21世纪应用型本科人才培养规划教材

概率论与数理统计

主编／赵彦晖

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

陕西省教育厅重点教材建设项目

概率论与数理统计

主编
赵彦晖
副主编
周祖亮
参编
马池德　霍爱莲　李　祚　宫春梅　黄小萍

西北大学出版社

内容简介

本书是为理工科应用型本科人才培养而编写的概率论与数理统计教材.全书共9章，内容包括：随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机向量及其分布，随机变量的函数及其数值模拟，随机变量的数字特征，样本与抽样分布，参数估计，假设检验，MATLAB软件介绍及应用举例.

本书简明易懂，概念引入自然实用，易于学生理解和掌握,适宜作为应用型本科院校学生(包括理工类和经济类)概率论与数理统计课程的教材，也可作为应用概率统计的工程技术人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 赵彦晖主编.—西安：西北大学出版社，2009.6

21世纪应用型本科规划教材

ISBN 978-7-5604-2630-3

Ⅰ.概… Ⅱ.赵… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材

Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字 (2009) 第070137号

概率论与数理统计

主　　编：赵彦晖
出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路229号
邮　　编：710069
电　　话：029-88305287
经　　销：新华书店
印　　装：西安华新彩印有限责任公司
开　　本：787×960　1/16
印　　张：12
版　　次：2009年6月第1版
印　　次：2009年6月第1次印刷
字　　数：200千字
书　　号：ISBN 978-7-5604-2630-3
定　　价：18.00元

前 言

本书是在陕西省教育厅领导和组织下，为适应21世纪理工科应用型本科人才培养的要求而编写的概率论与数理统计教材，该教材定位为培养理工科应用型本科人才，以必须且够用为度，兼顾学生考研的需求.

本书具有以下特点：

(1) 概念引入自然直观. 如在建立概率公理化定义时，以频率为先导，由频率的性质自然引入概率的公理化定义，使学生能较早地、自然地接受公理化的概率定义.

在引入条件概率的概念时，本书认为条件概率只不过是概率公理化定义在一定条件下的限制. 因此，本书没有把公式

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

作为条件概率的定义，而是把它作为定理获得.

(2) 内容组织科学系统. 作为一本面向21世纪的高等学校数学教材，本书特别注重内容组织的科学性和系统性. 概率论之所以能形成一门科学的理论，其核心就在于它的公理化体系. 由于本书把这一核心安排在引入概率概念的开始，使它尽早与学生见面，不但使概率论作为一门数学理论科学化、系统化，而且使学生通过对各种具体概率的反复计算而加深对概率公理化体系的理解. 也正是由于概率公理化定义的较早建立，避免了各种概率定义的重复出现（历史上形成的古典概率定义、几何概率定义和条件概率定义在本书中已不再是定义，而是定理），实现了所有概率定义的归一化、统一化，减少了学生的理解难度，同时，也优化了课程体系.

(3) 叙述简明易懂，易于教学. 作为一本培养应用型本科人才的高等学校数学教材，本书回避了概率空间的抽象概念和某些理论性较强的推导，但这并不影响概率概念的建立和概率理论的系统性，这样处理反而使教师易于教. 又由于理论性的减弱和计算性的加强，更利于学生学习和动手能力的培养. 另外，在讲述离散型随机变量的分布律时，引入了分布矩阵的概念，使问题的描述更加简练，又易

于学生理解和掌握.

(4) 注意渗透现代数学的概念和术语,以拓宽学生的知识面和视野.例如,在几何概型的定义中采用了“测度”的提法.这样讲,不但不增加理解的难度,反而拓宽了几何概型的应用范围,为后来证明条件概率计算公式埋下了伏笔.

在讲述随机变量的密度概念和大数定律等内容时,顺便引入“几乎处处相等”和“依概率收敛”等概念.这样,不但使问题描述更加准确,而且使学生在几乎不增加什么负担的情况下就了解到了更多的现代数学术语.

(5) 结合计算机的发展,适当添加与计算机有关的内容.作为随机变量函数的应用,本书在第 4 章介绍了随机变量的函数在随机变量数值模拟方面的一些应用,在第 9 章介绍了 MATLAB 软件知识及其在概率统计计算方面的应用,可使学生的实际动手能力得到锻炼。

(6) 突出工科学校的特点,重视理论和实际的结合,注重学生能力的培养.本书不但在理论上注重内容编排的系统性,而且在选材和叙述上尽量做到突出工科院校的特点,注意选取那些既具有实际意义、又具有启发性和应用性的例子作为本书的例题与习题,使学生通过本课程的学习能学到更丰富、更有用的数学知识及更强的运用数学工具的能力.

