

多复变在中国的 研 究 与 发 展

Several Complex Variables in China on
Its Research and Developments

主 编 陆启铿

执行主编 殷慰萍



科 学 出 版 社

www.sciencep.com

多复变在中国的研究与发展

Several Complex Variables in China on Its Research and Developments

陆启铿 主编

殷慰萍 执行主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书由中国科学院陆启铿院士和首都师范大学殷慰萍教授领衔编撰,共有作者 36 人。陆启铿院士亲自撰写了 1949~1989 年间中国科学家在多复变领域的研究成果,其后的发展由各研究方向的专家分别撰写。本书比较全面地论述了从 20 世纪 50 年代至今多复变在中国的研究与发展,展示了重要研究成果,叙述了研究思想和方法并提出了尚未解决的重要问题,特别反映了多复变研究中华罗庚学派的特色。

本书有 51 幅图片,包含了 60 年来在中国大陆举行的多复变国际会议的合影,展现了各地多复变研究群体及众多专家的风采。本书提供了中国多复变研究文献 1500 多篇。

本书适合于高等院校高年级学生、研究生以及数学爱好者和数学史学者们阅读和珍藏。

图书在版编目(CIP)数据

多复变在中国的研究与发展(Several Complex Variables in China on Its Research and Developments)/陆启铿主编,殷慰萍执行主编. —北京:科学出版社, 2009

ISBN 978-7-03-023593-0

I. 多… II. 陆… III. 中国-概况-文集 IV. K92-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 193395 号

责任编辑:王丽平 唐保军 王国华/责任校对:赵桂芬

责任印制:钱玉芬/封面设计:鑫联必升

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2009 年 4 月第一次印刷 印张: 41 3/4 插页: 6

印数: 1—1 000 字数: 813 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

我请本书的主编陆启铿院士写前言,他认为他在2007年10月在首都师范大学举行的多复变学术交流会期间的正式讲话可以代替.下面是他的两次正式讲话的摘要(第一个讲话简要回顾中国多复变研究初创时期的历史以及本书由多人撰写的起因;第二个讲话回忆了与殷慰萍的关系以及与多复变大家的历史渊源).我再做若干注记和补充就作为本书的前言.

开幕式讲话(陆启铿,2007年10月27日)摘要:

中国多复变函数研究的创始人是华罗庚.新中国成立后他最初的工作是构造典型域的完备正交归一函数系及其核函数,1951年我作为他的学生帮助他进行核对、核算,从而学到他的一些技巧.后来钟同德与龚昇同志于1954年到中国科学院数学研究所.华先生建议我写一份讲义,组织一个讨论班,由他俩人及北京大学的董怀允、陈杰轮流报告.这份讲义就是后来《数学进展》1956年发表的“多复变函数与酉几何”一文.

1958年前后同德回厦门大学,龚昇调去中国科技大学,后来分别带了一批多复变学生.程民德先生要求华先生在北京大学开多复变专门化.华先生因工作忙,派我去开.带了10个学生,这就是钟家庆、殷慰萍、陈志华、孙继广、陈志鹤、曾宪立、文涛、石赫、王大明等,其中4人已经去世了.“文化大革命”中多复变研究中断,直到1978年伍鸿熙访华之际,在中国科学院数学研究所我又和钟同德、龚昇见面,一起商量恢复多复变的研究.决定每年举行一次全国多复变会议,轮流由中国科学院数学研究所、厦门大学、中国科技大学主持.后因工作太忙,改为两年一次,后又变为不定期.总之,从1949年到1989年我国多复变研究的情况我是清楚的.1989年之后,由于新人辈出,研究方向不断扩大,我就逐渐不清楚我国多复变的全球情况,甚至有些工作我都看不懂了,而且有些全国多复变会议我都没有出席.今年殷慰萍教授组织这样一次会议,各方多复变专家来报告他们的总结性工作,我认为是很好的.

