多复变在中国的研究与发展

Several Complex Variables in China on Its Research and Developments

主　　编　陆启铿
执行主编　殷慰萍

科学出版社
www.sciencep.com

多复变在中国的研究与发展

Several Complex Variables in China on Its Research and Developments

陆启铿　主编

殷慰萍　执行主编

科学出版社

北京

内容简介

本书由中国科学院陆启铿院士和首都师范大学殷慰萍教授领衔编撰，共有作者36人. 陆启铿院士亲自撰写了1949~1989年间中国科学家在多复变领域的研究成果，其后的发展由各研究方向的专家分别撰写. 本书比较全面地论述了从20世纪50年代至今多复变在中国的研究与发展，展示了重要研究成果，叙述了研究思想和方法并提出了尚未解决的重要问题，特别反映了多复变研究中华罗庚学派的特色.

本书有51幅图片，包含了60年来在中国大陆举行的多复变国际会议的合影，展现了各地多复变研究群体及众多专家的风采. 本书提供了中国多复变研究文献1500多篇.

本书适合于高等院校高年级学生、研究生以及数学爱好者和数学史学者们阅读和珍藏.

图书在版编目(CIP)数据

多复变在中国的研究与发展(Several Complex Variables in China on Its Research and Developments)/陆启铿主编，殷慰萍执行主编. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023593-0

Ⅰ.多… Ⅱ.陆… Ⅲ. 中国-概况-文集 Ⅳ. K92-53

中国版本图书馆CIP数据核字 (2008) 第193395号

责任编辑：王丽平 唐保军 王国华／责任校对：赵桂芬
责任印制：钱玉芬／封面设计：鑫联必升

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年4月第一次印刷 印张：41 3/4 插页：6
印数：1—1 000 字数：813 000

定价：128.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

我请本书的主编陆启铿院士写前言，他认为他在 2007 年 10 月在首都师范大学举行的多复变学术交流会期间的正式讲话可以代替. 下面是他的两次正式讲话的摘要 (第一个讲话简要回顾中国多复变研究初创时期的历史以及本书由多人撰写的起因; 第二个讲话回忆了与殷慰萍的关系以及与多复变大家的历史渊源). 我再做若干注记和补充就作为本书的前言.

开幕式讲话 (陆启铿, 2007 年 10 月 27 日) 摘要:

中国多复变函数研究的创始人是华罗庚. 新中国成立后他最初的工作是构造典型域的完备正交归一函数系及其核函数, 1951 年我作为他的学生帮助他进行核对、核算, 从而学到他的一些技巧. 后来钟同德与龚昇同志于 1954 年到中国科学院数学研究所. 华先生建议我写一份讲义, 组织一个讨论班, 由他俩人及北京大学的董怀允、陈杰轮流报告. 这份讲义就是后来《数学进展》1956 年发表的 "多复变函数与酉几何" 一文.

1958 年前后同德回厦门大学, 龚昇调去中国科技大学, 后来分别带了一批多复变学生. 程民德先生要求华先生在北京大学开多复变专门化. 华先生因工作忙, 派我去开. 带了 10 个学生, 这就是钟家庆、殷慰萍、陈志华、孙继广、陈志鹤、曾宪立、文涛、石赫、王大明等, 其中 4 人已经去世了. "文化大革命" 中多复变研究中断, 直到 1978 年伍鸿熙访华之际, 在中国科学院数学研究所我又和钟同德、龚昇见面, 一起商量恢复多复变的研究. 决定每年举行一次全国多复变会议, 轮流由中国科学院数学研究所、厦门大学、中国科技大学主持. 后因工作太忙, 改为两年一次, 后又变为不定期. 总之, 从 1949 年到 1989 年我国多复变研究的情况我是清楚的. 1989 年之后, 由于新人辈出, 研究方向不断扩大, 我就逐渐不清楚我国多复变的全局情况, 甚至有些工作我都看不懂了, 而且有些全国多复变会议我都没有出席. 今年殷慰萍教授组织这样一次会议, 各方多复变专家来报告他们的总结性工作, 我认为是很好的.

