

教育部高校学生司推荐

高数 2005 年版

全国各类成人高考复习指导丛书

■ 高中起点升本、专科 ■

# 数学(理工农医类)

(附解题指导)

第 10 版

孙成基 主编



高等教育出版社

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习指导丛书

高中起点升本、专科

# 数 学 (理工农医类)

(附解题指导)

第 10 版

孙成基 主编

高等教育出版社

高等函授大学教材

全国各科成人高考复习指导丛书

数学(理工农医类)

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习指导丛书·数学·理工农医类:  
附解题指导/孙成基主编. —10 版. —北京:高等教育出  
版社,2005. 1

高中起点升本、专科

ISBN 7-04-016235-0

I. 全... II. 孙... III. 数学课 - 成人教育: 高等  
教育 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. G723.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 139057 号

策划编辑 李 宁

责任编辑 肖子东

责任校对 田晓兰

封面设计 刘晓翔

责任绘图 黄建英

责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社

购书热线 010-64054588

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

免费咨询 800-810-0598

邮政编码 100011

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

总 机 010-58581000

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京凌奇印刷有限责任公司

版 次 1986 年 4 月第 1 版

2005 年 1 月第 10 版

开 本 850×1168 1/16

印 次 2005 年 1 月第 1 次印刷

印 张 16.25

定 价 24.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号: 16235-00

## 出版前言

《全国各类成人高考复习指导丛书》第10版是在第9版的基础上，根据教育部2004年颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》修订而成的。

本丛书自1986年问世以来，一直受到广大读者的欢迎，在全国各类成人高考考生的复习备考中发挥着重要作用。十几年来，随着我国成人高等教育事业的发展和广大读者学习需求的变化，特别是全国各类成人高等学校招生复习考试大纲的几次修订，相应地这套丛书也历经了9次全面的修订。几经修改完善，这套丛书的整体质量不断提高，结构更加科学、合理，成为具有广泛适用性的成人高考考生复习备考的主干教材，在全国享有良好声誉。

按照新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)》的要求修订而成的全新第10版，具有如下特点：

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出，注重基础知识复习和能力训练，题型与练习贴近考试实际，实用性、针对性强。
2. 内容的选择和编排更适合成人学习的特点；注重吸收新知识、新成果，丛书的时代感更加鲜明。
3. 题型设计以及叙述方式等各个方面，注重从知识立意向能力立意的转变；在注重学科基本能力训练的同时，注重考生综合运用知识的能力和应试水平的提高；适合成人学习特点的体系结构更加完善。
4. 在覆盖新大纲知识点的前提下，适当压缩了字数，使丛书更加简明、实用。

修订后的本丛书(第10版)包括以下8本：

《语文 附解题指导》

《数学 附解题指导》(文史财经类)

《数学 附解题指导》(理工农医类)

《英语 附解题指导》

《物理化学综合科 物理分册 附解题指导》

《物理化学综合科 化学分册 附解题指导》

《历史地理综合科 历史分册 附解题指导》

《历史地理综合科 地理分册 附解题指导》

《数学》(理工农医类)本次修订主要内容为：

1. 增加了不等式的性质： $|a+b| \leq |a| + |b| (a, b \in \mathbf{R})$ 、正余弦函数的导数公式。
2. 删去了复数的三角形式及其有关的内容、坐标轴的平移、函数极限的四则运算、圆柱、圆锥以及多面体中棱柱、棱锥的侧面积、表面积的计算等内容。

本书主编为孙成基(《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》起草人)，参加编写的还有烟学敏、韩恩熙、李金香。本次修订工作由孙成基完成。

高等教育出版社

2004年12月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@ hep. com. cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010) 58581115/58581116/58581117/58581118

## 特别提醒

**特别提醒：**“中国教育考试在线”网站 <http://www.eduexam.com.cn> 是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、试题宝库、在线考场、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配本网站的增值服务卡。该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息并以此辨别图书真伪。

# 目 录

## 代 数( I )

(次)  
①

第一章 集合 .....	1	第三章 指数和对数 .....	18
第二章 不等式和不等式组 .....	5	第四章 函数 .....	25

## 三 角 函 数

第五章 三角函数 .....	47	第七章 解三角形 .....	82
§ 1 任意角的三角函数 .....	47	§ 1 反三角函数的符号 .....	82
§ 2 三角函数的图象和性质 .....	58	§ 2 解三角形 .....	84
第六章 两角和与两角差的三角函数 .....	67		

## 平面解析几何

第八章 直线与简易逻辑 .....	91	§ 1 圆 .....	120
§ 1 平面向量 .....	91	§ 2 椭圆 .....	128
§ 2 直线的方程 .....	101	§ 3 双曲线 .....	137
§ 3 两条直线的位置关系 .....	109	§ 4 抛物线 .....	144
第九章 圆锥曲线 .....	120	§ 5 参数方程 .....	151

## 代 数( II )

第十章 数列 .....	158	§ 1 函数的极限 .....	197
第十一章 排列、组合与二项式定理 .....	170	§ 2 函数的连续性 .....	199
第十二章 概率与统计初步 .....	181	§ 3 导数 .....	200
第十三章 复数 .....	190	§ 4 导数的应用 .....	206
第十四章 导数 .....	197		

## 立 体 几 何

第十五章 直线和平面 .....	213	§ 5 空间向量 .....	236
§ 1 平面 .....	213	第十六章 多面体和旋转体 .....	239
§ 2 空间两条直线 .....	216	§ 1 多面体 .....	239
§ 3 空间直线和平面 .....	221	§ 2 旋转体 .....	245
§ 4 空间两个平面 .....	229		

附录 2004 年成人高等学校招生全国统一考试数学试题与参考答案(理工农医类) .....	248
---	-----

# 代数(I)

## 第一章 集 合

### 【本章要求】

了解集合的意义及其表示法,了解空集、子集、交集、并集、全集、补集的概念及其表示法,了解符号 $\subseteq$ , $\subset$ , $=$ , $\in$ , $\notin$ 的含义,并能运用这些符号表示集合与集合,元素与集合的关系.

### 【内容提要】

#### 1. 集合的基本概念

**集合的意义** 把某些指定的对象集在一起,就成为一个集合(简称集).常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合.

**元素** 集合中的每个对象叫做集合的元素.常用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.

**有限集** 含有有限个元素的集合叫做有限集.

**无限集** 含有无限个元素的集合叫做无限集.

对于一个给定的集合 $A$ 和确定的元素 $a$ ,它们之间有且只有以下两种关系:

(1) 若 $a$ 是 $A$ 的元素,则称 $a$ 属于 $A$ ,记为 $a \in A$ .