祝殷慰萍教授70寿(陆启铿,2007年10月28日)摘要:

大约50年前,殷慰萍教授曾是我的学生.他和钟家庆合作的毕业论文发表在《北京大学学报》上,在当时是少有的.毕业后分配到中国科学院数学研究所,“文化大革命”中去五七干校之后,不想再在数学所工作,我深为惋惜.他去了中国科技大学工作,其间曾和我合作研究过de-Sitter空间的波动方程的Cauchy问题,文章发表在《数学年刊》的创刊号上.其实此文主要是他写的,我建议把我的名字去掉,

但他坚决不同意. 这是我第一次沾了他的光, 后来沾他的光不少. 我 65 岁生日时, 他在中国科技大学为我开了一个庆祝会. 后来他到首都师范大学工作之后, 1997 年组织一个中法的学术会议, 叫我做主席; 2004 年又组织了一个国际的规模很大的国际会议, 又叫我当主席. 其实我都没有出半点力.

殷慰萍到首都师范大学之后, 建立了多复变研究的又一个基地, 带了一批学生, 成绩卓著. 主要是由于他学术上逐渐形成独特的风格, 文思如泉涌, 文章不断出来. 已经发表了 140 多篇文章. 我感觉他近年主要成就是引进华罗庚域, 并研究其解析及几何性质. 对我个人而言, 特别感兴趣的是, 他后来从这些域当中找出一些非齐性域而 Bergman 核函数没有零点. 它的意义在于有了一批代表域, 这是对双全纯映射下分类问题的一个贡献.

或者有人奇怪为什么要向我的学生祝寿呢? 我就讲一个故事. 庆祝 J.J.Kohn 60 岁生日的会议我参加了, 在晚宴上他的老师大数学家 D.C.Spencer 特别从他所住的山上下来在晚宴上发表演说, 向 Kohn 祝贺.

D.C.Spencer 与华罗庚于 20 世纪 30 年代在剑桥大学同一个办公室, 都是搞数论的. 后 Spencer 搞单叶函数, 其后与 Kodaira 合作, 是多复变形变理论 (deformation) 的两个创始人. Griffiths 是 Kohn 的师弟. 这就是我们的历史渊源.

以上是陆启铿院士 2007 年 10 月多复变学术交流会期间的讲话. 我作如下注记.

A. 20 世纪 50 年代是中国多复变研究的初创时代, 那时的情况陆启铿已经在多处谈及, 但是都散见在学术文章中, 读到该文章的人才会注意到. 因此在这里重复一下, 同时补充说明一下那时的学术成就还是有意义的. 中国多复变的开山祖师是华罗庚, 他在西南联大时就开始研究多复变, 回国前在美国就发表了多篇多复变研究的重要论文. 华老回国后主要研究典型域上的调和函数. 1951 年在华罗庚的建议下, 陆启铿从中山大学调到中国科学院数学研究所, 在华老的指导下开始多复变的研究. 当时和程民德、庄圻泰、闵嗣鹤、许宝禄等约 10 人在北京大学开讨论班, 讨论华先生从苏联带回来的 B. A. Fuks 的《多复变解析函数论》(俄文). 但之后, 除了陆, 没有人继续研究多复变. 1954 年钟同德从厦门大学到中国科学院数学研究所进修 2 年 (现在称为访问学者). 半年后, 陈建功的研究生龚昇因故从复旦大学调中国科学院数学研究所改投华罗庚门下. 华罗庚时任中国科学院数学研究所所长, 公务繁忙, 在华先生吩咐下, 陆启铿写了一份讲义“多复变函数与酉几何”. 并叫陆启铿主持讨论班, 由钟同德、龚昇以及北大的董怀允、陈杰轮流报告陆启铿所写的该讲义. 两年后钟同德回厦门大学. 其间, 龚昇到复旦大学完成了研究生的毕业论文答辩并于 1958 年调中国科技大学. 这就是中国多复变的研究与发展的创始阶段. 那时, 华罗庚在多复变典型域的调和函数的研究获得重要成果荣膺首届国家自然科学基金一等奖, 并与陆启铿一起建立了典型域上的调和函数论; 陆启铿还证明了现在

