教育部高校学生司推荐

高教 2005 年版

全国各类成人高考复习指导丛书

▌高中起点升本、专科▌

数学（理工农医类）

（附解题指导）

第 10 版

孙成基　主编

KAOSHI

高等教育出版社

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

数　学（理工农医类）

（附解题指导）

第 10 版

孙成基　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习指导丛书．数学．理工农医类：附解题指导/孙成基主编．—10版．—北京：高等教育出版社，2005.1

高中起点升本、专科

ISBN 7-04-016235-0

Ⅰ.全...　Ⅱ.孙...　Ⅲ.数学课-成人教育：高等教育-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第139057号

策划编辑　李　宁　　**责任编辑**　肖子东　　**责任校对**　田晓兰
封面设计　刘晓翔　　**责任绘图**　黄建英　　**责任印制**　宋克学

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100011
总　　机　010-58581000

购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京凌奇印刷有限责任公司

开　　本　850×1168　1/16
印　　张　16.25
字　　数　480 000

版　　次　1986年4月第1版
2005年1月第10版
印　　次　2005年1月第1次印刷
定　　价　24.00元

物料号：16235-00

出 版 前 言

《全国各类成人高考复习指导丛书》第10版是在第9版的基础上，根据教育部2004年颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》修订而成的.

本丛书自1986年问世以来，一直受到广大读者的欢迎，在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用.十几年来，随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化，特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的几次修订，相应地这套丛书也历经了9次全面的修订.几经修改完善，这套丛书的整体质量不断提高，结构更加科学、合理，成为具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材，在全国享有良好声誉.

按照新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》的要求修订而成的全新第10版，具有如下特点：

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出，注重基础知识复习和能力训练，题型与练习贴近考试实际，实用性、针对性强.

2. 内容的选择和编排更适合成人学习的特点；注重吸收新知识、新成果，丛书的时代感更加鲜明.

3. 题型设计以及叙述方式等各个方面，注重从知识立意向能力立意的转变；在注重学科基本能力训练的同时，注重考生综合运用知识的能力和应试水平的提高；适合成人学习特点的体系结构更加完善.

4. 在覆盖新大纲知识点的前提下，适当压缩了字数，使丛书更加简明、实用.

修订后的本丛书(第10版)包括以下8本：

《语文　附解题指导》

《数学　附解题指导》(文史财经类)

《数学　附解题指导》(理工农医类)

《英语　附解题指导》

《物理化学综合科　物理分册　附解题指导》

《物理化学综合科　化学分册　附解题指导》

《历史地理综合科　历史分册　附解题指导》

《历史地理综合科　地理分册　附解题指导》

《数学》(理工农医类)本次修订主要内容为：

1. 增加了不等式的性质：$|a+b| \leqslant |a| + |b|$ $(a, b \in \mathbf{R})$、正余弦函数的导数公式.
2. 删去了复数的三角形式及其有关的内容、座标轴的平移、函数极限的四则运算、圆柱、圆锥以及多面体中棱柱、棱锥的侧面积、表面积的计算等内容.

本书主编为孙成基(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》起草人)，参加编写的还有烟学敏、韩恩熙、李金香.本次修订工作由孙成基完成.

高等教育出版社

2004年12月

郑重声明

特别提醒

特别提醒:"中国教育考试在线"网站http://www.eduexam.com.cn是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨,为考生提供名师导航、试题宝库、在线考场、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配本网站的增值服务卡。该卡为高教版考试用书正版书的专用标识,广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息并以此辨别图书真伪。

目　录

代　数(Ⅰ)

三角函数

平面解析几何

代　数(Ⅱ)

立体几何

代数(Ⅰ)

第一章　集　　合

【本章要求】

了解集合的意义及其表示法,了解空集、子集、交集、并集、全集、补集的概念及其表示法,了解符号 $\subsetneqq$, $\subseteq$, $=$, $\in$, $\notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合,元素与集合的关系.

【内容提要】

1. 集合的基本概念

集合的意义　把某些指定的对象集在一起,就成为一个**集合**(简称集). 常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合.

元素　集合中的每个对象叫做集合的**元素**. 常用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素.

有限集　含有有限个元素的集合叫做**有限集**.

无限集　含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

对于一个给定的集合 A 和确定的元素 a,它们之间有且只有以下两种关系:

(1) 若 a 是 A 的元素,则称 a 属于 A,记为 $a \in A$.

(2) 若 a 不是 A 的元素,则称 a 不属于 A,记为 $a \notin A$.

空集　不含任何元素的集合叫做**空集**,记为 $\varnothing$.

2. 集合的表示法

列举法　把集合的元素一一列举出来,并写在大括号{　}内的方法,叫做**列举法**.