本书篇幅少、内容全,特别适宜作为高等学校独立院校本科生(包括理工类和经济类)概率论与数理统计课程的教材,也可作为有关工程技术人员的参考书.本书各章配有精选的习题,数量、难度适中,书后附有习题参考答案.

作为陕西省教育厅重点教材建设项目,本书的编排是为了适应 21 世纪理工科应用型本科人才的一种改革尝试.由于编者水平有限,书中一定会有不少的缺点和错误,恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 有一类现象，在一定条件下必然发生，例如，向上抛一石子必然下落，水在标准大气压下加热到 100℃ 就沸腾. 这类现象称为确定性现象. 自然界和社会上还存在着另一类现象，例如，远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机（偶然）的；自动车床加工出来的机械零件，可能是合格品，也可能是废品. 这类在一定条件下，可以重复试验或观察，且能预先确定所有可能的结果，但每次试验的结果不能预知，而大量重复试验的结果却能呈现出某种规律性的现象，称为随机现象. 与之相应的试验称之为随机试验，简称试验.

概率论是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　样本空间与随机事件

1.1.1　样本空间与随机事件

在科学研究和工程技术中，我们遇到的随机现象是各种各样的，与之相应的随机试验也是多种多样的. 如：

E_1：将一枚硬币抛掷两次，观察正、反面出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数；

E_3：在东西南北四面同样受敌时，同时选择两个方向突围；

E_4：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_5：记录某放射性物质在一分钟内放射的粒子数；

E_6：在一批灯泡中任意抽取一个，测试它的寿命 x；

E_7：考察一个汽车通过十字路口时遇红灯的停留时间 t；

E_8：考察用同一把尺子测量不同物体长度时的舍入误差 r.

对于随机试验，尽管在每次试验前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. 而把构成样本空间 Ω 的元素（即 E 的每个可能结果）称为样

本点,记为 ω.

例如,与试验 $E_1,E_2,\cdots,E_8$ 对应的样本空间分别为

$\Omega_1=\{$正正,正反,反正,反反$\}$;

$\Omega_2=\{0,1,2\}$;

$\Omega_3=\{$东西,东南,东北,西南,西北,南北$\}$;

$\Omega_4=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$;

$\Omega_6=\{x\mid x\geqslant 0\}$;

$\Omega_7=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant T\}$,其中 T 为最大等待时间;

$\Omega_8=\{r\mid -h<r\leqslant h\}$,其中 $h>0$ 为误差限.

实际上,在进行随机试验时,人们常常关心的是满足某种条件的那些样本点所组成的集合.例如,若规定某种灯泡的寿命(单位:小时)小于500为次品,则在 E_6 中我们关心灯泡的寿命是否小于500.满足这一条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集

$$A=\{x\mid 0\leqslant x<500\}$$

我们称子集 A 为 E_6 的一个随机事件.显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,表明有次品发生.

一般地,我们称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集 A 为 E 的随机事件,简称事件.在每次试验中,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,称事件 A 发生.特别地,把由一个样本点 ω 组成的单点集 $\{\omega\}$ 称为基本事件.

例如,在试验 E_1 中 $A_1=\{$正正,正反$\}$ 就表示"第一次出现正面",而 $A_2=\{$正正,反反$\}$ 则表示"两次出现同一面"的事件.同样地,试验 E_1 有四个基本事件:$\{$正正$\}$,$\{$正反$\}$,$\{$反正$\}$ 和 $\{$反反$\}$;而试验 E_5 则有无穷多个基本事件:

$$\{0\},\{1\},\{2\},\cdots$$

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间 Ω 的子集,它在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

需要注意:**样本空间的元素是由试验的目的和内容确定的**.例如,在 E_1 和 E_2 中同是将一枚硬币连抛两次,但由于试验的目的不同,其样本空间 Ω_1 和 Ω_2 也不一样.再如下例.

例 1.1.1 设试验为从装有三个白球(记为1,2,3号)与两个黑球(记为4,

5 号）的袋中任取两个球.

(a) 如果观察取出的两个球的颜色，则样本空间是由 3 个样本点构成的集合：

$$\Omega_a=\{\text{两个白球},\text{两个黑球},\text{一白一黑}\}$$

(b) 如果观察取出的两个球的号码，则样本空间是由 10 个样本点构成的集合：

$$\Omega_b=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$$

其中 ω_{ij} 是 Ω_b 的样本点，表示“取出的是第 i 号球和第 j 号球”.

1.1.2　事件间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与运算可用集合论的知识来解释. 下面给出这些关系与运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 均是 E 的事件，则我们有

1° **事件的包含与相等**　若事件 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，或称事件 A 是事件 B 的子事件. 这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与 B 相等或等价.