称为的陆启铿引理,发现了 Schwarz 常数和其他 2 个解析不变量,从而找到了不可约对称有界域的全系解析不变量,在多复变中第一次把 Schwarz 引理与曲率联系了起来;证明了多复变数空间中有界域的 Carathéodory 度量不可能大于 Bergman 度量从而有了现在称为的陆启铿常数;与钟同德一起给出了 Bochner-Martinelli 积分的 Plemelj 公式. 由此可知,在 20 世纪 50 年代中国多复变研究的开创时期就获得了一系列的具有国际领先水平的成果,并影响至今.

B. “文化大革命”后,萧荫堂 (Yum Tong Siu) 对中国多复变研究的恢复和发展起了重要作用. 1979 年他在中国科学院数学研究所作了多复变函数论的系列报告,由钟家庆和陈志华记录、整理并由钟家庆补充了复几何方面的基础知识,由中国科学院和厦门大学油印成册,成为多个单位的多复变研究生的教材. 后来台湾的出版社准备出版未成,现在陈志华又把它译成英文,希望它能早日出版.

C. 陆启铿说 1949 年到 1989 年中国多复变研究和发展的情况他是清楚的,其后他就逐渐不清楚我国多复变的全局情况. 因此 2007 年的多复变学术交流会,就请我国多复变的各方面的专家作总结性报告,并在会后出书. 此事得到各方面的有识之士的大力支持,特别是本书在各位作者的通力合作下终于出版面世.

D. 1992 年上半年我在中国科技大学组织了一次多复变学术会议庆贺陆启铿院士 65 大寿,并请示了谷超豪校长. 谷校长指示,一般到 70、80 岁才为院士祝寿,因而会标上不要明写祝寿字样,但是可以举行祝寿晚宴. 我们按照他的指示办. 印象深刻的一点是,我在报告陆启铿院士学术成就时,明确指出 1972 年陆启铿阐明了微分几何上的主纤维丛的联络与 Yang-Mills 场的关系,写有讲义并在理论物理所作过系列报告,奠定了研究 Yang-Mills 场的数学基础,其文章发表于 1974 年的物理学报 (详见:著名数学家陆启铿学部委员——庆贺陆启铿教授 65 寿辰,数学季刊,1992, 7(3): 1-8); 在首届华罗庚数学奖的颁奖大会上,我也有相同意思的发言 (见:中国数学会通讯,1992 年第 4 期).

现在就本书的特点再作一些补充:

本书的书名为《多复变在中国的研究与发展》,事实上这种类型的书很多,不但有中文版还有外文版. 例如:

1. Several Complex Variables in China. Contemporary Math Series, Vol. 142. Amer Math Soc, 1993.
2. Probability Theory and Its Applications in China. Contemporary Math Series, Vol. 118. Amer Math Soc, 1991.
3. Partial Differential Equations in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 288. Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. Computational Mathematics in China. Contemporary Math Series, Vol. 163. Amer Math Soc, 1994.

5. Harmonic Analysis in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 327. Kluwer Academic Publishers, 1995.

6. Functional Analysis in China. Mathematics and Its Applications Series, Vol. 356. Kluwer Academic Publishers, 1996.

7. 由杨乐、李忠主编的中国数学会 60 年的系列书籍中也有这种类型的书, 例如, 石钟慈、林群写的《有限元方法在中国》.

上述第一本就是龚昇和杨重骏联合主编的, 本书就是类似于上述类型的书.