(2) 若 $a$ 不是 $A$ 的元素,则称 $a$ 不属于 $A$ ,记为 $a \notin A$ .

**空集** 不含任何元素的集合叫做空集,记为 $\emptyset$ .

#### 2. 集合的表示法

**列举法** 把集合的元素一一列举出来,并写在大括号{}内的方法,叫做列举法.

**描述法** 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并将该条件写在大括号{}内的方法,叫做描述法.如不等式 $x - 5 > 2$ 的解集可表示为 $\{x | x - 5 > 2\}$ 或 $\{x : x - 5 > 2\}$ .

常见的几种数集的表示符号:

**N\*** (或 **N<sub>+</sub>**) 表示正整数集.

**N** 表示非负整数集,即自然数集.

**Z** 表示整数集.

**Q** 表示有理数集.

**R** 表示实数集.

**说明** 根据国家标准,“0”是自然数,请不要继续沿用自然数集不包括“0”的说法.

#### 3. 集合与集合的关系

**子集** 如果集合 $A$ 的任何一个元素都是集合 $B$ 的元素,则称 $A$ 是 $B$ 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ,读作“ $A$ 包含于 $B$ ”或“ $B$ 包含 $A$ ”.

**相等的集合** 若 $A \subseteq B$ ,且 $B \subseteq A$ ,则称 $A = B$ .

**真子集** 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ,则称 $A$ 是 $B$ 的真子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$ ).

**说明** 在国家标准中,用符号 $\subseteq$ (或 $\supseteq$ )表示集合间的真子集关系;用符号 $\subset$ (或 $\supset$ )表示集合间的子集关系,这个关系也可用符号 $\subset$ (或 $\supset$ )表示.

**规定** 空集是任何集合的子集.可见,空集是任何非空集合的真子集.

**注意:**  $A \subseteq A$ .

**交集** 由所有属于集合  $A$  且属于集合  $B$  的元素所组成的集合, 叫做  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ .  
交集的性质: (1)  $A \cap A = A$ ; (2)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

**并集** 由所有属于集合  $A$  或属于集合  $B$  的元素所组成的集合, 叫做  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ .  
并集的性质: (1)  $A \cup A = A$ ; (2)  $A \cup \emptyset = A$ .

**补集** 设集合  $S$ , 若集合  $A \subseteq S$ , 那么由  $S$  中所有不属于  $A$  的元素组成的集合, 叫做  $S$  中子集  $A$  的补集(或余集), 记作  $\complement_S A$ , 或简记作  $\complement A$ .

注意:  $\complement_S A \cup A = S$ ;

$\complement_S A \cap A = \emptyset$ .

**全集** 若一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素, 那么这个集合就可以看作一个全集, 全集记作  $U$ .

### 【例题与解题指导】

**例 1** 选择题:

(1) 已知集合  $A = \{0, 3\}$ ,  $B = \{0, 3, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$ , 则  $(B \cup C) \cap A =$

(A)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  (B)  $\emptyset$  (C)  $\{0, 3\}$  (D)  $\{0\}$

(2) 设集合  $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ ,  $N = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ , 则  $M \cup N =$

(A)  $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$  (B)  $\{x \mid 2 < x < 3\}$

(C)  $\{x \mid -1 < x < 4\}$  (D)  $\{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$

(3) 设集合  $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 10\}$ ,  $N = \{x \mid x > 7 \text{ 或 } x < 1\}$ , 则  $M \cap N =$

(A)  $\{x \mid 7 < x \leq 10\}$  (B)  $\{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$

(C)  $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$  (D)  $\{x \mid 1 < x \leq 10\}$

(4) 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 集合  $M = \{1, 3, 5\}$ ,  $N = \{2, 4, 6\}$ , 则  $\complement_U M \cap N =$

(A)  $\emptyset$  (B)  $U$  (C)  $N$  (D)  $M$

(5) 下列关系中, 正确的是

(A)  $\{0\} = \emptyset$  (B)  $\emptyset \in \{0\}$  (C)  $\emptyset \neq \{0\}$  (D)  $0 \neq \emptyset$

(6) 设集合  $M = \{(x, y) \mid xy > 0\}$ ,  $N = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ 且 } y > 0\}$ , 则

(A)  $M \cup N = M$  (B)  $M \cup N = N$  (C)  $M \cap N = M$  (D)  $M \cap N = \emptyset$

解 (1)  $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $(B \cup C) \cap A = \{0, 3\}$ , 选(C).

说明 求两个集合的并集, 相同的元素只写一个, 如  $B \cup C$  中的元素 3.

在集合的运算中, 如有小括号应先算小括号内的.

(2)  $M \cup N = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$ , 选(D)

说明 由不等式指定的集合运算, 可利用数轴直观地求解.

(3)  $M \cap N = \{x \mid -1 \leq x < 1 \text{ 或 } 7 < x \leq 10\}$ , 选(B).

(4)  $\complement_U M = \{2, 4, 6\}$ ,  $\complement_U M \cap N = \{2, 4, 6\}$ , 选(C).

(5)  $\{0\}$  是只含有一个元素 0 的单元素集合, 而  $\emptyset$  是空集, 所以(A) 不正确; 符号“ $\in$ ”用于元素与集合的关系, 故(B) 也不正确; 因为空集是任何非空集合的真子集, 所以(C) 正确.

(6)  $M$  与  $N$  都是点的集合.

由  $xy > 0$  知, 点  $(x, y)$  的横、纵坐标同号, 集合  $M = \{\text{第一或第三象限的点}\}$ ;

由  $x > 0$  且  $y > 0$  知, 点  $(x, y)$  的横、纵坐标的值均为正, 集合  $N = \{\text{第一象限的点}\}$ .

因此,  $M \cup N = M$ , 选(A).

例 2 填空题:

(1) 若  $A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x \mid x = k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 若  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ ,  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 则  $B = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- (3) 若  $A \subseteq C$ , 化简  $(A \cup B) \cup (B \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 若  $M = \{x \mid 2x + a = 0\}$ ,  $P = \{x \mid 1 < x < 4, \text{且 } x \in \mathbb{N}_+\}$ , 且  $M \cap P$  为非空集合, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 (1)  $A$  为奇数集合, 而  $B$  为整数集合, 则  $A \cap B = A$ ;  $A \cup B = B$ .

(2) 由  $A$  及  $A \cap B$  知,  $1, 3, 5 \in B$  且  $2, 4 \notin B$ ; 由  $A$  及  $A \cup B$  知,  $0, 6 \in B$ . 故  $B = \{1, 3, 5, 0, 6\}$ .

