最小？

解析　在数量经济学中，常常用柯布-道格拉斯(Cobb-Douglas)生产函数来描述经济行为的规律性，该生产函数为

$$Q(x,y)=Ax^{\alpha}y^{\beta}$$

其中 $Q(x,y)$ 为生产产量，x 为资本投入量，y 为劳动力投入量，A 为生产技术水平，在一定时期内 A 为常数，$0<\alpha,\beta<1$ 为常数.

由经济学可知生产成本为

$$C(x,y)=rx+wy$$

上述生产成本问题归结为在满足 $Ax^{\alpha}y^{\beta}\geqslant Q_0, x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的条件下，求 x、y 使 $C(x,y)$ 达到最小.

1.1.2　数学模型

上述不同的实际问题，有两个共同点，变量都要满足一定的约束条件，问题都归结为求多元函数的极值. 抽象出这些问题的共同特征，就得到了最优化问题的数学模型.

最优化问题的一般形式为

$$\min_{x\in S} f(\boldsymbol{x}) \tag{1.1}$$

其中 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的集合，$f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数. min 是英文 minimize(极小化)的缩写. $f(\boldsymbol{x})$ 称为目标函数，S 称为可行域(feasible region)，可行域中的点 $\boldsymbol{x}$ 称为可行点(feasible point). 模型(1.1)的含义是，在可行域 S 中寻求一点 $\boldsymbol{x}^*$ 使 $f(\boldsymbol{x})$ 达到最小或极小.

可行域有不同的表示形式，从而最优化问题也有不同的表示形式. 最优化问题(1.1)的另一种形式为

$$\begin{aligned}&\min\ f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\ c_i(\boldsymbol{x})=0,\ i=1,\cdots,m_1\\&\qquad c_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ i=m_1+1,\cdots,m\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$c_i(\boldsymbol{x})(i=1,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数，称为约束

函数. $c_i(\boldsymbol{x})=0(i=1,\cdots,m_1)$ 称为等式约束, $c_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0(i=m_1+1,\cdots,m)$ 称为不等式约束,等式约束与不等式约束合称约束条件. s. t. 是英文 subject to(受约束于)的缩写.

如果记 $E=\{i\,|\,c_i(\boldsymbol{x})=0\}$, $I=\{i\,|\,c_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0\}$,分别称为等式约束指标集和不等式约束指标集,则模型(1.2)又可表示为

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x})=0,\ i\in E\\&\qquad c_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ i\in I\end{aligned}\tag{1.3}$$

这样,例 1.1 钢管运输问题的数学模型就为

$$\begin{aligned}&\min f(x_1,x_2)=500x_1^2+500x_2^2+89500x_1+125500x_2\\&\text{s.t. } x_1+x_2-300=0\\&\qquad x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

而例 1.2 生产成本问题的数学模型就为

$$\begin{aligned}&\min C(x,y)=rx+wy\\&\text{s.t. } Ax^\alpha y^\beta\geqslant Q_0\\&\qquad x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{aligned}$$

1.1.3　问题的解

为了解决最优化问题,首先要明确解的含义. 下面给出最优化问题解的定义.

局部最优解(local optimal solution)

设问题(1.1)的可行域为 S,对于 $\boldsymbol{x}^*\in S$,如果存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域

$$N(\boldsymbol{x}^*)=\{\boldsymbol{x}\,\big|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\delta\}$$

(1) 使得 $\forall\,\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{x}^*)\cap S$,有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.1)的局部最优解(局部极小点).

(2) 使得 $\forall\,\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{x}^*)\cap S,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^*$,有 $f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}^*)$,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.1)的严格局部最优解(严格局部极小点).

全局最优解(global optimal solution)

设问题(1.1)的可行域为 S,对于 $\boldsymbol{x}^*\in S$

(1) 如果 $\forall\,\boldsymbol{x}\in S$,有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.1)的全局最优解(全局极小点).

(2) 如果 $\forall\,\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^*$,有 $f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}^*)$,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1.1)的严格全局最优解(严格全局极小点).