描述法　用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并将该条件写在大括号{　}内的方法,叫做**描述法**. 如不等式 $x-5>2$ 的解集可表示为 $\{x \mid x-5>2\}$ 或 $\{x: x-5>2\}$.

常见的几种数集的表示符号:

$\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$)表示正整数集.

$\mathbf{N}$ 表示非负整数集,即自然数集.

$\mathbf{Z}$ 表示整数集.

$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

$\mathbf{R}$ 表示实数集.

说明　根据国家标准,"0"是自然数,请不要继续沿用自然数集不包括"0"的说法.

3. 集合与集合的关系

子集　如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

相等的集合　若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称 $A = B$.

真子集　若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$).

说明　在国家标准中,用符号 $\subsetneqq$(或 $\supsetneqq$)表示集合间的真子集关系;用符号 $\subseteq$(或 $\supseteq$)表示集合间的子集关系,这个关系也可用符号 $\subset$(或 $\supset$)表示.

规定　空集是任何集合的子集. 可见,空集是任何非空集合的真子集.

注意: $A \subseteq A$.

交集 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$.

交集的性质：(1) $A\cap A=A$；(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$.

并集 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$.

并集的性质：(1) $A\cup A=A$；(2) $A\cup\varnothing=A$.

补集 设集合 S，若集合 $A\subseteq S$，那么由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的**补集**（或**余集**），记作 $\complement_S A$，或简记作 $\complement A$.

注意：$\complement_S A\cup A=S$；

$\complement_S A\cap A=\varnothing$.

全集 若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合就可以看作一个全集，全集记作 U.

【例题与解题指导】

例 1 选择题：

(1) 已知集合 $A=\{0,3\}$，$B=\{0,3,4\}$，$C=\{1,2,3\}$，则 $(B\cup C)\cap A=$

(A) $\{0,1,2,3,4\}$ (B) $\varnothing$ (C) $\{0,3\}$ (D) $\{0\}$

(2) 设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $M\cup N=$

(A) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$ (B) $\{x\mid 2<x<3\}$

(C) $\{x\mid -1<x<4\}$ (D) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$

(3) 设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 10\}$，$N=\{x\mid x>7$ 或 $x<1\}$，则 $M\cap N=$

(A) $\{x\mid 7<x\leqslant 10\}$ (B) $\{x\mid -1\leqslant x<1$ 或 $7<x\leqslant 10\}$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$ (D) $\{x\mid 1<x\leqslant 10\}$

(4) 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $M=\{1,3,5\}$，$N=\{2,4,6\}$，则 $\complement_U M\cap N=$

(A) $\varnothing$ (B) U (C) N (D) M

(5) 下列关系中，正确的是

(A) $\{0\}=\varnothing$ (B) $\varnothing\in\{0\}$ (C) $\varnothing\subsetneqq\{0\}$ (D) $0\subsetneqq\varnothing$

(6) 设集合 $M=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$N=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则

(A) $M\cup N=M$ (B) $M\cup N=N$ (C) $M\cap N=M$ (D) $M\cap N=\varnothing$

解 (1) $B\cup C=\{0,1,2,3,4\}$，$(B\cup C)\cap A=\{0,3\}$，选(C).

说明 求两个集合的并集，相同的元素只写一个，如 $B\cup C$ 中的元素 3.

在集合的运算中，如有小括号应先算小括号内的.

(2) $M\cup N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$，选(D)

说明 由不等式指定的集合运算，可利用数轴直观地求解.

(3) $M\cap N=\{x\mid -1\leqslant x<1$ 或 $7<x\leqslant 10\}$，选(B).

(4) $\complement_U M=\{2,4,6\}$，$\complement_U M\cap N=\{2,4,6\}$，选(C).

(5) $\{0\}$是只含有一个元素 0 的单元素集合，而$\varnothing$是空集，所以(A)不正确；符号"$\in$"用于元素与集合的关系，故(B)也不正确；因为空集是任何非空集合的真子集，所以(C)正确.

(6) M 与 N 都是点的集合.

由 $xy>0$ 知，点 (x,y) 的横、纵坐标同号，集合 $M=\{$第一或第三象限的点$\}$；

由 $x>0$ 且 $y>0$ 知，点 (x,y) 的横、纵坐标的值均为正，集合 $N=\{$第一象限的点$\}$.

因此，$M\cup N=M$，选(A).

例 2 填空题：

(1) 若 $A=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=k+3,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$_____，$A\cup B=$_____.

(2) 若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{1,3,5\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，则 $B=$______.

(3) 若 $A\subseteq C$,化简 $(A\cup B)\cup(B\cup C)=$ ____.

(4) 若 $M=\{x|2x+a=0\}$,$P=\{x|1<x<4$,且 $x\in\mathbf{N}_+\}$,且 $M\cap P$ 为非空集合,则 $a=$ ____.