(3) 由于  $A \subseteq C$ , 所以  $A \cup B \subseteq B \cup C$ , 则  $(A \cup B) \cup (B \cup C) = B \cup C$ .

(4) 由已知,  $P = \{2, 3\}$ , 把  $x = 2, 3$  分别代入  $2x + a = 0$  中, 得  $a = -4$  或  $a = -6$ .

解 因为  $\complement_U A = \{0, 1, 4, 5\}$ ,  $\complement_U B = \{0, 1\}$ .

$$\text{所以 } \mathbb{C}_u A \cap \mathbb{C}_u B = \{0, 1\}.$$

因此  $\mathcal{C}_u A \cap \mathcal{C}_u B$  的所有的子集为:  $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{0,1\}$ 、 $\emptyset$ .

**例 4** 设全集  $U = \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x \mid -5 < x < 5\}$ ,  $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 7\}$ . 求  $\complement_U A$ ,  $\complement_U B$ ,  $\complement_U(A \cap B)$ ,  $\complement_U A \cup \complement_U B$ .

解 由已知, 得  $\complement_U A = \{x \mid x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5\}$ ,  $\complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 7\}$ .

$$\complement_U A \cup \complement_U B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\},$$

因为  $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 5\}$ , 所以  $\complement_U(A \cap B) = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 5\}$ .

## 练习一

### 1. 选择题:

- (1) 已知集合  $S = \{0, -1, -2, -3, -4\}$ , 集合  $M = \{0, -1, -2\}$ ,  $N = \{0, -3, -4\}$ , 则  $M \cap N =$   
 (A)  $\{0\}$       (B)  $\{-3, -4\}$       (C)  $\{-1, -2\}$       (D)  $\emptyset$

(2) 设集合  $M = \{x | x \geq -4\}$ ,  $N = \{x | x < 6\}$ , 则  $M \cup N =$   
 (A)  $\mathbb{R}$       (B)  $\{x | -4 \leq x < 6\}$       (C)  $\emptyset$       (D)  $\{x | -4 < x < 6\}$

(3) 设全集  $U = \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\complement_U P = \{x | x \geq a\}$ ,  $\complement_U Q = \{x | x \geq b\}$ , 若  $P \cap Q = P$ , 则  
 (A)  $a \geq b$       (B)  $b \geq a$       (C)  $a > b$       (D)  $b > a$

(4) 设  $M = \{x | x \leq \sqrt{10}\}$ ,  $a = 3$ , 下列各式正确的是  
 (A)  $a \subseteq M$       (B)  $a \notin M$       (C)  $\{a\} \in M$       (D)  $\{a\} \subseteq M$

(5) 已知集合  $M$  满足条件:  $\{1, 2\} \subseteq M \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 那么这样的集合  $M$  有

## 2. 填空题:

- (1) 若  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ , 则  $A \cap B = \{2, 4\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

(2) 若  $A = \{\text{正数}\}$ ,  $B = \{\text{非负数}\}$ , 则  $A \cap B = \{x | x > 0\}$ ,  $A \cup B = \{x | x \geq 0\}$ .

(3) 若  $A = \{x | x > -1\}$ ,  $B = \{x | x > -3\}$ , 则  $A \cap B = \{x | x > -1\}$ ,  $A \cup B = \{x | x > -3\}$ .

(4) 若  $A = \{x | x \geq -2\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 4\}$ , 则  $A \cap B = \{x | -1 < x \leq 4\}$ ,  $A \cup B = \{x | x \geq -2\}$ .

(5) 若  $A = \{x | 1 < x \leq 5\}$ ,  $B = \{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$ , 则  $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$ .

(6) 若  $A = \{\text{等边三角形}\}$ ,  $B = \{\text{等腰三角形}\}$ , 则  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \{\text{等边三角形, 等腰三角形}\}$ .

(7) 若  $U = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x | x > -1\}$ , 则  $\complement_U A = \{x | x \leq -1\}$ .

(8) 若  $U = \{\text{三角形}\}$ ,  $A = \{\text{直角三角形}\}$ , 则  $\complement_U A = \{\text{非直角三角形}\}$ .

(9) 若  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{3, 4, 5\}$ , 则  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3\}$ ,  $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ ,  $A \cap (B \cup C) = \{2\}$ ,  $B \cap (A \cup C) = \{2, 3\} = B$ .

(10) 若  $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{Z}$ .

3. 在下列各题横线上填写适当的符号( $\in$ ,  $\notin$ ,  $=$ ,  $\neq$ ,  $\subset$ ,  $\supset$ ):

(1)  $\emptyset \subsetneq \{a\}$ ; (2)  $a \in \{a\}$ ; (3)  $\{a\} = \{a\}$ ; (4)  $\{a\} \subsetneq \{a, b\}$ ; (5)  $6 \in \{0, 1, 2\}$ ; (6)  $0.5 \in \mathbb{Q}$ ; (7)  $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$ ; (8)  $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z}$ .

4. 写出集合  $A = \{0, 1, 2\}$  的所有子集，并指出其中哪个集合不是集合  $A$  的真子集.

5. 设集合  $A = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x | x = 4m \pm 1, m \in \mathbb{Z}\}$ , 试确定  $A$  与  $B$  的关系.

### 练习一解题指导

1. 解 (1)  $\complement_s M = \{-3, -4\}$ ,  $\complement_s M \cap N = \{-3, -4\}$ , 选(B). (2)  $M \cup N = \mathbb{R}$ , 选(A).

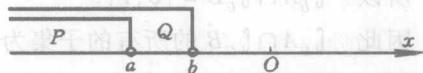
(3)  $P = \{x | x < a\}$ ,  $Q = \{x | x < b\}$ .

由  $P \cap Q = P$  知,  $P \not\subseteq Q$  或  $P = Q$ .

当  $P \not\subseteq Q$  时, 由图知  $b > a$ ;

当  $P = Q$  时,  $a = b$ .

从而  $b \geq a$ , 选(B).



(4) 符号“ $\not\subseteq$ ”用于表示集合与集合的关系, 而  $a$  是元素, 可排除(A); 因为  $3 < \sqrt{10}$ , 故可排除(B); 符号“ $\in$ ”用于表示元素与集合的关系, 而  $\{a\}$ 、 $M$  都是集合, 可排除(C), 故(D)正确.

(5) 有集合 {1, 2} 及它分别与下列集合: {3}, {4}, {5}、{3, 4}, {3, 5}, {4, 5} 的并集, 共七个. 故选(B).