在实际问题中,人们需要的是全局最优解,但求全局最优解非常困难. 到目前为止,最优化问题的研究成果主要集中在求局部最优解的方法上,求全局最优解的

方法虽然也有了很大进展，但还需要人们进行更多的研究.

1.1.4　问题分类

最优化问题包含的内容是非常丰富的，一般问题是很复杂的. 为了便于研究，根据模型中的目标函数和约束函数的不同，人们将最优化问题进行了分类.

离散最优化问题

如果模型(1.1)中可行域 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的离散点集，则问题称为离散最优化问题. 离散问题是一大类问题，包含了许多著名的最优化问题. 如，旅行商问题，背包问题，整数规划问题等.

连续最优化问题

如果模型(1.2)中目标函数是连续函数，且可行域 S 由连续的约束函数确定，则问题称为连续最优化问题.

在连续最优化问题中，根据目标函数和约束函数是否光滑，又可分为光滑最优化问题和非光滑最优化问题. 即如果模型(1.2)中所有函数都连续可微，则问题称为光滑最优化问题，如果模型(1.2)中有一个函数不连续可微，则问题称为非光滑最优化问题. 本书主要讨论连续、光滑最优化问题.

无约束最优化问题

如果模型(1.2)中不含约束条件，即 $S=\mathbf{R}^n$，则问题称为无约束最优化问题，其数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \tag{1.4}$$

在实际中，最优化问题通常都是有约束的. 但如果最优解不在可行域的边界，而在可行域的内部，此时问题可以看作是无约束最优化问题. 更重要的是约束最优化问题通常都是转化为无约束最优化问题来进行处理，所以无约束最优化问题是最优化的基础.

约束最优化问题

如果模型(1.2)中包含任一约束条件，则问题称为约束最优化问题. 在约束问题中，如果模型中仅含等式约束，则问题称为等式约束问题，此时模型为

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

如果模型中仅含不等式约束，则问题称为不等式约束问题，此时模型为

$$\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t. } c_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m\end{aligned}$$

如果模型中既含等式约束，又含不等式约束，则问题称为混合约束问题.

约束最优化问题又可进一步分为线性规划和非线性规划.

线性规划(linear programming)

如果模型(1.2)中目标函数和约束函数都是线性函数,则问题称为线性规划.此时可用矩阵表示约束条件,线性规划的模型为

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{s. t. } \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\ &\qquad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n, \boldsymbol{b}_1\in\mathbf{R}^m, \boldsymbol{b}_2\in\mathbf{R}^l, \boldsymbol{A}_1$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 是 $l\times n$ 矩阵.

非线性规划(nonlinear programming)

如果模型(1.2)目标函数和约束函数至少有一个是非线性函数,则问题称为非线性规划.非线性规划是最一般的最优化问题.在非线性规划中有两类常见的问题:凸规划与二次规划.

凸规划(convex programming)

设可行域 S 为凸集,目标函数 $f(\boldsymbol{x})$是 S 上的凸函数,则问题

$$\min_{\boldsymbol{x}\in S} f(\boldsymbol{x}) \tag{1.6}$$

称为凸规划问题.凸规划的特点是,问题的任何一个局部最优解必定是全局最优解;如果 $f(\boldsymbol{x})$还是 S 上的严格凸函数,则凸规划问题有唯一的全局最优解.

二次规划(quadratic programming)

目标函数是二次函数,约束函数都是线性函数,此时问题称为二次规划,其模型为

$$\begin{aligned} &\min\ f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{s. t. } \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i,\ i\in E=\{1,\cdots,m_1\} \\ &\qquad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i,\ i\in I=\{m_1+1,\cdots,m\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 是 $n\times n$ 对称矩阵,$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_i\ (i\in E\cup I)$是 n 维向量,$\boldsymbol{b}_i\ (i\in E)$是 m_1 维向量,$\boldsymbol{b}_i(i\in I)$是 $m-m_1$ 维向量.