解 (1) A 为奇数集合,而 B 为整数集合,则 $A\cap B=A$;$A\cup B=B$.

(2) 由 A 及 $A\cap B$ 知,$1,3,5\in B$ 且 $2,4\notin B$;由 A 及 $A\cup B$ 知,$0,6\in B$. 故 $B=\{1,3,5,0,6\}$.

(3) 由于 $A\subseteq C$,所以 $A\cup B\subseteq B\cup C$,则 $(A\cup B)\cup(B\cup C)=B\cup C$.

(4) 由已知,$P=\{2,3\}$,把 $x=2,3$ 分别代入 $2x+a=0$ 中,得 $a=-4$ 或 $a=-6$.

例 3 设 $A=\{2,3\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,$U=\{0,1,2,3,4,5\}$,求集合 $\complement_U A\cap\complement_U B$ 的所有的子集.

解 因为 $\complement_U A=\{0,1,4,5\}$,$\complement_U B=\{0,1\}$.

所以 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{0,1\}$.

因此 $\complement_U A\cap\complement_U B$ 的所有的子集为:$\{0\}$、$\{1\}$、$\{0,1\}$、$\varnothing$.

例 4 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|-5<x<5\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 7\}$. 求 $\complement_U A$,$\complement_U B$,$\complement_U(A\cap B)$,$\complement_U A\cup\complement_U B$.

解 由已知,得 $\complement_U A=\{x|x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 5\}$ $\complement_U B=\{x|x<0$ 或 $x>7\}$.

所以 $\complement_U A\cup\complement_U B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$, $=\complement_U(A\cap B)$

因为 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}$,所以 $\complement_U(A\cap B)=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$.

练 习 一

1. 选择题:

(1) 已知集合 $S=\{0,-1,-2,-3,-4\}$,集合 $M=\{0,-1,-2\}$,$N=\{0,-3,-4\}$,则 $\complement_S M\cap N=$

(A) $\{0\}$ (B) $\{-3,-4\}$ (C) $\{-1,-2\}$ (D) $\varnothing$

(2) 设集合 $M=\{x|x\geqslant -4\}$,$N=\{x|x<6\}$,则 $M\cup N=$

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x|-4\leqslant x<6\}$ (C) $\varnothing$ (D) $\{x|-4<x<6\}$

(3) 设全集 $U=\mathbf{R}$,$a,b\in\mathbf{R}$,$\complement_U P=\{x|x\geqslant a\}$,$\complement_U Q=\{x|x\geqslant b\}$,若 $P\cap Q=P$,则

(A) $a\geqslant b$ (B) $b\geqslant a$ (C) $a>b$ (D) $b>a$

(4) 设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{10}\}$,$a=3$,下列各式正确的是

(A) $a\subsetneqq M$ (B) $a\notin M$ (C) $\{a\}\in M$ (D) $\{a\}\subsetneqq M$

×(5) 已知集合 M 满足条件:$\{1,2\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$,那么这样的集合 M 有

(A) 6 个 (B) 7 个 (C) 8 个 (D) 9 个

(6) 若 M、P 为非空集合,且 $M\subsetneqq P$,$P\subsetneqq U$,U 为全集,则下列集合中空集是

(A) $M\cap P$ (B) $\complement_U M\cap\complement_U P$ (C) $\complement_U M\cap P$ (D) $M\cap\complement_U P$

2. 填空题:

(1) 若 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6\}$,则 $A\cap B=$ $\{2,4\}$,$A\cup B=$ $\{1,2,3,4,6\}$.

(2) 若 $A=\{$正数$\}$,$B=\{$非负数$\}$,则 $A\cap B=$ A,$A\cup B=$ B.

(3) 若 $A=\{x|x>-1\}$,$B=\{x|x>-3\}$,则 $A\cap B=$ A,$A\cup B=$ B.

(4) 若 $A=\{x|x\geqslant -2\}$,$B=\{x|-1<x\leqslant 4\}$,则 $A\cap B=$ B,$A\cup B=$ A.

(5) 若 $A=\{x|1<x\leqslant 5\}$,$B=\{$小于 10 的自然数$\}$,则 $A\cap B=$ $\{2,3,4,5\}$.

(6) 若 $A=\{$等边三角形$\}$,$B=\{$等腰三角形$\}$,则 $A\cap B=$ A,$A\cup B=$ B.

(7) 若 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|x>-1\}$,则 $\complement_U A=$ $\{x|x\leq -1\}$.