2° **事件的和事件**　事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的和事件①. 当且仅当 A 与 B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，我们称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$（即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$）为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；而称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个②事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3° **事件的积事件**　事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件. 当且仅当 A 与 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，我们称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$（即 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$）为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积

---

① 当 $A\cap B=\varnothing$ 时，我们常把 $A\cup B$ 记作 $A+B$，称为 A 与 B 的直和.

② 如果某集合的元素可按一定的顺序排成一个数列：$x_1,x_2,\cdots$，则称该集合为可列集或可数集，而称该集合中元素的个数为可列个.

事件；而称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

4° **事件的差事件** 事件 $A-B=\{x \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件. 当且仅当 A 发生而 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

5° **事件的互不相容** 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的或互斥的. 这指的是事件 A 与 B 不能同时发生.

6° **事件的逆事件** 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为逆事件或互为对立事件，这指的是对每次试验而言，事件 A 与 B 中必有且只有一个发生. A 的对立事件记作 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

为了便于读者掌握事件间的关系与运算，我们将它们直观地绘制于图 1.1 中. 在图 1.1 中，正方形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则阴影部分所表示的事件分别为：

(a) $A\subset B$：事件 A 是 B 的子事件；

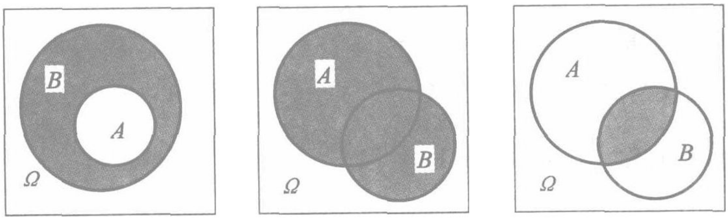
(b) $A\cup B$：事件 A 与 B 的和事件；

(c) $A\cap B$：事件 A 与 B 的积事件；

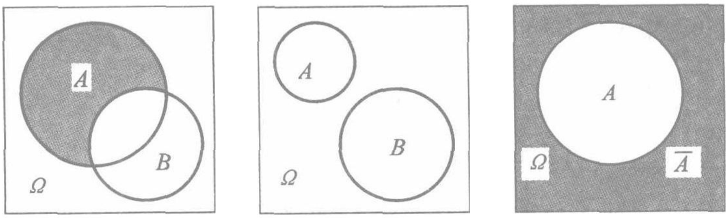
(d) $A-B$：事件 A 与 B 的差事件；

(e) $AB=\varnothing$：事件 A 与 B 互不相容；

(f) $\overline{A}$：事件 A 的对立事件.



(a) $A\subset B$ (b) $A\cup B$ (c) $A\cap B$



(d) $A-B$ (e) $AB=\varnothing$ (f) $\overline{A}$

图 1.1 事件关系的文氏图

例 1.1.2　在试验 E_4（掷一颗骰子，观察出现的点数）中，设事件 A 表示“掷出偶数点”，事件 B 表示“掷出的点数是 3 的倍数”，则有

$$A=\{2,4,6\}$$

$$B=\{3,6\}$$

$$A\cup B=\{2,3,4,6\}$$

$$A\cap B=\{6\}$$

$$A-B=\{2,4\}$$

$$\overline{A\cup B}=\{1,5\}$$

事件间的运算规律完全等同于集合的运算律，即有以下的事件运算律.

事件运算律　设 Ω 是试验 E 的样本空间，A,B,C 均为试验 E 的事件，则它们满足

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(5) $\overline{\overline{A}}=A,\ A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\overline{A}=\varnothing$.

例 1.1.3　在图 1.2 所示的电路中，设事件 A,B,C 分别表示继电器接点 a，b，c 闭合，事件 D 表示指示灯 d 亮，试用 A,B,C 表示事件 $D,\overline{D},A-D,D-A$.

解　由电路是否闭合立刻可知

$$D=A(B\cup C)$$

从而

$$\overline{D}=\overline{A}\cup\overline{B\cup C}=\overline{A}\cup\overline{B}\,\overline{C}$$

$$A-D=A\overline{D}=A(\overline{A}\cup\overline{B}\,\overline{C})=A\overline{B}\,\overline{C}$$

$$D-A=\overline{A}D=\overline{A}A(B\cup C)=\varnothing$$

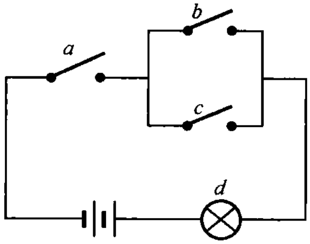


图 1.2

1.2　事件的频率与概率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件外），它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，为了确定河堤的高度，就需要知道河流在该地段每年最大洪水达到某一

高度这一事件发生的可能性大小. 当然最好是能定量地描述,亦即找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此,首先引入频率的概念. 频率描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 事件的频率

定义 1.2.1 在相同条件下,重复进行 n 次试验,在 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$,亦即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

显然,频率 $f_n(A)$ 满足下述三条基本性质:

1°(非负性) 对于任一随机事件 A,有 $f_n(A)\geqslant 0$;

2°(规范性) 对于必然事件 Ω,有 $f_n(\Omega)=1$;

3°(有限可加性) 对两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验总次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度,频率愈大,事件 A 发生愈频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而,直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小. 但是否可行? 先看下面的例子.