(6) 由  $M \cap P = M$  可排除(A); 由  $\complement_u M \cap \complement_u P = \complement_u P$  可排除(B); 由  $M \not\subseteq P$  知  $\complement_u M \cap P$  是由集合  $P$  中除去  $M$  中所有元素组成的非空集合(图中斜线部分), 所以可排除(C), 故(D)正确.

2. 解 (1)  $A \cap B = \{2, 4\}$ ;  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

(2)  $A \cap B = A$ ;  $A \cup B = B$ .

(3)  $A \cap B = A$ ;  $A \cup B = B$ .

(4)  $A \cap B = B$ ;  $A \cup B = A$ .

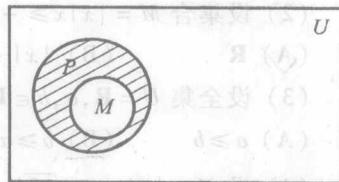
(5)  $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$ .

(6)  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = B$ .

(7)  $\complement_u A = \{x | x \leq -1\}$ .

(8)  $\complement_u A = \{\text{斜三角形}\}$ .

(9)  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3\}$ ,  $(A \cap B) \cap C = \emptyset$ ,  $A \cap (B \cup C) = \{2\}$ ,  $B \cap (A \cup C) = B$ .



(10)  $A = \{\text{偶数}\}$ ,  $B = \{\text{奇数}\}$ , 则  $A \cap B = \emptyset$ ;  $A \cup B = \mathbb{Z}$ .

3. 解 (1)  $\not\subseteq$  (2)  $\in$  (3)  $=$  (4)  $\not\subseteq$  (5)  $\notin$  (6)  $\in$  (7)  $\not\supseteq$  (8)  $\not\subseteq$ .

4. 解 集合  $A$  的所有子集为:  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$  及  $\emptyset$ . 其中  $\{0, 1, 2\}$  不是集合  $A$  的真子集.

5. 解 由于  $A = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,  $B = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ .

所以  $A = B$ .

素的解集，对实数全式解的  $a < x_0 \leq b$ ,  $0 > b$  果取。⑤ 空集合集的解集，解式  $a < x_0 \leq b$ ,  $0 \leq b$  果取。

第二章

## 第二章 不等式和不等式组

### 【本章要求】

- 理解不等式的性质，会用不等式的性质和基本不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $|a+b| \leq |a| + |b|$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 解决一些简单问题。
- 会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式，会解一元二次不等式，了解区间的概念，会表示不等式或不等式组的解集。
- 了解绝对值不等式的性质，会解形如  $|ax+b| \geq c$  和  $|ax+b| \leq c$  的绝对值不等式。

### 【内容提要】

#### 1. 不等式的意义和性质

- (1) 若  $a, b \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} a - b > 0 &\Leftrightarrow a > b; \\ a - b = 0 &\Leftrightarrow a = b; \\ a - b < 0 &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

- (2) 不等式的性质

- $a > b \Leftrightarrow b < a;$
- $a > b, b > c \Rightarrow a > c;$
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c;$
- $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d;$
- $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc;$
- $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc;$
- $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd;$
- $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$  ( $n \in \mathbb{N}_+$  且  $n > 1$ );
- $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  ( $n \in \mathbb{N}_+$  且  $n > 1$ );
- $|a+b| \leq |a| + |b|$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ , 且当  $a, b$  同号时取等号.)

#### 2. 解不等式

- (1) 不等式的解集和解不等式

在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的所有可取值的集合，叫做这个不等式的解的集合。求不等式的解集的过程，叫做解不等式。

- (2) 一元一次不等式及其解法

- 1) 一元一次不等式的一般形式为  $ax > b$ .

- 2) 解的讨论：

- (i) 当  $a \neq 0$  时

如果  $a > 0$ , 那么解集是  $\left\{x \mid x > \frac{b}{a}\right\}$ , 也可写成  $x > \frac{b}{a}$ , 下面也有类似写法.

如果  $a < 0$ , 那么解集  $x < \frac{b}{a}$ .

- (ii) 当  $a = 0$  时

#### 【解剖解题已解题】

且方程不等 1 题

如果  $b \geq 0$ , 那么  $ax > b$  无解, 即解的集合是空集  $\emptyset$ . 如果  $b < 0$ , 那么  $ax > b$  的解为全体实数, 即解的集合是  $\mathbf{R}$ .

### (3) 一元二次不等式及其解法

1) 一般形式为  $ax^2 + bx + c > 0$ , 这里  $a \neq 0$ .

2) 解的讨论:

设  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $x_1, x_2$  (为讨论方便, 不妨设  $x_1 < x_2$ ) 是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根.

(i) 当  $\Delta < 0$  时

如果  $a > 0$ , 不等式的解集是  $\mathbf{R}$ ;

如果  $a < 0$ , 不等式的解集是  $\emptyset$ .

(ii) 当  $\Delta = 0$  时

如果  $a > 0$ , 不等式的解集是  $x \neq -\frac{b}{2a}$ ;

如果  $a < 0$ , 不等式无解.

(iii) 当  $\Delta > 0$  时

如果  $a > 0$ , 不等式的解集是  $x < x_1$  或  $x > x_2$ ;

如果  $a < 0$ , 不等式的解集是  $x_1 < x < x_2$ .

注意: 一元二次不等式的解法, 应结合二次函数的图象来理解.

### (4) 含有绝对值的不等式的解法

1) 若  $a > 0$ ,  $|x| < a$  的解集是  $-a < x < a$ ;

2) 若  $a > 0$ ,  $|x| > a$  的解集是  $x > a$  或  $x < -a$ .

### (5) 不等式组的解

不等式组的解, 即不等式组中每一个不等式解集的交集.

## 3. 基本不等式

(1) 若  $a \in \mathbf{R}$ , 则  $a^2 \geq 0$ ;

(2) 如果  $a, b \in \mathbf{R}$ , 那么  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  (当  $a = b$  时取等号).

## 4. 关于区间的概念

设  $a$  与  $b$  是两个实数, 且  $a < b$ .

(1) 满足不等式  $a < x < b$  的一切实数  $x$  的集合叫做开区间, 记做  $(a, b)$ ;

(2) 满足不等式  $a \leq x \leq b$  的一切实数  $x$  的集合叫做闭区间, 记做  $[a, b]$ ;

(3) 满足不等式  $a \leq x < b$  或  $a < x \leq b$  的一切实数  $x$  的集合叫做半开半闭区间, 分别记做  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ .

特别地,  $\mathbf{R}$  可记为  $(-\infty, +\infty)$ , 符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 它们不是数, 只是记号.  $[a, +\infty)$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$  分别表示  $x \geq a$ ,  $x > a$ ,  $x \leq b$ ,  $x < b$  的一切实数  $x$  的集合.