照片中已经把迄今为止在国内所开的国际会议 (在中国香港、台湾、澳门召开的会议因缺乏资料没有计入) 给予记述. 这些会议之后都出版了文集, 特别是 2005 年、2006 年和 2007 年分别为龚昇、陆启铿和钟同德祝寿的会议, 在《中国科学》还出版了专辑. 本书与此类似, 既有专辑的意思, 也带有祝寿的印记. 所不同的是, 本书有 12 页彩色照片, 记录了本书 36 位作者以及其所在地域的多复变研究群体的风采, 特别是给出了上述那些会议的与会者的合影, 在照片说明中把出席者一一列出, 这些就隐含了很多信息. 还有少数代表性照片反映了祝寿的盛况. 这些照片也是本书的一个特点.

本书的另一个特点就是补充了约 1200 多篇的自 1989 年以来的多复变的参考文献, 这样才能补足一些多复变学者没有成为本书作者而形成的缺陷, 而且也使本书能够更名副其实一点. 同时也继承了陆启铿在写“多复变函数论在中国: 1949~1989”的风格, 尽可能收集国内多复变学者的论文以飨读者.

第 1 章和最后 1 章特地安排成陆启铿院士的文章. 其余各章都是以执行主编收到文章的时间先后为序. 本书文章都由执行主编组稿, 未送审, 文责自负.

本书只反映 2008 年以前的多复变在中国的研究与发展. 历史的长河无穷尽, 中国的多复变也将在这长河中继续发展. 江山代有才人出, 各领风骚数十年, 中国多复变界也会如此. 期望后世的英才们或有心人能把中国多复变的研究与发展每隔若干年 (例如 20 年) 就续写并出版之, 在历史的长河中不断游弋.

殷慰萍

2009 年 3 月于北京

目 录

前言

第 1 章 非紧对称空间的热核	1
1.1 引言	1
1.2 不变度量的 Laplace-Beltrami 算子	15
1.3 积分变换	30
1.4 超球 $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(m, n)$ 的热核	44
1.5 复 Grassmann 流形的调和形式	55
1.6 复超球的内切超圆坐标	66
1.7 $\mathcal{R}_{\mathbb{H}}(m)$ 的热核	79
1.8 NIRGSS 的矩阵表示	88
1.9 后记	111
本章参考文献	113
第 2 章 华罗庚域的创建与研究	116
2.1 华罗庚域的创建	116
2.1.1 对称典型域	117
2.1.2 华罗庚域的故事	117
2.2 华罗庚域的 Bergman 核函数	119
2.2.1 Cartan-Hartogs 域的 Bergman 核函数	122
2.2.2 应用及问题	125
2.3 华罗庚域的经典度量的等价	126
2.3.1 Y_I 的新不变完备度量	126
2.3.2 Y_I 的新度量与 Bergman 度量等价	127
2.3.3 Y_I 的新不变完备度量的 Ricci 曲率	129
2.3.4 Y_I 新不变完备度量的全纯截曲率	131
2.3.5 Y_I 的 Bergman 度量与 Einstein-Kähler 度量等价	135
2.4 华罗庚域的比较定理	137
2.5 华罗庚域的 Einstein-Kähler 度量的显式	139
2.6 广义 Cartan-Hartogs 域	143
本章参考文献	145
第 3 章 陆启铿猜想	150
3.1 引言	150