例 1.2.1 考虑"抛硬币"这个试验,考察正面发生的事件 A. 我们将一枚硬币抛掷 5 次,50 次,500 次,各做 10 遍,用 n_A 表示事件 A 发生的频数,$f_n(A)$ 表示 A 发生的频率,则得到的数据如表 1.1 所示. 这样的试验在历史上也有不少人做过,其中最著名的结果见表 1.2.

表 1.1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506

续表

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1.2

试　验　者	n	n_A	$f_n(A)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.1 和表 1.2 的结果不难看出频率具有下列特性.

1° **(随机波动性)**　当 n 较小时，频率 $f_n(A)$ 在 0～1 之间随机波动，其幅度较大. 即使对同样的 n 所得的 $f_n(A)$ 也不尽相同. 因此，当 n 较小时用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的.

2° **(统计规律性)**　当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数（如 0.5）. 因此，用频率的这个稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的. 由于频率的这种稳定性是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性.

事实上，众多试验都表明：随机事件 A 在大量的重复试验中都具有这种客观的统计规律性——频率的稳定性. 因此，我们自然**把频率的这个稳定值作为随机事件发生的可能性大小的度量**，并称之为事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 概率的这个定义通常称为**概率的统计定义**. 由概率的统计定义可知

$$P(A)\approx f_n(A)$$

现在，我们虽然有了概率的统计定义，但要从频率直接获得概率却是非常困难的，甚至是不可能的. 不过，频率的稳定性和频率的基本性质启示我们给出如下的度量随机事件 A 发生的可能性大小的概率定义.

1.2.2　概率的公理化体系

定义 1.2.2　设 Ω 为试验 E 的样本空间，Ω 的子集 A 是随机事件，$P(A)$ 是实

值函数，如果 $P(A)$ 满足下述三条公理：

公理 1（非负性） 对于任一随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

公理 2（规范性） 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

公理 3（完全可加性） 对两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

定义 1.2.2 称为**概率的公理化定义**.

在第 5 章，我们将证明：**当 $n\to\infty$ 时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下收敛于概率 $P(A)$.** 基于这一事实，我们有理由将如此定义的概率 $P(A)$ 用来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

由概率的公理化定义，容易推得以下定理.

定理 1.2.1（概率的基本性质） 满足上述三条公理的概率 $P(A)$ 具有下列基本性质：

$1°$ 对于不可能事件 $\varnothing$，有

$$P(\varnothing)=0$$

$2°$（有限可加性）对两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$3°$ 设 A,B 是任意两个随机事件，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

特别地，当 $A\subset B$ 时有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A)$$

$4°$ 对于任一随机事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A),\quad P(A)\leqslant 1$$

证 $1°$ 由 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$ 及概率的完全可加性知

$$P(\Omega) = P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

再由 $P(\Omega)=1$ 及 $P(\varnothing)\geqslant 0$ 知 $P(\varnothing)=0$.

$2°$ 令 $A_i=\varnothing(i=k+1,k+2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

且 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，故由概率的完全可加性及性质 $1°$，得

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

3° 这时 $B=(B-A)\cup(AB)$ 且 $(B-A)$ 与 (AB) 互斥，故由性质 2°知

$$P(B)=P(B-A)+P(AB)$$

移项便得

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

特别地，当 $A\subset B$ 时有 $AB=A$，故这时有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

再由 $P(B-A)\geqslant 0$ 知 $P(B)\geqslant P(A)$.

4° 在性质 3°中取 $B=\Omega$（必然事件）即得.

定理 1.2.2（加法定理）　对于任意两个随机事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad \text{（加法公式）}$$

证　$A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 A 与 $(B-AB)$ 互斥，故由概率的基本性质 2°和 3°即知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

例 1.2.2　设 A,B 是两个随机事件，已知

$$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5,\quad P(AB)=0.4$$

求 $P(B-A)$，$P(\overline{A})$，$P(A\cup B)$.

解　由概率的基本性质和加法公式即得

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.6=0.4$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.5-0.4=0.7$$

利用数学归纳法我们还能把上述加法公式推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形，这时可证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \qquad (1.2)$$

特别地，对三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

概率的公理化体系的建立使概率论有了严谨而坚实的理论基础，因而在概率论的发展史中起着重要的作用.