## 【例题与解题指导】

### 例 1 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} > -1, \\ 2(x-3) - 3(x-2) < 0. \end{cases}$$

并用数轴表示其解集.

解 由①, 得

由②, 得

所以, 原不等式组化成

$$x > -6,$$

$$x > 0,$$

$$\begin{cases} x > -6, \\ x > 0. \end{cases}$$

即原不等式组的解集为

$$x > 0.$$

在数轴上表示,如图 2-1 中  $x$  轴上粗线部分.

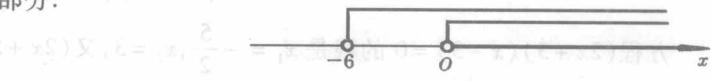
**例 2** 解不等式  $-8 < \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5$ .

解 不等式各方同乘以 4, 得

$$-32 < -3x - 2 - 20 < -20, \text{ 即 } -32 < -3x - 22 < -20.$$

不等式各方同时加 22, 得

不等式各方同时除以 -3, 得



$$\frac{10}{3} > x > -\frac{2}{3}.$$

所以原不等式的解集为  $-\frac{2}{3} < x < \frac{10}{3}$ .

**说明** 本例中的不等式,也可化为不等式组

$$\begin{cases} \frac{-3x-2}{4} - 5 > -8, \\ \frac{-3x-2}{4} - 5 < -5. \end{cases}$$

来解.

**例 3** 解不等式  $12x^2 - 5x - 3 > 0$ .

解 因为方程  $12x^2 - 5x - 3 = 0$  的根是  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{3}{4}$ .

又因为  $x^2$  的系数是  $12 > 0$ , 所以原不等式的解集是  $x < -\frac{1}{3}$  或  $x > \frac{3}{4}$ .

**例 4** 解不等式  $-2x^2 \geq 3x - 4$ .

解 原不等式可化成  $2x^2 + 3x - 4 \leq 0$ .

因为方程  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  的根是  $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$ , 又  $x^2$  的系数是  $2 > 0$ , 所以, 原不等

式的解集是  $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ .

**例 5** 解不等式  $\frac{3x+6}{5x-15} < 0$ .

分析 只须分式的分子、分母异号即可. 而  $(3x+6) \cdot (5x-15) < 0$  即转化为解一元二次不等式.

解 原不等式同解于

$$(3x+6)(5x-15) < 0.$$

所以原不等式的解为  $-2 < x < 3$ .

**说明** 原不等式两边不能直接同乘以  $5x-15$ . 因为  $5x-15$  的值正、负未定.

想一想, 不等式  $\frac{3x+6}{5x-15} \leq 0$  的解是什么?

**例 6** 解不等式  $\frac{3x+2}{x-3} > 1$ .

解 移项, 得

$$\frac{3x+2}{x-3} - 1 > 0.$$

整理化简,得

$$\frac{2x+5}{x-3} > 0.$$

其同解不等式为

$$(2x+5)(x-3) > 0.$$

方程 $(2x+5)(x-3)=0$ 的根是 $x_1 = -\frac{5}{2}$ ,  $x_2 = 3$ , 又 $(2x+5)(x-3)$ 中含 $x^2$ 项的系数是2>0,

因此,原不等式的解集为 $x > 3$ 或 $x < -\frac{5}{2}$ .

说明 解此类型不等式可先移项后通分化成例5的类型再解.

以上两例介绍了分式不等式的解法,请留意.

例7 解不等式 $|3-2x| - 5 > 0$ .

分析 经过移项,原不等式化为 $|3-2x| > 5$ , 它属于绝对值不等式中的类型(2),进而去掉绝对值解之.

如果注意到 $|3-2x| = |2x-3|$ ,解之较方便.

解 原不等式化为 $|2x-3| > 5$ ,则

$$2x-3 > 5 \quad \text{或} \quad 2x-3 < -5,$$

所以

$$x > 4 \quad \text{或} \quad x < -1 \quad \text{为所求.}$$

例8 解不等式 $8 - |3x+5| \geq 0$ .

分析 经移项,原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$ ,它属于绝对值不等式中的类型(1),进而去掉绝对值解之.

解 原不等式化为 $|3x+5| \leq 8$ ,则

$$-8 \leq 3x+5 \leq 8, \quad -13 \leq 3x \leq 3,$$

所以 $-\frac{13}{3} \leq x \leq 1$ 为所求.

说明 解含绝对值的不等式,应先判断它是两种类型中的哪一种,再去掉绝对值解之.

例9 若不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ ,求a,b的值.

分析 从解一元二次不等式的过程考虑.

解 由已知, $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 的两根,则

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{a}, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

解之,得 $a = -12$ ,  $b = -2$ .

例10 解不等式 $2 < |3x-2| < 3$ .

解 原不等式同解于不等式组

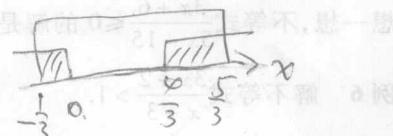
$$\begin{cases} |3x-2| > 2, \\ |3x-2| < 3. \end{cases}$$

由①,得 $3x-2 > 2$ 或 $3x-2 < -2$ ,则

$$x > \frac{4}{3} \quad \text{或} \quad x < 0.$$

由②,得 $-3 < 3x-2 < 3$ ,

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}.$$



①  
②

③

④

使③,④同时成立,得  $-\frac{1}{3} < x < 0$  或  $\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$ , 此为原不等式的解.

**例 11** 解不等式  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 3$ .

**解法一** 原不等式同解于不等式组  $\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 < 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 < 9. \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 < 9. \end{cases} \quad \text{②}$$

由①,得  $(2x+1)^2 \geq 0$ , 故该不等式的解为全体实数.

由②,得  $(x+2)(x-1) < 0$ , 即  $-2 < x < 1$ .

故原不等式的解为  $-2 < x < 1$ .