在实际中,大量的问题归结为线性规划或二次规划,而且线性规划和二次规划的研究也较为完善.因此,线性规划和二次规划在最优化中占有重要地位.一般的非线性规划,也取得了许多好的成果,但还有许多问题需要进一步研究.

上述无约束最优化问题和约束最优化问题,通常研究的是求局部最优解的方法.而求全局最优解非常困难,因此求连续、光滑最优化问题全局最优解就形成了一大类问题——**全局最优化问题**.

1.2 最优化方法及其结构

1.2.1 最优化问题的算法

在微积分中求解简单的函数极值问题时，是通过求出解析解来得到最优解的. 然而，对一般的最优化问题，求出解析解是非常困难的，绝大部分问题不可能求出解析解. 因此有效的方法是用计算机进行数值求解. 最优化问题的数值解法是迭代算法(iterative algorithm).

迭代算法

迭代算法的基本思想是：给定初始估计点 $\boldsymbol{x}_0$，然后按照某种规则产生一个点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，当$\{\boldsymbol{x}_k\}$是有限点列时，其最后一个点是最优化问题的最优解；当$\{\boldsymbol{x}_k\}$是无限点列时，其任意聚点是最优化问题的最优解.

算法的收敛性

一个算法，如果对任意初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 所产生的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$都收敛到极小点，则称算法是全局收敛的；如果对最优解的某个邻域中任意初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 所产生的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$都收敛到极小点，则称算法是局部收敛的.

保证算法的收敛性，是对一个算法的基本要求.

衡量一个算法的优劣，不仅要看它是否收敛，很多时候还要看它收敛的快慢程度，这就引出了算法的收敛速度.

算法的收敛速度

定义 1.1 设算法产生的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛到极小点 $\boldsymbol{x}^*$，令 $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*$，得误差序列$\{\boldsymbol{e}_k\}$. 如果存在常数 $c\geqslant 0$ 和 $r>0$ 使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|}{\|\boldsymbol{e}_k\|^r}=c \tag{1.8}$$

则称算法以 c 因子 r 阶收敛. 其中，当 $r=1,c>0$ 时，称算法线性收敛；当 $r=1,c=0$ 时，称算法超线性收敛(superlinear convengence).

根据定义 1.1 可知，当 $r>1$ 时，算法都是超线性收敛的. 事实上，如果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|}{\|\boldsymbol{e}_k\|^r}=c,\ r>1$$

那么

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|}{\|\boldsymbol{e}_k\|}=\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{e}_{k+1}\|}{\|\boldsymbol{e}_k\|^r}\|\boldsymbol{e}_k\|^{r-1}=0$$

线性收敛的算法是比较差的算法，超线性收敛的算法是比较好的算法. 算法的收敛阶越高，收敛的速度越快. 二次(二阶)收敛的的算法收敛速度已经相当快了.

一个好的算法,不仅要求有较快的收敛速度,还要求计算舍入误差不破坏其收敛性.故一个好的算法不仅要有理论的保证,还要通过实验的检验.

算法的终止准则

对于收敛的算法,计算时有一个问题,迭代到哪一步停止运算.这就要判断 $\boldsymbol{x}_k$ 是否足够接近 $\boldsymbol{x}^*$.给定允许误差 $\varepsilon>0$,则当 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|\leqslant\varepsilon$ 时,$\boldsymbol{x}_k$ 就是满足精度要求的近似解.然而 $\boldsymbol{x}^*$ 是未知的,故 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|\leqslant\varepsilon$ 不能作为实际计算的终止准则.下面给出几种迭代的终止准则.