3.2	Bergman 核函数及陆启铿猜想	151
3.3	陆启铿问题的研究成果	154
3.3.1	哪些域的 Bergman 核函数有零点	154
3.3.2	哪些域是陆启铿域	156
3.4	研究陆启铿猜想的思想和方法	157
3.5	陆启铿猜想的新研究领域	158
3.5.1	$Y_I(1, 1, 1; K)$ 是否为陆启铿域	161
3.5.2	$Y_I(1, 1, 2; K)$ 是否为陆启铿域	162
3.5.3	$Y_I(1, 1, 3; K)$ 是否为陆启铿域	164
3.5.4	$Y_I(1, 1, 4; K)$ 是否为陆启铿域	166
3.6	陆启铿猜想的尚待解决的问题	169
	本章参考文献	171
第 4 章	多复变数全纯函数空间	174
4.1	积分平均不等式	174
4.2	在 Bergman 和 Besov 空间上的精确估计	177
4.3	利用多项式的 Jackson 逼近	179
4.4	全纯函数的模	182
4.5	Cesàro 算子的积分平均	183
4.6	系数乘子	185
4.7	Hardy 不等式和对角映射	187
4.8	复合算子	189
	本章参考文献	191
第 5 章	多复变函数空间上复合算子的研究	196
5.1	(加权) 复合算子的有界性及紧性	196
5.2	复合算子的本性范数	202
5.2.1	Bloch 型空间	203
5.2.2	Hardy 空间	204
5.3	复合算子的紧差分	205
5.4	加权复合算子或线性分式变换的对偶	206
5.4.1	加权复合算子的对偶算子	206
5.4.2	单位球中 Dirichlet 空间上的线性分式复合算子	209
5.5	加权复合算子的谱	209
	本章参考文献	210
第 6 章	正规规则、广义 Cesàro 算子与 Toeplitz 算子	214
6.1	正规规则和动态性质	214

6.2 加权的 Cesàro 算子	216
6.2.1 BMOA 空间	218
6.2.2 Zygmund 空间	218
6.2.3 从广义的 Besov 空间到 Bloch 型空间	219
6.3 单位球上 Bergman 空间的 Hankel 算子和 Toeplitz 算子	220
6.3.1 单位球上 Bergman 空间中的 Hankel 算子	221
6.3.2 单位球上 Bergman 空间中记号为径向函数的 Toeplitz 算子	222
6.3.3 多圆柱上 Dirichlet 空间中的 Toeplitz 算子	224
6.3.4 Berezin 变换和单位球中 Bergman 空间的径向算子	224
本章参考文献	224
第 7 章 多复变数的奇异积分和奇异积分方程	227
7.1 Plemelj 公式, Poincaré-Bertrand 置换公式和合成公式	229
7.1.1 光滑和逐块光滑流形上具 Bochner-Martinelli 核的奇异积分的 Plemelj 公式	229
7.1.2 Poincaré-Bertrand 置换公式	231
7.1.3 奇异积分的合成公式	232
7.1.4 奇异积分方程的正则化	233
7.2 域的拓扑积上具 Bochner-Martinelli 核的奇异积分和奇异积分方程	234
7.2.1 域的拓扑积和特征流形	234
7.2.2 满足 Hölder 条件的函数	235
7.2.3 Bochner-Martinelli 核和多维奇异积分的 Cauchy 主值	235
7.2.4 Cauchy 型积分的极限值	236
7.2.5 特征流形上的 Poincaré-Bertrand 置换公式	238
7.2.6 特征流形上的合成公式	238
7.2.7 特征流形上的奇异积分方程	238
7.3 高阶奇异积分和高阶奇异积分方程	239
7.3.1 高阶奇异积分的 Hadamard 主值	239
7.3.2 Bochner-Martinelli 积分的导数的 Plemelj 公式	240
7.3.3 用 Cauchy 主值表示 Hadamard 主值	241
7.3.4 高阶奇异积分的合成公式	242
7.3.5 高阶奇异积分方程和偏微分积分方程	242
7.4 Stein 流形上的奇异积分和奇异积分方程	243
7.4.1 Stein 流形上的 Bochner-Martinelli 公式	243
7.4.2 Plemelj 公式	245
7.4.3 Poincaré-Bertrand 置换公式	249