**解法二** 原不等式可化为  $\sqrt{(2x+1)^2} < 3$ , 则

$$|2x+1| < 3, \quad |2x+1| \leq |2x| + |1| \leq |2x| + |2| = 2|x| + 2 \leq 2|x| + 2|x| = 4|x| \leq 4|x| + 4|x| = 8|x| \leq 8|x| + 8|x| = 16|x| \leq 16|x| + 16|x| = 32|x| \leq 32|x| + 32|x| = 64|x| \leq 64|x| + 64|x| = 128|x| \leq 128|x| + 128|x| = 256|x| \leq 256|x| + 256|x| = 512|x| \leq 512|x| + 512|x| = 1024|x| \leq 1024|x| + 1024|x| = 2048|x| \leq 2048|x| + 2048|x| = 4096|x| \leq 4096|x| + 4096|x| = 8192|x| \leq 8192|x| + 8192|x| = 16384|x| \leq 16384|x| + 16384|x| = 32768|x| \leq 32768|x| + 32768|x| = 65536|x| \leq 65536|x| + 65536|x| = 131072|x| \leq 131072|x| + 131072|x| = 262144|x| \leq 262144|x| + 262144|x| = 524288|x| \leq 524288|x| + 524288|x| = 1048576|x| \leq 1048576|x| + 1048576|x| = 2097152|x| \leq 2097152|x| + 2097152|x| = 4194304|x| \leq 4194304|x| + 4194304|x| = 8388608|x| \leq 8388608|x| + 8388608|x| = 16777216|x| \leq 16777216|x| + 16777216|x| = 33554432|x| \leq 33554432|x| + 33554432|x| = 67108864|x| \leq 67108864|x| + 67108864|x| = 134217728|x| \leq 134217728|x| + 134217728|x| = 268435456|x| \leq 268435456|x| + 268435456|x| = 536870912|x| \leq 536870912|x| + 536870912|x| = 1073741824|x| \leq 1073741824|x| + 1073741824|x| = 2147483648|x| \leq 2147483648|x| + 2147483648|x| = 4294967296|x| \leq 4294967296|x| + 4294967296|x| = 8589934592|x| \leq 8589934592|x| + 8589934592|x| = 17179869184|x| \leq 17179869184|x| + 17179869184|x| = 34359738368|x| \leq 34359738368|x| + 34359738368|x| = 68719476736|x| \leq 68719476736|x| + 68719476736|x| = 137438953472|x| \leq 137438953472|x| + 137438953472|x| = 274877906944|x| \leq 274877906944|x| + 274877906944|x| = 549755813888|x| \leq 549755813888|x| + 549755813888|x| = 1099511627776|x| \leq 1099511627776|x| + 1099511627776|x| = 2199023255552|x| \leq 2199023255552|x| + 2199023255552|x| = 4398046511104|x| \leq 4398046511104|x| + 4398046511104|x| = 8796093022208|x| \leq 8796093022208|x| + 8796093022208|x| = 17592186044416|x| \leq 17592186044416|x| + 17592186044416|x| = 35184372088832|x| \leq 35184372088832|x| + 35184372088832|x| = 70368744177664|x| \leq 70368744177664|x| + 70368744177664|x| = 140737488355328|x| \leq 140737488355328|x| + 140737488355328|x| = 281474976710656|x| \leq 281474976710656|x| + 281474976710656|x| = 562949953421312|x| \leq 562949953421312|x| + 562949953421312|x| = 1125899906842624|x| \leq 1125899906842624|x| + 1125899906842624|x| = 2251799813685248|x| \leq 2251799813685248|x| + 2251799813685248|x| = 4503599627370496|x| \leq 4503599627370496|x| + 4503599627370496|x| = 9007199254740992|x| \leq 9007199254740992|x| + 9007199254740992|x| = 18014398509481984|x| \leq 18014398509481984|x| + 18014398509481984|x| = 36028797018963968|x| \leq 36028797018963968|x| + 36028797018963968|x| = 72057594037927936|x| \leq 72057594037927936|x| + 72057594037927936|x| = 144115188075855872|x| \leq 144115188075855872|x| + 144115188075855872|x| = 288230376151711744|x| \leq 288230376151711744|x| + 288230376151711744|x| = 576460752303423488|x| \leq 576460752303423488|x| + 576460752303423488|x| = 1152921504606846976|x| \leq 1152921504606846976|x| + 1152921504606846976|x| = 2305843009213693952|x| \leq 2305843009213693952|x| + 2305843009213693952|x| = 4611686018427387904|x| \leq 4611686018427387904|x| + 4611686018427387904|x| = 9223372036854775808|x| \leq 9223372036854775808|x| + 9223372036854775808|x| = 18446744073709551616|x| \leq 18446744073709551616|x| + 18446744073709551616|x| = 36893488147419103232|x| \leq 36893488147419103232|x| + 36893488147419103232|x| = 73786976294838206464|x| \leq 73786976294838206464|x| + 73786976294838206464|x| = 147573952589676412928|x| \leq 147573952589676412928|x| + 147573952589676412928|x| = 295147905179352825856|x| \leq 295147905179352825856|x| + 295147905179352825856|x| = 590295810358705651712|x| \leq 590295810358705651712|x| + 590295810358705651712|x| = 1180591620717411303424|x| \leq 1180591620717411303424|x| + 1180591620717411303424|x| = 2361183241434822606848|x| \leq 2361183241434822606848|x| + 2361183241434822606848|x| = 4722366482869645213696|x| \leq 4722366482869645213696|x| + 4722366482869645213696|x| = 9444732965739290427392|x| \leq 9444732965739290427392|x| + 9444732965739290427392|x| = 18889465931478580854784|x| \leq 18889465931478580854784|x| + 18889465931478580854784|x| = 37778931862957161709568|x| \leq 37778931862957161709568|x| + 37778931862957161709568|x| = 75557863725914323419136|x| \leq 75557863725914323419136|x| + 75557863725914323419136|x| = 151115727451828646838272|x| \leq 151115727451828646838272|x| + 151115727451828646838272|x| = 302231454903657293676544|x| \leq 302231454903657293676544|x| + 302231454903657293676544|x| = 604462909807314587353088|x| \leq 604462909807314587353088|x| + 604462909807314587353088|x| = 1208925819614629174706176|x| \leq 1208925819614629174706176|x| + 1208925819614629174706176|x| = 241785163922925834941232|x| \leq 241785163922925834941232|x| + 241785163922925834941232|x| = 483570327845851669882464|x| \leq 483570327845851669882464|x| + 483570327845851669882464|x| = 967140655691703339764928|x| \leq 967140655691703339764928|x| + 967140655691703339764928|x| = 1934281311383406679529856|x| \leq 1934281311383406679529856|x| + 1934281311383406679529856|x| = 3868562622766813359059712|x| \leq 3868562622766813359059712|x| + 3868562622766813359059712|x| = 7737125245533626718119424|x| \leq 7737125245533626718119424|x| + 7737125245533626718119424|x| = 15474250491067253436238848|x| \leq 15474250491067253436238848|x| + 15474250491067253436238848|x| = 30948500982134506872477696|x| \leq 30948500982134506872477696|x| + 30948500982134506872477696|x| = 61897001964269013744955392|x| \leq 61897001964269013744955392|x| + 61897001964269013744955392|x| = 123794003928538027489910784|x| \leq 123794003928538027489910784|x| + 123794003928538027489910784|x| = 247588007857076054979821568|x| \leq 247588007857076054979821568|x| + 247588007857076054979821568|x| = 495176015714152109959643136|x| \leq 495176015714152109959643136|x| + 