祝殷慰萍教授 70 寿 (陆启铿, 2007 年 10 月 28 日) 摘要:

大约 50 年前, 殷慰萍教授曾是我的学生. 他和钟家庆合作的毕业论文发表在《北京大学学报》上, 在当时是少有的. 毕业后分配到中国科学院数学研究所, "文化大革命" 中去五七干校之后, 不想再在数学所工作, 我深为惋惜. 他去了中国科技大学工作, 其间曾和我合作研究过 de-Sitter 空间的波动方程的 Cauchy 问题, 文章发表在《数学年刊》的创刊号上. 其实此文主要是他写的, 我建议把我的名字去掉,

但他坚决不同意. 这是我第一次沾了他的光, 后来沾他的光不少. 我 65 岁生日时, 他在中国科技大学为我开了一个庆祝会. 后来他到首都师范大学工作之后, 1997 年组织一个中法的学术会议, 叫我做主席; 2004 年又组织了一个国际的规模很大的国际会议, 又叫我当主席. 其实我都没有出半点力.

殷慰萍到首都师范大学之后, 建立了多复变研究的又一个基地, 带了一批学生, 成绩卓著. 主要是由于他学术上逐渐形成独特的风格, 文思如泉涌, 文章不断出来. 已经发表了 140 多篇文章. 我感觉他近年主要成就是引进华罗庚域, 并研究其解析及几何性质. 对我个人而言, 特别感兴趣的是, 他后来从这些域当中找出一些非齐性域而 Bergman 核函数没有零点. 它的意义在于有了一批代表域, 这是对双全纯映射下分类问题的一个贡献.

或者有人奇怪为什么要向我的学生祝寿呢? 我就讲一个故事. 庆祝 J.J.Kohn 60 岁生日的会议我参加了, 在晚宴上他的老师大数学家 D.C.Spencer 特别从他所住的山上下来在晚宴上发表演说, 向 Kohn 祝贺.

D.C.Spencer 与华罗庚于 20 世纪 30 年代在剑桥大学同一个办公室, 都是搞数论的. 后 Spencer 搞单叶函数, 其后与 Kodaira 合作, 是多复变形变理论 (deformation) 的两个创始人. Griffiths 是 Kohn 的师弟. 这就是我们的历史渊源.

以上是陆启铿院士 2007 年 10 月多复变学术交流会期间的讲话. **我作如下注记.**

A. 20 世纪 50 年代是中国多复变研究的初创时代, 那时的情况陆启铿已经在多处谈及, 但是都散见在学术文章中, 读到该文章的人才会注意到. 因此在这里重复一下, 同时补充说明一下那时的学术成就还是有意义的. 中国多复变的开山祖师是华罗庚, 他在西南联大时就开始研究多复变, 回国前在美国就发表了多篇多复变研究的重要论文. 华老回国后主要研究典型域上的调和分析. 1951 年在华罗庚的建议下, 陆启铿从中山大学调到中国科学院数学研究所, 在华老的指导下开始多复变的研究. 当时和程民德、庄圻泰、闵嗣鹤、许宝禄等约 10 人在北京大学开讨论班, 讨论华先生从苏联带回来的 B. A. Fuks 的《多复变解析函数论》(俄文). 但之后, 除了陆, 没有人继续研究多复变. 1954 年钟同德从厦门大学到中国科学院数学研究所进修 2 年 (现在称为做访问学者). 半年后, 陈建功的研究生龚昇因故从复旦大学调中国科学院数学研究所改投华罗庚门下. 华罗庚时任中国科学院数学研究所所长, 公务繁忙, 在华先生吩咐下, 陆启铿写了一份讲义 "多复变函数与西几何". 并叫陆启铿主持讨论班, 由钟同德、龚昇以及北大的董怀允、陈杰轮流报告陆启铿所写的该讲义. 两年后钟同德回厦门大学. 其间, 龚昇到复旦大学完成了研究生的毕业论文答辩并于 1958 年调中国科技大学. 这就是中国多复变的研究与发展的创始阶段. 那时, 华罗庚在多复变典型域的调和分析的研究获得重要成果荣膺首届国家自然科学奖一等奖, 并与陆启铿一起建立了典型域上的调和函数论; 陆启铿还证明了现在

称为的陆启铿引理, 发现了 Schwarz 常数和其他 2 个解析不变量, 从而找到了不可约对称有界域的全系解析不变量, 在多复变中第一次把 Schwarz 引理与曲率联系了起来; 证明了多复变数空间中有界域的 Carathéodory 度量不可能大于 Bergman 度量从而有了现在称为的陆启铿常数; 与钟同德一起给出了 Bochner-Martinelli 积分的 Plemelj 公式. 由此可知, 在 20 世纪 50 年代中国多复变研究的开创时期就获得了一系列的具有国际领先水平的成果, 并影响至今.