7.4.4 合成公式	249
7.5 复 Clifford 分析中 Bochner-Martinelli 型积分的 Plemelj 公式	249
7.5.1 复 Clifford 分析中的 Bochner-Martinelli 公式	249
7.5.2 复 Clifford 分析中 Bochner-Martinelli 型积分的 Plemelj 公式	251
7.6 展望	252
本章参考文献	254
第 8 章 复 Finsler 流形上的几何分析	258
8.0 引言	258
8.1 复 Finsler 流形和 Chern-Finsler 联络	260
8.2 全纯切丛 $\tilde{M}$ 上的复水平 Laplace 算子	262
8.3 射影化切丛 $P\tilde{M}$ 上的复水平 Laplace 算子及其应用	265
8.4 复 Finsler 子流形上的基本公式	267
本章参考文献	269
第 9 章 Cauchy-Riemann 流形上的分析	272
9.1 Cauchy-Riemann 算子 $\bar{\partial}$ 和切向 Cauchy-Riemann 算子 $\bar{\partial}_b$	273
9.2 有限型 Cauchy-Riemann 结构的可嵌入性与形变	275
9.3 局部平坦的 Cauchy-Riemann 流形	277
9.4 推广到抛物流形	281
本章参考文献	286
第 10 章 多复变函数的唯一性定理	289
10.1 单复变的值分布理论	289
10.2 多复变函数的值分布理论	291
10.3 关于到 $\mathbb{CP}^N$ 中亚纯映射关于超平面的唯一性定理	293
10.4 亚纯映射关于活动超平面的唯一性定理	295
10.5 用计数函数不等式限制的亚纯映射的唯一性定理	296
10.6 关于除子或超曲面的唯一性定理	298
本章参考文献	298
第 11 章 Bloch 常数	300
11.1 引言	300
11.2 基础概念和定理	301
11.2.1 Schwarz-Pick 引理	301
11.2.2 有界解析函数的 Landau 定理	302
11.2.3 Bloch 定理和 Bloch 常数	303
11.2.4 Julia 引理	304
11.2.5 Poincaré 度量	305

11.2.6 Ahlfors 引理	305
11.3 Bloch 函数的畸变定理	306
11.3.1 Bonk 的畸变定理	306
11.3.2 多值函数和无零点函数的 Julia 引理	307
11.3.3 涉及重数的畸变定理	308
11.3.4 局部单叶的 Bloch 函数的畸变定理	309
11.3.5 b_n 的改进	310
11.4 单位圆上的 Bloch 常数	311
11.4.1 Bloch 常数的上界	311
11.4.2 Ahlfors 方法	312
11.4.3 下界的改进	313
11.4.4 单位圆上的调和映射的 Bloch 定理	315
11.5 多个复变量的拟正规全纯映射的 Bloch 常数	316
11.5.1 拟正规的全纯映射	316
11.5.2 多变量的 Landau 定理	318
11.5.3 K 拟正规全纯映射的 Bloch 常数	321
本章参考文献	325
第 12 章 复流形上的积分表示	327
12.1 引言	327
12.2 Stein 流形上的积分表示	329
12.3 复流形上的积分表示	335
12.4 复 Finsler 流形上的积分表示	339
本章参考文献	347
第 13 章 华罗庚域上的极值问题	352
13.1 引言	352
13.2 Cartan 域和复椭球上的极值问题	353
13.3 Cartan-Hartogs 域上的极值问题	357
13.3.1 一些准备知识	357
13.3.2 Cartan-Hartogs 域的最小外切椭球和最大内切椭球	360
13.3.3 Cartan-Hartogs 域上的极值映射和极值	363
13.4 华罗庚域上的极值问题	368
本章参考文献	371
第 14 章 旋量群表示的具体构造及相关问题	373
14.1 引言	373
14.2 旋量群的定义	374