×(8) 若 $U=\{$三角形$\}$,$A=\{$直角三角形$\}$,则 $\complement_U A=$ ~~{一般三角形}~~ 非直角{斜三角}

(9) 若 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,$C=\{3,4,5\}$,则 $(A\cap B)\cup C=$ $\{2,3,4,5\}$,$(A\cup B)\cap C=$ $\{3\}$,$(A\cap B)\cap C=$ $\varnothing$,$A\cap(B\cup C)=$ $\{2\}$,$B\cap(A\cup C)=$ ~~{2,3}~~ $=B$.

(10) 若 $A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B=$ $\varnothing$,$A\cup B=$ $\mathbf{Z}$.

3. 在下列各题横线上填写适当的符号($\in$,$\notin$,$=$,$\supsetneqq$,$\subsetneqq$):

(1) $\varnothing$ __$\subsetneqq$__ $\{a\}$； (2) a __$\in$__ $\{a\}$； (3) $\{a\}$ __$=$__ $\{a\}$； (4) $\{a\}$ __$\subsetneqq$__ $\{a,b\}$；

(5) 6 __$\notin$__ $\{0,1,2\}$； (6) 0.5 __$\in$__ $\mathbf{Q}$； (7) $\mathbf{R}$ __$\supsetneqq$__ $\mathbf{Q}$； (8) $\mathbf{N}$ __$\subsetneqq$__ $\mathbf{Z}$.

4. 写出集合 $A=\{0,1,2\}$ 的所有子集，并指出其中哪个集合不是集合 A 的真子集.

5. 设集合 $A=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4m\pm1,m\in\mathbf{Z}\}$，试确定 A 与 B 的关系. $A=B$

1.3.5.7.9.11.13…… 3,1,5,9

练习一解题指导

1. 解 (1) $\complement_S M=\{-3,-4\}$，$\complement_S M\cap N=\{-3,-4\}$，选(B).

(2) $M\cup N=\mathbf{R}$，选(A).

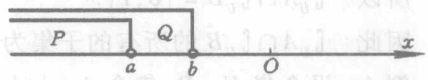
(3) $P=\{x\mid x<a\}$，$Q=\{x\mid x<b\}$.

由 $P\cap Q=P$ 知，$P\subsetneqq Q$ 或 $P=Q$.

当 $P\subsetneqq Q$ 时，由图知 $b>a$；

当 $P=Q$ 时，$a=b$.

从而 $b\geqslant a$，选(B).

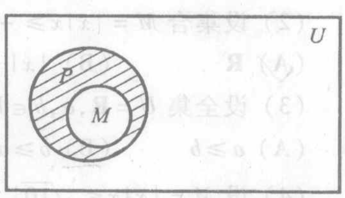


(第1(3)题)

(4) 符号“$\subsetneqq$”用于表示集合与集合的关系，而 a 是元素，可排除(A)；因为 $3<\sqrt{10}$，故可排除(B)；符号“$\in$”用于表示元素与集合的关系，而 $\{a\}$、M 都是集合，可排除(C)，故(D)正确.

(5) 有集合 $\{1,2\}$ 及它分别与下列集合：$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$ $\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{4,5\}$ 的并集，共七个. 故选(B).

(6) 由 $M\cap P=M$ 可排除(A)；由 $\complement_U M\cap\complement_U P=\complement_U P$ 可排除(B)；由 $M\subsetneqq P$ 知 $\complement_U M\cap P$ 是由集合 P 中除去 M 中所有元素组成的非空集合(图中斜线部分)，所以可排除(C)，故(D)正确.



(第1(6)题)

2. 解 (1) $A\cap B=\{2,4\}$；$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

(2) $A\cap B=A$；$A\cup B=B$.

(3) $A\cap B=A$；$A\cup B=B$.

(4) $A\cap B=B$；$A\cup B=A$.

(5) $A\cap B=\{2,3,4,5\}$.

(6) $A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

(7) $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant-1\}$.

(8) $\complement_U A=\{$斜三角形$\}$.

(9) $(A\cap B)\cup C=\{2,3,4,5\}$，$(A\cup B)\cap C=\{3\}$，$(A\cap B)\cap C=\varnothing$，$A\cap(B\cup C)=\{2\}$，$B\cap(A\cup C)=B$.

(10) $A=\{$偶数$\}$，$B=\{$奇数$\}$，则 $A\cap B=\varnothing$；$A\cup B=\mathbf{Z}$.

3. 解 (1) $\subsetneqq$ (2) $\in$ (3) $=$ (4) $\subsetneqq$ (5) $\notin$ (6) $\in$ (7) $\supsetneqq$ (8) $\subsetneqq$.

4. 解 集合 A 的所有子集为：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$ 及 $\varnothing$. 其中 $\{0,1,2\}$ 不是集合 A 的真子集.

5. 解 由于 $A=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，$B=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$.

所以 $A=B$.