B. “文化大革命” 后, 萧荫堂 (Yum Tong Siu) 对中国多复变研究的恢复和发展起了重要作用. 1979 年他在中国科学院数学研究所作了多复变函数论的系列报告, 由钟家庆和陈志华记录、整理并由钟家庆补充了复几何方面的基础知识, 由中国科学院和厦门大学油印成册, 成为多个单位的多复变研究生的教材. 后来台湾的出版社准备出版未成, 现在陈志华又把它译成英文, 希望它能早日出版.

C. 陆启铿说 1949 年到 1989 年中国多复变研究和发展的情况他是清楚的, 其后他就逐渐不清楚我国多复变的全局情况. 因此 2007 年的多复变学术交流会, 就请我国多复变的各方面的专家作总结性报告, 并在会后出书. 此事得到各方面的有识之士的大力支持, 特别是本书在各位作者的通力合作下终于出版面世.

D. 1992 年上半年我在中国科技大学组织了一次多复变学术会议庆贺陆启铿院士 65 大寿, 并请示了谷超豪校长. 谷校长指示, 一般到 70、80 岁才为院士祝寿, 因而会标上不要明写祝寿字样, 但是可以举行祝寿晚宴. 我们按照他的指示办. 印象深刻的一点是, 我在报告陆启铿院士学术成就时, 明确指出 1972 年陆启铿阐明了微分几何上的主纤维丛的联络与 Yang-Mills 场的关系, 写有讲义并在理论物理所作过系列报告, 奠定了研究 Yang-Mills 场的数学基础, 其文章发表于 1974 年的物理学报 (详见: 著名数学家陆启铿学部委员 —— 庆贺陆启铿教授 65 寿辰, 数学季刊, 1992, 7(3): 1-8); 在首届华罗庚数学奖的颁奖大会上, 我也有相同意思的发言 (见: 中国数学会通讯, 1992 年第 4 期).

现在就本书的特点再作一些补充:

本书的书名为《多复变在中国的研究与发展》, 事实上这种类型的书很多, 不但有中文版还有外文版. 例如:

1. Several Complex Variables in China. Contemporary Math Series, Vol. 142. Amer Math Soc, 1993.

2. Probability Theory and Its Applications in China. Contemporary Math Series, Vol. 118. Amer Math Soc, 1991.

3. Partial Differential Equations in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 288. Kluwer Academic Publishers, 1994.

4. Computational Mathematics in China. Contemporary Math Series, Vol. 163. Amer Math Soc, 1994.

5. Harmonic Analysis in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 327. Kluwer Academic Publishers, 1995.

6. Functional Analysis in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 356. Kluwer Academic Publishers, 1996.

7. 由杨乐、李忠主编的中国数学会 60 年的系列书籍中也有这种类型的书, 例如, 石钟慈、林群写的《有限元方法在中国》.

上述第一本就是龚昇和杨重骏联合主编的, 本书就是类似于上述类型的书.

照片中已经把迄今为止在国内所开的国际会议 (在中国香港、台湾、澳门召开的会议因缺乏资料没有计入) 给予记述. 这些会议之后都出版了文集, 特别是 2005 年、2006 年和 2007 年分别为龚昇、陆启铿和钟同德祝寿的会议, 在《中国科学》还出版了专辑. 本书与此类似, 既有专辑的意思, 也带有祝寿的印记. 所不同的是, 本书有 12 页彩色照片, 记录了本书 36 位作者以及其所在地域的多复变研究群体的风采, 特别是给出了上述那些会议的与会者的合影, 在照片说明中把出席者一一列出, 这些就隐含了很多信息. 还有少数代表性照片反映了祝寿的盛况. 这些照片也是本书的一个特点.

本书的另一个特点就是补充了约 1200 多篇的自 1989 年以来的多复变的参考文献, 这样才能补足一些多复变学者没有成为本书作者而形成的缺陷, 而且也使本书能够更名副其实一点. 同时也继承了陆启铿在写 “多复变函数论在中国: 1949~1989” 的风格, 尽可能收集国内多复变学者的论文以飨读者.

第 1 章和最后 1 章特地安排成陆启铿院士的文章. 其余各章都是以执行主编收到文章的时间先后为序. 本书文章都由执行主编组稿, 未送审, 文责自负.

本书只反映 2008 年以前的多复变在中国的研究与发展. 历史的长河无穷尽, 中国的多复变也将在这长河中继续发展. 江山代有才人出, 各领风骚数十年, 中国多复变界也会如此. 期望后世的英才们或有心人能把中国多复变的研究与发展每隔若干年 (例如 20 年) 就续写并出版之, 在历史的长河中不断游弋.