14.2.1	转动群 $SO(n)$	374
14.2.2	Clifford 代数与旋量群	375
14.3	旋量群的表示	382
14.3.1	Lorentz 旋量群的表示	382
14.3.2	旋量群 $Spin(p, q)$ 的表示 $\mathfrak{h}(p, q)$	386
14.4	Lorentz 旋量群的陪集结构	390
14.5	$Spin(p+1, q+1)$ 的两种表示之间的关系	393
	本章参考文献	397
第 15 章	结合位势理论的函数空间及其上的算子	398
15.1	引言	398
15.2	多复变全纯函数空间	399
15.2.1	BMOA 空间	399
15.2.2	Bergman 空间	401
15.2.3	Q_p 空间	403
15.2.4	Bloch 型空间与 Dirichlet 型空间	404
15.2.5	Banach 空间值 BMOA	407
15.2.6	函数空间的随机化	409
15.3	函数空间上的某些算子	412
15.3.1	点态乘子	412
15.3.2	复合算子	413
	本章参考文献	414
第 16 章	Clifford 分析介绍	419
16.1	引言	419
16.2	基本函数理论	420
16.3	其他 Clifford 全纯函数类	423
16.3.1	超正则函数和超调和函数	423
16.3.2	k 正则函数	427
	本章参考文献	431
第 17 章	Bergman 核理论初探	435
17.1	引言	435
17.2	$\mathbb{C}^n$ 中的拟凸域	436
17.3	$\mathbb{C}^2$ 中可表示为全纯运动的图	438
17.4	超凸流形	440
17.5	截曲率为负的 Kähler 流形	443
17.6	Teichmüller 空间上的 Bergman 度量	445

本章参考文献	449
第 18 章 多复变几何函数论的某些结果和问题	453
18.1 多复变数几何函数论研究的主要进展	453
18.1.1 问题的起源	453
18.1.2 多复变数几何函数论的某些完整结果	456
18.1.3 多复变数几何函数论的某些不完整结果	460
18.2 一个定理的结论与证明	461
18.2.1 D_p 的 Minkowski 泛函与凸映射特征	461
18.2.2 凸映射的分解定理	464
18.2.3 几点注记	473
18.3 一些重要而又有趣的问题和猜测	475
18.3.1 单位球上星形映射族的凸性半径	475
18.3.2 星形映射族的 Bieberbach 猜想	475
18.3.3 星形映射族的偏差定理	476
18.3.4 凸映射族的行列式型偏差定理	476
18.3.5 星形映射族的行列式型偏差定理	477
18.3.6 Schwarz 导数问题	477
18.3.7 Bloch 常数问题	477
18.3.8 Bohr 半径问题	477
18.3.9 与 Alexander 定理相联系的增长定理和掩盖定理	478
本章参考文献	479
第 19 章 多复变广义 Cesàro 算子	481
19.1 Bergman 空间上的算子 T_g	482
19.2 混合模空间上的算子 T_g	484
19.3 Bloch 型空间上的算子 T_g	485
19.4 $T_g: H^\infty \rightarrow H_{p,q,\varphi}$ 和 $T_g: H^\infty \rightarrow \mathcal{B}$	486
19.5 高维情形的 Cesàro 算子	487
19.6 Cesàro 算子的另一种推广	488
19.7 附记	489
本章参考文献	489
第 20 章 有界全纯函数与 VMRT 几何理论在刚性问题上的应用	492
20.1 有界对称域商空间上的度量刚性定理	495
20.2 遍历理论在有界对称域刚性问题上的应用	498
20.3 有界全纯函数的边界值与逆紧全纯映射的刚性问题	507
20.4 有界对称域的扩充空间上的几何结构	513

20.5 VMRT 几何理论概说	516
20.6 非同维 Cartan-Fubini 延拓定理在逆紧全纯映射刚性问题上的应用	520
20.7 具几何结构的有界域: 边界值理论与 VMRT 几何理论的双结合	524
本章参考文献	525
第 21 章 多复变函数论在中国: 1949~1989 年	530
21.1 典型域	531
21.2 典型流形	539
21.3 齐性流形	546
21.4 积分表示及边值问题	548
21.5 Schwarz 引理	549
21.6 典型域及其特征流形上的调和分析	552
21.7 拟凸域	553
本章参考文献	555
参考文献补充	568
致谢	645
图片说明	647

第1章 非紧对称空间的热核*

陆启铿

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, luqi@math.ac.cn

1.1 引言

令 $\mathcal{M}$ 是一个 M 维的黎曼流形, 且

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^M g_{jk} dx^j dx^k \quad (1.1.1)$$