495176015714152109959643136|x| = 990352031428304219919286272|x| \leq 990352031428304219919286272|x| + 990352031428304219919286272|x| = 1980704062856608439838572544|x| \leq 1980704062856608439838572544|x| + 1980704062856608439838572544|x| = 3961408125713216879677145088|x| \leq 3961408125713216879677145088|x| + 3961408125713216879677145088|x| = 7922816251426433759354290176|x| \leq 7922816251426433759354290176|x| + 7922816251426433759354290176|x| = 15845632502852867518708580352|x| \leq 15845632502852867518708580352|x| + 15845632502852867518708580352|x| = 31691265005705735037417160704|x| \leq 31691265005705735037417160704|x| + 31691265005705735037417160704|x| = 63382530011411470074834321408|x| \leq 63382530011411470074834321408|x| + 63382530011411470074834321408|x| = 126765060022822940149668642816|x| \leq 126765060022822940149668642816|x| + 126765060022822940149668642816|x| = 253530120045645880299337285632|x| \leq 253530120045645880299337285632|x| + 253530120045645880299337285632|x| = 507060240091291760598674571264|x| \leq 507060240091291760598674571264|x| + 507060240091291760598674571264|x| = 1014120480182583521197349142528|x| \leq 1014120480182583521197349142528|x| + 1014120480182583521197349142528|x| = 2028240960365167042394698285056|x| \leq 2028240960365167042394698285056|x| + 2028240960365167042394698285056|x| = 4056481920730334084789396570112|x| \leq 4056481920730334084789396570112|x| + 4056481920730334084789396570112|x| = 8112963841460668169578793140224|x| \leq 8112963841460668169578793140224|x| + 8112963841460668169578793140224|x| = 16225927682921336339157586280448|x| \leq 16225927682921336339157586280448|x| + 16225927682921336339157586280448|x| = 32451855365842672678315172560896|x| \leq 32451855365842672678315172560896|x| + 32451855365842672678315172560896|x| = 64903710731685345356630345121792|x| \leq 64903710731685345356630345121792|x| + 64903710731685345356630345121792|x| = 129807421463370690713260690243584|x| \leq 129807421463370690713260690243584|x| + 129807421463370690713260690243584|x| = 259614842926741381426521380487168|x| \leq 259614842926741381426521380487168|x| + 259614842926741381426521380487168|x| = 519229685853482762853042760974336|x| \leq 519229685853482762853042760974336|x| + 519229685853482762853042760974336|x| = 1038459371706965525706085521948672|x| \leq 1038459371706965525706085521948672|x| + 1038459371706965525706085521948672|x| = 2076918743413931051412171043897344|x| \leq 2076918743413931051412171043897344|x| + 2076918743413931051412171043897344|x| = 4153837486827862102824342087794688|x| \leq 4153837486827862102824342087794688|x| + 4153837486827862102824342087794688|x| = 8307674973655724205648684175589376|x| \leq 8307674973655724205648684175589376|x| + 8307674973655724205648684175589376|x| = 16615349947311448411297368351178752|x| \leq 16615349947311448411297368351178752|x| + 16615349947311448411297368351178752|x| = 33230699894622896822594736670357504|x| \leq 33230699894622896822594736670357504|x| + 33230699894622896822594736670357504|x| = 66461399789245793645189473340715008|x| \leq 66461399789245793645189473340715008|x| + 66461399789245793645189473340715008|x| = 132922799578491587290378946681430016|x| \leq 132922799578491587290378946681430016|x| + 132922799578491587290378946681430016|x| = 265845599156983174580757893362860032|x| \leq 265845599156983174580757893362860032|x| + 265845599156983174580757893362860032|x| = 531691198313966349161515786725720064|x| \leq 531691198313966349161515786725720064|x| + 531691198313966349161515786725720064|x| = 1063382396627932698323035573451440128|x| \leq 1063382396627932698323035573451440128|x| + 1063382396627932698323035573451440128|x| = 2126764793255865396646071146902880256|x| \leq 2126764793255865396646071146902880256|x| + 2126764793255865396646071146902880256|x| = 4253529586511730793292142293805760512|x| \leq 4253529586511730793292142293805760512|x| + 4253529586511730793292142293805760512|x| = 8507059173023461586584284587611521024|x| \leq 8507059173023461586584284587611521024|x| + 8507059173023461586584284587611521024|x| = 17014118346046923173168569175223042048|x| \leq 17014118346046923173168569175223042048|x| + 17014118346046923173168569175223042048|x| = 34028236692093846346337138350446084096|x| \leq 34028236692093846346337138350446084096|x| + 34028236692093846346337138350446084096|x| = 68056473384187692692674276700892168192|x| \leq 68056473384187692692674276700892168192|x| + 68056473384187692692674276700892168192|x| = 136112946768375385385348553401784336384|x| \leq 136112946768375385385348553401784336384|x| + 136112946768375385385348553401784336384|x| = 272225893536750770770697106803568672768|x| \leq 272225893536750770770697106803568672768|x| + 272225893536750770770697106803568672768|x| = 544451787073501541541394213607137345536|x| \leq 544451787073501541541394213607137345536|x| + 544451787073501541541394213607137345536|x| = 1088903574147003083082788427214274611072|x| \leq 1088903574147003083082788427214274611072|x| + 1088903574147003083082788427214274611072|x| = 2177807148294006166165576854428549222144|x| \leq 2177807148294006166165576854428549222144|x| + 2177807148294006166165576854428549222144|x| = 4355614296588012332331153708857098444288|x| \leq 4355614296588012332331153708857098444288|x| + 4355614296588012332331153708857098444288|x| = 8711228593176024664662307417714196888576|x| \leq 8711228593176024664662307417714196888576|x| + 8711228593176024664662307417714196888576|x| = 1742245718635204932932461483542839377152|x| \leq 1742245718635204932932461483542839377152|x| + 1742245718635204932932461483542839377152|x| = 3484491437270409865864922967085678754304|x| \leq 3484491437270409865864922967085678754304|x| + 3484491437270409865864922967085678754304|x| = 6968982874540819731729845934171357508608|x| \leq 6968982874540819731729845934171357508608|x| + 6968982874540819731729845934171357508608|x| = 1393796574908163946345969186834271501616|x| \leq 1393796574908163946345969186834271501616|x| + 13937965749081639463459691868$$