般慰萍

2009 年 3 月于北京

目 录

第 1 章　非紧对称空间的热核*

陆启铿

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, luqi@math.ac.cn

1.1　引　　言

令 $\mathcal{M}$ 是一个 M 维的黎曼流形, 且

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{j,k=1}^{M} g_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k \tag{1.1.1}$$

是局部可容许坐标 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^M)$ 下的黎曼度量. 我们总是把 x 看成 $1 \times M$ 的矩阵, 则 (1.1.1) 可记为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}xG\mathrm{d}x', \tag{1.1.2}$$

其中 $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^M)$, $\mathrm{d}x'$ 表示 $\mathrm{d}x$ 的转置. 度量张量 g_{jk} 构成 $M \times M$ 阶度量矩阵

$$G = (g_{jk}). \tag{1.1.3}$$

度量 (1.1.1) 相应的 Laplace-Beltrami 算子 (L-B 算子) 定义为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{j,k=1}^{M}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^k}\right], \tag{1.1.4}$$

其中

$$(g^{jk}) = G^{-1} \tag{1.1.5}$$

且

$$g = \det G. \tag{1.1.6}$$

$\mathcal{M}$ 上的热方程是如下定义的微分方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f(x,t), \tag{1.1.7}$$

---

* 本文的英文版本为 The heat kernels of non compact symmetric spaces. Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 2000, 289~424.

其中 $f(x,t)$ 是定义在 $(x,t)\in\mathcal{M}\times\mathbb{R}_+$ 上的函数, 对变量 x 和 t 具有二次连续的偏导数. $\mathbb{R}_+$ 表示正实轴.

$\mathcal{M}$ 的热核是定义在 $(x,y,t)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}\times\mathbb{R}_+$ 上的一个实值函数 $H(x,y,t)$, 其对变量 x, y 和 t 有连续的二阶偏导数并且满足下列方程:

(i) $H(x,y,t)=H(y,x,t)$;

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial t}H(x,y,t)=\Delta_x H(x,y,t)$,

其中 Δ_x 表示关于变量 x 的 Δ 算子;

(iii) 对于任一在 $\mathcal{M}$ 连续并有界的函数 $\phi(y)$, 总有下面的公式成立:

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathcal{M}}H(x,y,t)\phi(y)\dot{y}=\phi(x),$$

其中 $\lim\limits_{t\to+0}$ 表示 t 从正半轴趋向于 0. 体积元素

$$\dot{y}=\sqrt{g}\mathrm{d}y^1\mathrm{d}y^2\cdots\mathrm{d}y^M. \tag{1.1.8}$$

当 $\mathcal{M}$ 紧时, 热核的构造就化为 Δ 的特征函数的完备规范正交系的构造.

$\mathcal{M}$ 上的具有二次连续偏导数的函数 f 称为 Δ 的**特征函数**, 若其满足

$$\Delta f+\lambda f=0, \tag{1.1.9}$$

其中 λ 是一常数, 称为**特征值**. 特别地, 当 $\lambda=0$, f 称为**调和函数**. 当 $\lambda\neq 0$, f 称为 λ 特征函数.

见文献 [1] 知, 当 $\mathcal{M}$ 紧时, Δ 的所有特征值都是正的、可数的, 则

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_p<\cdots, \tag{1.1.10}$$

称为 Δ 的**谱**. 所有的 λ_p 特征函数构成一个有限维数 N_p 的实向量空间 $\mathcal{H}_p$. 因而可以选取 $\mathcal{H}_p$ 的一组规范正交基 $\phi_1^{(p)}(x),\cdots,\phi_{N_p}^{(p)}(x)$:

$$\int_{\mathcal{M}}\phi_\alpha^{(p)}(x)\phi_\beta^{(p)}(x)\dot{x}=\delta_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta=1,2,\cdots,N_p. \tag{1.1.11}$$

函数

$$h_p(x,y)=\sum_{\alpha=1}^{N_p}\phi_\alpha^{(p)}(x)\phi_\alpha^{(p)}(y),\quad (x,y)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M} \tag{1.1.12}$$

称为 λ_p 核. 它是 $\mathcal{H}_p$ 的再生核; 即对任意的 $\phi(x)\in\mathcal{H}_p$, 有

$$\phi(x)=\int_{\mathcal{M}}h_p(x,y)\phi(y)\dot{y}. \tag{1.1.13}$$