第二章　不等式和不等式组

【本章要求】

1. 理解不等式的性质. 会用不等式的性质和基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$，$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ $(a,b\in\mathbf{R})$解决一些简单问题.

2. 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式，会解一元二次不等式. 了解区间的概念. 会表示不等式或不等式组的解集.

3. 了解绝对值不等式的性质，会解形如 $|ax+b|\geqslant c$ 和 $|ax+b|\leqslant c$ 的绝对值不等式.

【内容提要】

1. 不等式的意义和性质

（1）若 $a,b\in\mathbf{R}$，有

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$;

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

（2）不等式的性质

1） $a>b \Leftrightarrow b<a$;

2） $a>b,b>c \Rightarrow a>c$;

3） $a>b \Rightarrow a+c>b+c$;

4） $a>b,c>d \Rightarrow a+c>b+d$;

5） $a>b,c>0 \Rightarrow ac>bc$;

6） $a>b,c<0 \Rightarrow ac<bc$;

7） $a>b>0,c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;

8） $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$ ($n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1$);

9） $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n>1$);

10）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ ($a,b\in\mathbf{R}$，且当 a,b 同号时取等号.)

2. 解不等式

（1）不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的所有可取值的集合，叫做这个不等式的**解的集合**. 求不等式的解集的过程，叫做**解不等式**.

（2）一元一次不等式及其解法

1）一元一次不等式的一般形式为 $ax>b$.

2）解的讨论：

（i）当 $a\neq 0$ 时

如果 $a>0$，那么解集是$\left\{x\mid x>\dfrac{b}{a}\right\}$，也可写成 $x>\dfrac{b}{a}$，下面也有类似写法.

如果 $a<0$，那么解集 $x<\dfrac{b}{a}$.

（ii）当 $a=0$ 时

如果 $b \geqslant 0$,那么 $ax > b$ 无解,即解的集合是空集$\varnothing$. 如果 $b < 0$,那么 $ax > b$ 的解为全体实数,即解的集合是 $\mathbf{R}$.

(3) 一元二次不等式及其解法

1) 一般形式为 $ax^2 + bx + c > 0$,这里 $a \neq 0$.

2) 解的讨论:

设 $\Delta = b^2 - 4ac$,x_1,x_2(为讨论方便,不妨设 $x_1 < x_2$)是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根.

(i) 当 $\Delta < 0$ 时

如果 $a > 0$,不等式的解集是 $\mathbf{R}$;

如果 $a < 0$,不等式的解集是$\varnothing$.

(ii) 当 $\Delta = 0$ 时

如果 $a > 0$,不等式的解集是 $x \neq -\dfrac{b}{2a}$;

如果 $a < 0$,不等式无解.

(iii) 当 $\Delta > 0$ 时

如果 $a > 0$,不等式的解集是 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

如果 $a < 0$,不等式的解集是 $x_1 < x < x_2$.

注意: 一元二次不等式的解法,应结合二次函数的图象来理解.

(4) 含有绝对值的不等式的解法

1) 若 $a > 0$,$|x| < a$ 的解集是 $-a < x < a$;

2) 若 $a > 0$,$|x| > a$ 的解集是 $x > a$ 或 $x < -a$.

(5) 不等式组的解

不等式组的解,即不等式组中每一个不等式解集的交集.

3. 基本不等式

(1) 若 $a \in \mathbf{R}$,则 $a^2 \geqslant 0$;

(2) 如果 $a, b \in \mathbf{R}$,那么 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$(当 $a = b$ 时取等号).

4. 关于区间的概念

设 a 与 b 是两个实数,且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫做**开区间**,记做(a,b);

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 的集合叫做**闭区间**,记做$[a,b]$;

(3) 满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的一切实数 x 的集合叫做**半开半闭区间**,分别记做$[a,b)$,$(a,b]$.

特别地,$\mathbf{R}$ 可记为$(-\infty, +\infty)$,符号"$+\infty$"读作"正无穷大","$-\infty$"读作"负无穷大",它们不是数,只是记号. $[a, +\infty)$,$(a, +\infty)$,$(-\infty, b]$,$(-\infty, b)$分别表示 $x \geqslant a$,$x > a$,$x \leqslant b$,$x < b$ 的一切实数 x 的集合.

【例题与解题指导】

例 1 解不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > -1, & ① \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0. & ② \end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①,得 $x > -6$,

由②,得 $x > 0$,

所以,原不等式组化成

$$\begin{cases}x > -6,\\ x > 0.\end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x > 0.$$

在数轴上表示，如图 2－1 中 x 轴上粗线部分.