定理 1.1　设迭代点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 超线性收敛到极小点 $\boldsymbol{x}^*$,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}=1 \tag{1.9}$$

证明　对任意正整数 k 有

$$\begin{aligned}\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}&=\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}\\&\geqslant\left|\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|-\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}\right|\\&=\left|\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}-1\right|\end{aligned}$$

对上式两端取极限得

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}-1\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}^*\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|}=0$$

■

定理 1.1表明,对超线性收敛的算法,可以用 $\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|$ 估计误差 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}^*\|$.因此,就得到一种超线性收敛算法的终止准则

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|\leqslant\varepsilon \tag{1.10}$$

对于无约束最优化问题,可以用目标函数来确定终止准则.当目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 连续可微时,可以得到下述关系

$$\|f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)\|=O(\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|)$$

因此,对于无约束最优化问题的超线性收敛的算法,有下述终止准则

$$\|f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)\|\leqslant\varepsilon \tag{1.11}$$

当目标函数在极小点的附近比较陡峭时(如图 1.2(a)),终止准则 $\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|\leqslant\varepsilon$ 效果较差,而终止准则 $\|f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)\|\leqslant\varepsilon$ 效果较好;当目标函数在极小点的附近比较平坦时(如图 1.2(b)),终止准则 $\|f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)\|\leqslant\varepsilon$ 效果较差,而终止准则 $\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|\leqslant\varepsilon$ 效果较好.因此,往往将式(1.10)和(1.11)结合使用.

对于无约束最优化问题,在极小点处,$f(\boldsymbol{x})$ 的梯度 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 满足 $\|\nabla f(\boldsymbol{x})\|=0$,

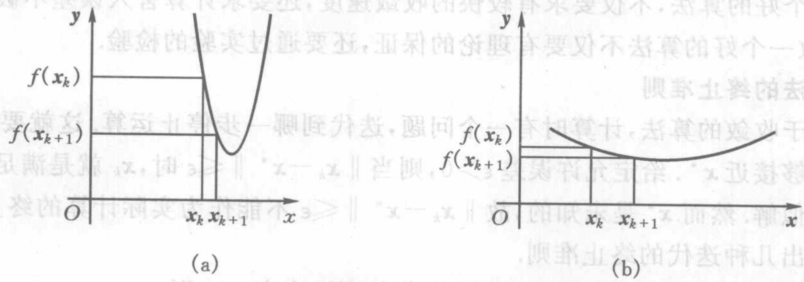

图 1.2

因此也有下述终止准则

$$\| \nabla f(\boldsymbol{x}) \| \leqslant \varepsilon \tag{1.12}$$

此终止准则当目标函数在极小点的附近比较陡峭时效果较好，当目标函数在极小点的附近比较平坦时效果较差. 所以也可以将它与式(1.10)结合使用.

下降方法

在最优化算法中，通常要求迭代点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$使目标函数 $f(\boldsymbol{x})$（一般是评价函数[3]）保持下降，即满足

$$f(\boldsymbol{x}_k) > f(\boldsymbol{x}_{k+1}), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

满足上述性质的算法称为下降算法. 最优化算法一般都是下降算法.

1.2.2 最优化方法的结构

随着最优化理论和技术的发展，针对不同类型的最优化问题，已经产生各种各样的求解方法，这些方法虽然千差万别，但所有的方法都具有下述的基本结构

算法 1.1 （最优化方法的基本迭代格式）

步 1. 给定初始点 $\boldsymbol{x}_0$，令 $k:=0$.

步 2. 如果 $\boldsymbol{x}_k$ 满足某种终止条件，停止，$\boldsymbol{x}_k$ 是近似最优解.

步 3. 确定一个改善 $\boldsymbol{x}_k$ 的修正量 $\boldsymbol{\delta}_k$.

步 4. 令 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\delta}_k$，$k:=k+1$，转步 2.

基本迭代格式中包含了三个要点：初始点的选取；终止条件的给定；修正量 $\boldsymbol{\delta}_k$ 的确定. 其中修正量 $\boldsymbol{\delta}_k$ 的确定是最关键的. 修正量的确定方法不同，就形成了不同的最优化方法.

确定修正量的方法有两种策略，线性搜索策略和信赖域策略. 本书只讨论线性搜索下的最优化方法. 信赖域方法参见文献[1]和[2].

对于多元函数的最优化问题，如果直接在多维空间进行迭代，构造算法往往是