**例 15** 已知  $|x| < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $|y| < \frac{\varepsilon}{12}$ , 求证  $|2x+4y| < \varepsilon$ .

**分析** 直接应用不等式的性质:  $|a+b| \leq |a| + |b|$ , 及  $|ab| = |a| \cdot |b|$ , 即可.

**证明**  $|2x+4y| \leq |2x| + |4y| = 2|x| + 4|y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + 4 \cdot \frac{\varepsilon}{12} = \varepsilon$ .

即  $|2x+4y| < \varepsilon$ .

**说明** 本例证明过程用到了“放缩法”, 这里  $|x|$ ,  $|y|$  分别用  $\frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\frac{\varepsilon}{12}$  替换, 乃放大.

**例 16** 求证 (1)  $|a+b| + |a-b| \geq 2|a|$ ;

(2)  $|a+b| - |a-b| \leq 2|b|$ .

**分析** (1) 由  $|x| + |y| \geq |x+y|$ , 即得. 这里  $a+b$  相当于  $x$ ,  $a-b$  相当于  $y$ .

**证明**  $|a+b| + |a-b| \geq |a+b+a-b| = |2a| = 2|a|$ .

即  $|a+b| + |a-b| \geq 2|a|$ .

**分析** (2) 只证  $|a+b| \leq |a-b| + 2|b|$ , 即可.

**证明** 由于  $|a-b| + 2|b| = |a-b| + |2b| \geq |a-b+2b| = |a+b|$ .

即  $|a+b| \leq |a-b| + 2|b|$ .

于是  $|a+b| - |a-b| \leq 2|b|$ .

**说明** 本例(2)是用变更论证形式的方法.

**例 17** 已知  $|a-b| < 1$ , 求证  $|a| < |b| + 1$ .

**分析** 将  $|a|$  化为  $|a-b+b|$ , 以便用已知条件.

**证明**  $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$ .

已知  $|a-b| < 1$ .

于是  $|a| < 1 + |b|$ .

**例 18** 求证  $\frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \geq \frac{|a+b|}{1 + |a+b|}$ .

**分析一** 可用“分析法”即“执因找果”方法探索.

**证法一** 记  $x = |a| + |b|$ ,  $y = |a+b|$ . 则  $x \geq y \geq 0$ .

于是只证  $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ , 即可.

由于  $1+x > 0$ , 且  $1+y > 0$ ,

故只要证  $x(1+y) \geq y(1+x)$ .

即要证  $x+xy \geq y+xy$ .

$x \geq y$ .

由于  $x \geq y$  成立, 且以上过程可逆, 得证.

**说明** 用“分析法”证明, 其过程必须可逆.

**分析二** 用“比较法”探索.

**证法二** 同证法一, 只证

$\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$  即可. 由于  $\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)}$ .

因为  $x-y \geq 0$ ,  $(1+x) > 0$ ,  $(1+y) > 0$ , 所以

$$\frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geq 0$$

因此,  $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ , 得证.

说明 要证  $A \geq B$ , 只证  $A - B \geq 0$  即可. 此为“比较法”, 方法是“做差”.

另外, 本例中设  $x = |a| + |b|$ ,  $y = |a+b|$  是为了书写方便.

## 练习二

1. 选择题:

(1) 不等式  $ax^2 + bx + 24 < 0$  的解集为  $x > 2$  或  $x < -4$ , 则

- (A)  $a = -3, b = -6$     (B)  $a = 3, b = -6$     (C)  $a = -3, b = 6$     (D)  $a = 3, b = 6$

(2) 不等式  $x^2 + bx + \frac{1}{4} \leq 0$  的解集为  $\emptyset$ , 则

- (A)  $b < 1$     (B)  $b > -1$  或  $b < 1$     (C)  $-1 < b < 1$     (D)  $b > 1$  或  $b < -1$

(3) 不等式组  $\begin{cases} |x-1| - 3 < 0 \\ a - 2x > 0 \end{cases}$  的解集为  $-2 < x < 4$ , 则  $a$  的取值范围是

- (A)  $a \leq -4$     (B)  $a \geq -4$     (C)  $a \geq 8$     (D)  $a \leq 8$

(4) 已知  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 且  $ab > 0$ ,  $-\frac{c}{a} < -\frac{d}{b}$ , 则

- (A)  $bc < ad$     (B)  $bc > ad$     (C)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$     (D)  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

(5) 设  $P = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ,  $Q = \{x | x(x-1) > 2\}$ , 则  $P \cap Q$  等于

- (A)  $\{x | x > 3\}$     (B)  $\{x | -1 < x < 2\}$     (C)  $\{x | 2 < x < 3\}$     (D)  $\{x | 1 < x < 2\}$

(6) 设实数  $x, y$  满足  $x + y = 4$ , 则  $x^2 + y^2$  的最小值为

- (A) 4    (B) 6    (C) 8    (D) 10

2. 填空题:  $2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 = 16$

(1) 不等式  $x^2 - 2x + 1 > 0$  的解集为  $x \neq 1$ , 不等式  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$  的解集为  $\mathbb{R}$ .

(2) 不等式  $x^2 + 4x + 4 < 0$  的解集为  $\emptyset$ , 不等式  $x^2 + 4x + 4 \leq 0$  的解集为  $x = -2$ .

(3) 不等式  $\frac{x^2 + 1}{1 - 2x} > 0$  的解集为  $x < \frac{1}{2}$ .

(4) 不等式  $\frac{4 + 2x}{(1 + x)^2} > 0$  的解集为  $x > -2$  且  $x \neq -1$ .

3. 解下列不等式:

$$(1) (x-2)(x+4) > 0; \quad (2) (2-x)(1+3x) > 0; \quad (3) x^2 - 26x + 169 > 0; \quad (4) x^2 - 7x \leq 8;$$

$$(5) 2x^2 > 9x - 7; \quad (6) (x-3)(x+3) < 1.$$

4. 解下列不等式:

$$(1) \frac{5-2x}{8+5x} > 0; \quad (2) \frac{3x+7}{2-6x} \leq 0; \quad (3) \frac{x+1}{x-1} < \frac{4}{5}.$$

5. 解下列不等式:

$$(1) |x| + 3 > 0; \quad (2) |x| - 3 < 0; \quad (3) |x+2| > 5; \quad (4) 2|x+1| - 3 < 0;$$

$$(5) 2 < |3x-2| \leq 3.$$

6. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x+1 > 0, \\ (x+2)(x-3) < 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0. \end{cases}$$