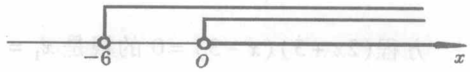


图 2－1

例 2 解不等式 $-8 < \dfrac{-3x-2}{4} - 5 < -5.$

解 不等式各方同乘以 4，得

$-32 < -3x - 2 - 20 < -20$，即 $-32 < -3x - 22 < -20.$

不等式各方同时加 22，得 $-10 < -3x < 2,$

不等式各方同时除以 -3，得

$$\frac{10}{3} > x > -\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为 $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{10}{3}.$

说明 本例中的不等式，也可化为不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{-3x-2}{4} - 5 > -8,\\ \dfrac{-3x-2}{4} - 5 < -5.\end{cases}$$

来解.

例 3 解不等式 $12x^2 - 5x - 3 > 0.$

解 因为方程 $12x^2 - 5x - 3 = 0$ 的根是 $x_1 = -\dfrac{1}{3}, x_2 = \dfrac{3}{4}.$

又因为 x^2 的系数是 $12 > 0$，所以原不等式的解集是 $x < -\dfrac{1}{3}$ 或 $x > \dfrac{3}{4}.$

例 4 解不等式 $-2x^2 \geqslant 3x - 4.$

解 原不等式可化成 $2x^2 + 3x - 4 \leqslant 0.$

因为方程 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 的根是 $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}, x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}$，又 x^2 的系数是 $2 > 0$，所以，原不等式的解集是 $\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}.$

例 5 解不等式 $\dfrac{3x+6}{5x-15} < 0.$

分析 只须分式的分子、分母异号即可. 而 $(3x+6)\cdot(5x-15) < 0$ 即转化为解一元二次不等式.

解 原不等式同解于

$$(3x+6)(5x-15) < 0.$$

所以原不等式的解为 $-2 < x < 3.$

说明 原不等式两边不能直接同乘以 $5x-15$. 因为 $5x-15$ 的值正、负未定.

想一想，不等式 $\dfrac{3x+6}{5x-15} \leqslant 0$ 的解是什么？

例 6 解不等式 $\dfrac{3x+2}{x-3} > 1.$

解 移项，得

$$\frac{3x+2}{x-3} - 1 > 0.$$

整理化简，得

$$\frac{2x+5}{x-3}>0.$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3)>0.$$

方程$(2x+5)(x-3)=0$的根是$x_1=-\frac{5}{2}, x_2=3$，又$(2x+5)(x-3)$中含x^2项的系数是$2>0$，

因此，原不等式的解集为$x>3$或$x<-\frac{5}{2}$.

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例5的类型再解.

以上两例介绍了分式不等式的解法，请留意.

例7 解不等式$|3-2x|-5>0$.

分析 经过移项，原不等式化为$|3-2x|>5$，它属于绝对值不等式中的类型(2)，进而去掉绝对值解之.

如果注意到$|3-2x|=|2x-3|$，解之较方便.

解 原不等式化为$|2x-3|>5$，则

$$2x-3>5 \quad 或 \quad 2x-3<-5,$$

所以 $x>4$ 或 $x<-1$ 为所求.

例8 解不等式 $8-|3x+5|\geqslant 0$.

分析 经移项，原不等式化为$|3x+5|\leqslant 8$，它属于绝对值不等式中的类型(1)，进而去掉绝对值解之.

解 原不等式化为$|3x+5|\leqslant 8$，则

$$-8\leqslant 3x+5\leqslant 8, -13\leqslant 3x\leqslant 3,$$

所以 $-\frac{13}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 为所求.

说明 解含绝对值的不等式，应先判断它是两种类型中的哪一种，再去掉绝对值解之.

例9 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解为$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，求$a,b$的值.

分析 从解一元二次不等式的过程考虑.

解 由已知，$-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$是方程$ax^2+bx+2=0$的两根，则

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{a}, \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a}. \end{cases}$$ 韦达定理.

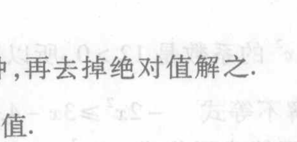
解之，得$a=-12, b=-2$.

例10 解不等式$2<|3x-2|<3$.

解 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases} |3x-2|>2, & ① \\ |3x-2|<3. & ② \end{cases}$$

由①，得$3x-2>2$或$3x-2<-2$，则



$$x>\frac{4}{3}或x<0. \quad ③$$

由②，得 $-3<3x-2<3$，

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}. \quad ④$$

使③,④同时成立,得 $-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$,此为原不等式的解.

例 11 解不等式 $\sqrt{4x^2+4x+1}<3$.

解法一 原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases}4x^2+4x+1\geqslant 0, & ①\\ 4x^2+4x+1<9. & ②\end{cases}$$

由①,得 $(2x+1)^2\geqslant 0$,故该不等式的解为全体实数.

由②,得 $(x+2)(x-1)<0$,即 $-2<x<1$.