是局部可容许坐标 $x = (x^1, x^2, \dots, x^M)$ 下的黎曼度量. 我们总是把 x 看成 $1 \times M$ 的矩阵, 则 (1.1.1) 可记为

$$ds^2 = dx G dx', \quad (1.1.2)$$

其中 $dx = (dx^1, \dots, dx^M)$, dx' 表示 dx 的转置. 度量张量 g_{jk} 构成 $M \times M$ 阶度量矩阵

$$G = (g_{jk}). \quad (1.1.3)$$

度量 (1.1.1) 相应的 Laplace-Beltrami 算子 (L-B 算子) 定义为

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^M \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \right], \quad (1.1.4)$$

其中

$$(g^{jk}) = G^{-1} \quad (1.1.5)$$

且

$$g = \det G. \quad (1.1.6)$$

$\mathcal{M}$ 上的热方程是如下定义的微分方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f(x, t), \quad (1.1.7)$$

* 本文的英文版本为 The heat kernels of non compact symmetric spaces. Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 2000, 289~424.

其中 $f(x, t)$ 是定义在 $(x, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+$ 上的函数, 对变量 x 和 t 具有二次连续的偏导数. $\mathbb{R}_+$ 表示正实轴.

$\mathcal{M}$ 的热核是定义在 $(x, y, t) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+$ 上的一个实值函数 $H(x, y, t)$, 其对变量 x, y 和 t 有连续的二阶偏导数并且满足下列方程:

$$(i) \quad H(x, y, t) = H(y, x, t);$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial t} H(x, y, t) = \Delta_x H(x, y, t),$$

其中 Δ_x 表示关于变量 x 的 Δ 算子;

(iii) 对于任一在 $\mathcal{M}$ 连续并有界的函数 $\phi(y)$, 总有下面的公式成立:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{\mathcal{M}} H(x, y, t) \phi(y) \dot{y} = \phi(x),$$

其中 $\lim_{t \rightarrow +0}$ 表示 t 从正半轴趋向于 0. 体积元素

$$\dot{y} = \sqrt{g} dy^1 dy^2 \cdots dy^M. \quad (1.1.8)$$

当 $\mathcal{M}$ 紧时, 热核的构造就化为 Δ 的特征函数的完备规范正交系的构造.

$\mathcal{M}$ 上的具有二次连续偏导数的函数 f 称为 Δ 的特征函数, 若其满足

$$\Delta f + \lambda f = 0, \quad (1.1.9)$$

其中 λ 是一常数, 称为特征值. 特别地, 当 $\lambda = 0$, f 称为调和函数. 当 $\lambda \neq 0$, f 称为 λ 特征函数.

见文献 [1] 知, 当 $\mathcal{M}$ 紧时, Δ 的所有特征值都是正的、可数的, 则

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p < \cdots, \quad (1.1.10)$$

称为 Δ 的谱. 所有的 λ_p 特征函数构成一个有限维数 N_p 的实向量空间 $\mathcal{H}_p$. 因而可以选取 $\mathcal{H}_p$ 的一组规范正交基 $\phi_1^{(p)}(x), \cdots, \phi_{N_p}^{(p)}(x)$:

$$\int_{\mathcal{M}} \phi_\alpha^{(p)}(x) \phi_\beta^{(p)}(x) \dot{x} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, N_p. \quad (1.1.11)$$

函数

$$h_p(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{N_p} \phi_\alpha^{(p)}(x) \phi_\alpha^{(p)}(y), \quad (x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \quad (1.1.12)$$

称为 λ_p 核. 它是 $\mathcal{H}_p$ 的再生核; 即对任意的 $\phi(x) \in \mathcal{H}_p$, 有

$$\phi(x) = \int_{\mathcal{M}} h_p(x, y) \phi(y) \dot{y}. \quad (1.1.13)$$