故原不等式的解为 $-2<x<1$.

解法二 原不等式可化为 $\sqrt{(2x+1)^2}<3$,则

$$|2x+1|<3,$$

所以

$$-3<2x+1<3,$$

故原不等式的解为

$$-2<x<1.$$

例 12 已知 $A=\{x\mid x^2-2x-8<0\}$,$B=\{x\mid x-a<0\}$.

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$,求 a 的取值范围;(2) 若 $A\subsetneqq B$,求 a 的取值范围.

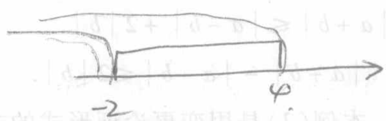
解 由 $x^2-2x-8<0$. 解得 $-2<x<4$.

所以

$$A=\{x\mid -2<x<4\}.$$

由已知,

$$B=\{x\mid x<a\}.$$



(1) 由 $A\cap B=\varnothing$ 得 $a\leqslant -2$.

(2) 由 $A\subsetneqq B$ 得 $a\geqslant 4$.

例 13 已知 $x>0$,$y>0$,$2x+y=3$,求 xy 的最大值,并求相应的 x,y 的值.

分析 注意到 $2x+y$ 是一个常数,可考虑用基本不等式求之.

解 由已知,$2x>0$,$y>0$,则

$$2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}.$$

又 $2x+y=3$,于是

$$2\sqrt{2xy}\leqslant 3,$$

$$xy\leqslant\frac{9}{8}.$$

因此,当 $2x=y$,即 $x=\frac{3}{4}$,$y=\frac{3}{2}$ 时,xy 取得最大值 $\frac{9}{8}$.

例 14 已知 $x\neq 0$,求 $1-x^2-\frac{16}{x^2}$ 的最大值,并求相应的 x 的值.

分析 原式可化为 $1-\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)$,故只需求 $x^2+\frac{16}{x^2}$,即 $x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2$ 的最小值. 注意到 x 与 $\frac{4}{x}$ 的积是一个常数,可用基本不等式求之.

解 原式 $=1-\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)$.

因为

$$x^2+\frac{16}{x^2}\geqslant 2x\cdot\frac{4}{x}=8.$$

所以 当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=\pm 2$ 时,$\left[x^2+\frac{16}{x^2}\right]_{\min}=8$.

故原式的最大值为 $1-8=-7$.

说明 应用 $a^2+b^2\geqslant 2ab(x,y\in R)$ 或其推论求某一式子的最值,需满足 $a+b$ 或 ab 是一个常数.

例 15 已知 $|x|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$|y|<\dfrac{\varepsilon}{12}$，求证 $|2x+4y|<\varepsilon$.

分析 直接应用不等式的性质：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，及 $|ab|=|a|\cdot|b|$，即可.

证明 $|2x+4y|\leqslant|2x|+|4y|=2|x|+4|y|<2\cdot\dfrac{\varepsilon}{3}+4\cdot\dfrac{\varepsilon}{12}=\varepsilon.$

即 $|2x+4y|<\varepsilon.$

说明 本例证明过程用到了"放缩法"，这里 $|x|$，$|y|$ 分别用 $\dfrac{\varepsilon}{3}$，$\dfrac{\varepsilon}{12}$ 替换，乃放大.

例 16 **求证** (1) $|a+b|+|a-b|\geqslant2|a|$；

(2) $|a+b|-|a-b|\leqslant2|b|$.

分析 (1) 由 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，即得. 这里 $a+b$ 相当于 x，$a-b$ 相当于 y.

证明 $|a+b|+|a-b|\geqslant|a+b+a-b|=|2a|=2|a|$.

即
$$|a+b|+|a-b|\geqslant2|a|.$$

分析 (2) 只证 $|a+b|\leqslant|a-b|+2|b|$，即可.

证明 由于 $|a-b|+2|b|=|a-b|+|2b|\geqslant|a-b+2b|=|a+b|$.

即 $|a+b|\leqslant|a-b|+2|b|$.

于是 $|a+b|-|a-b|\leqslant2|b|$.

说明 本例(2)是用变更论证形式的方法.

例 17 已知 $|a-b|<1$，求证 $|a|<|b|+1$.

分析 将 $|a|$ 化为 $|a-b+b|$，以便用已知条件.

证明 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$.

已知 $|a-b|<1$.

于是 $|a|<1+|b|$.

例 18 求证 $\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\geqslant\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}$.

$1+|a|+|b|>0$

$1+|a+b|>0$

$\therefore (|a|+|b|)(1+|a+b|)>|a+b|(1+|a|+|b|)$ 即可.

分析一 可用"分析法"即"执因找果"方法探索.

证法一 记 $x=|a|+|b|$，$y=|a+b|$. 则 $x\geqslant y\geqslant0$.

于是只证 $\dfrac{x}{1+x}\geqslant\dfrac{y}{1+y}$，即可.

由于 $1+x>0$，且 $1+y>0$，

故只要证
$$x(1+y)\geqslant y(1+x).$$

即要证
$$x+xy\geqslant y+xy.$$
$$x\geqslant y.$$

由于 $x\geqslant y$ 成立，且以上过程可逆，得证.

说明 用"分析法"证明，其过程必须可逆.

分析二 用"比较法"探索.

证法二 同证法一，只证

$\dfrac{x}{1+x}\geqslant\dfrac{y}{1+y}$ 即可. 由于 $\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{y}{1+y}=\dfrac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}=\dfrac{x-y}{(1+x)(1+y)}$.

因为 $x-y\geqslant0$，$(1+x)>0$，$(1+y)>0$，所以

$$\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\geqslant 0$$

因此，$\dfrac{x}{1+x}\geqslant\dfrac{y}{1+y}$，得证.

说明 要证 $A\geqslant B$，只证 $A-B\geqslant 0$ 即可. 此为"比较法"，方法是"做差".

另外，本例中设 $x=|a|+|b|$，$y=|a+b|$ 是为了书写方便.

练 习 二

1. 选择题：

(1) 不等式 $ax^2+bx+24<0$ 的解集为 $x>2$ 或 $x<-4$，则　C 说 $a<0$　D. 未达定义

(A) $a=-3,\ b=-6$　(B) $a=3,\ b=-6$　(C) $a=-3,\ b=6$　(D) $a=3,\ b=6$

(2) 不等式 $x^2+bx+\dfrac{1}{4}\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$，则　$\Delta<0$

(A) $b<1$　(B) $b>-1$ 或 $b<1$　(C) $-1<b<1$　(D) $b>1$ 或 $b<-1$

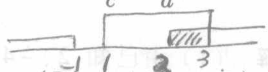
(3) 不等式组 $\begin{cases}|x-1|-3<0\\ a-2x>0\end{cases}$ 的解集为 $-2<x<4$，则 a 的取值范围是

(A) $a\leqslant -4$　(B) $a\geqslant -4$　(C) $a\geqslant 8$　(D) $a\leqslant 8$

(4) 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，$-\dfrac{c}{a}<-\dfrac{d}{b}$，则

(A) $bc<ad$　(B) $bc>ad$　(C) $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$　(D) $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$

(5) 设 $P=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$Q=\{x|x(x-1)>2\}$，则 $P\cap Q$ 等于



(A) $\{x|x>3\}$　(B) $\{x|-1<x<2\}$　(C) $\{x|2<x<3\}$　(D) $\{x|1<x<2\}$

(6) 设实数 x,y 满足 $x+y=4$，则 x^2+y^2 的最小值为

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10

2. 填空题：　$2(x^2+y^2)\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=16$

(1) 不等式 $x^2-2x+1>0$ 的解集为 <u>$x\neq 1$</u>，不等式 $x^2-2x+1\geqslant 0$ 的解集为 <u>R</u>.

(2) 不等式 $x^2+4x+4<0$ 的解集为 <u>$\varnothing$</u>，不等式 $x^2+4x+4\leqslant 0$ 的解集为 <u>$x=-2$</u>.

(3) 不等式 $\dfrac{x^2+1}{1-2x}>0$ 的解集为 <u>$x<\frac{1}{2}$</u>.　$1-2x>0$

(4) 不等式 $\dfrac{4+2x}{(1+x)^2}>0$ 的解集为 <u>$x>-2$ 且 $x\neq -1$</u>.

3. 解下列不等式：　$x<-4$ 或 $x>2$　$-\frac{1}{3}<x<2$

(1) $(x-2)(x+4)>0$；　(2) $(2-x)(1+3x)>0$；　(3) $x^2-26x+169>0$；　$x\neq 13$

(4) $x^2-7x\leqslant 8$；　(5) $2x^2>9x-7$；　(6) $(x-3)(x+3)<1$.

$-1\leqslant x\leqslant 8$

4. 解下列不等式：

(1) $\dfrac{5-2x}{8+5x}>0$；　(2) $\dfrac{3x+7}{2-6x}\leqslant 0$；　(3) $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{4}{5}$.

5. 解下列不等式：

(1) $|x|+3>0$；　(2) $|x|-3<0$；　(3) $|x+2|>5$；　(4) $2|x+1|-3<0$；

(5) $2<|3x-2|\leqslant 3$.

6. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}x+1>0,\\ (x+2)(x-3)<0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2-2x-3<0,\\ x^2+3x-4<0.\end{cases}$