

几何学习指导

● 中学生课外读物

● 张凤才 编

● 吉林人民出版社

中学生课外读物

几何学习指导

张凤才 编

吉林人民出版社

中学生课外读物
几何学习指导

张凤才

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 $17\frac{5}{8}$ 印张 386,000字

1982年4月第1版 1982年4月第1次印刷

印数：1—25,190册

书号：7091·1306 定价：1.20元

目 录

第一篇 平面几何 1

第一章 平面几何的基本概念和基本定理 1

§ 1 直线、角、平行线 1

一、直线、射线、线段 1

二、角 1

三、垂线和斜线 2

四、平行 2

练习一 5

§ 2 三角形 6

一、三角形的分类 6

二、全等三角形 6

三、直角三角形的全等和性质 8

四、等腰三角形 9

五、三角形的五心 9

六、相似三角形 10

练习二 14

§ 3 四边形 16

一、平行四边形 16

二、矩形 17

三、菱形 17

四、正方形 18

五、梯形 18

练习三 21

§ 4 圆	122
一、圆的性质	122
二、圆和直线的关系	23
三、圆和圆间的关系	24
四、与圆有关的角	25
五、关于圆的比例线段	26
六、多边形和圆的关系	27
七、圆的周长和面积	27
练习四	33
第二章 证明题	35
§ 1 几何证明题的一般证法和分类	35
一、几何证明题的一般证法	35
二、证明题的类型	36
§ 2 几何证明题	36
一、证明两条线段相等的问题	36
练习五	42
二、证明角相等	43
练习六	47
三、证明两条直线(或线段)平行	48
练习七	50
四、证明两条直线互相垂直	50
练习八	52
五、证明几条线段成比例	52
练习九	55
六、证明面积相等	56
练习十	59
七、证明线段的积的和与差的问题	60
练习十一	62
八、证明线段的和差倍分问题	63

练习十二	66
九、证明角的和差倍分问题	66
练习十三	69
十、证明线段与角的不等关系问题	70
练习十四	72
十一、证明四点共圆问题	73
练习十五	75
十二、证明诸点共线问题	75
练习十六	80
十三、证明诸线共点问题	80
练习十七	84
第三章 计算题	88
§ 1 几何计算题的类型和解法	88
一、几何计算题的类型	88
二、解几何计算题的一般步骤是	88
§ 2 解计算题的基本公式	89
练习十八	99
第四章 轨迹问题和作图问题	108
§ 1 轨迹问题的基础知识	108
一、定义	108
二、初等轨迹的形状	108
三、基本轨迹	108
四、解轨迹问题的步骤	109
五、例题	109
练习十九	115
§ 2 几何作图问题的基础知识	116
一、几何作图的规定	116
二、基本作图	116
三、解作图题的步骤	117

四、常用的作图方法	117
练习二十	127
第五章 综合性问题	128
§ 1 解题一般步骤	128
§ 2 例题	128
练习二十一	154
第二篇 立体几何	162
第一章 直线和平面	162
练习二十二	183
第二章 多面体	193
§ 1 棱柱、棱锥、棱台	193
一、多面体的定义	193
二、棱柱	193
三、棱锥	194
四、棱台	195
§ 2 棱柱、棱锥、棱台的侧面积、全面积和体积	195
一、棱柱、棱锥、棱台的侧面积和全面积	195
二、棱柱、棱锥、棱台的体积	196
练习二十三	218
第三章 旋转体	225
§ 1 圆柱、圆锥、圆台、球	225
一、圆柱	225
二、圆锥	225
三、圆台	226
四、球	226
§ 2 圆柱、圆锥、圆台、球的侧面积、全面积和体积	227

一、圆柱、圆锥、圆台、球的侧面积、全面积	227
二、圆柱、圆锥、圆台、球的体积	228
练习二十四	248
第三篇 平面解析几何	261
第一章 直角坐标系、曲线和方程	261
§ 1 直角坐标系	261
一、直角坐标系	261
二、直角坐标系中的几个基本问题	262
§ 2 曲线和方程	265
一、由曲线求它的方程	265
二、由方程画出它的曲线	267
三、两条曲线的公共点	271
练习二十五	273
第二章 直线	277
练习二十六	292
第三章 圆锥曲线	297
§ 1 圆	297
一、圆的方程	297
二、三个条件决定一个圆	298
§ 2 椭圆	203
一、椭圆的标准方程	303
二、椭圆的性质	304
三、椭圆的两个基本问题	305
§ 3 双曲线	312
一、双曲线的标准方程	312
二、双曲线的性质	313
三、双曲线的两个基本问题	314

§ 4 抛 物 线	317
一、抛物线的标准方程	317
二、抛物线的性质	318
三、抛物线的两个基本问题	319
§ 5 圆锥曲线的切线方程	323
一、圆的切线方程	323
二、抛物线、椭圆和双曲线的切线方程	324
练习二十七	335
第四章 坐标变换	347
§ 1 坐标轴的平移	347
一、坐标轴的平移定义和平移公式	347
二、利用坐标轴的平移化简曲线的方程	349
三、方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的曲线类型的判定	352
§ 2 坐标轴的旋转	361
一、坐标轴的旋转定义和转轴公式	361
二、利用坐标轴的旋转化简一般二元二次方程	365
三、一般二元二次方程的曲线类型的判定	368
四、坐标变换的两个基本问题	371
练习二十八	378
第五章 极 坐 标	383
§ 1 极坐标的基本概念	383
一、极坐标系和点的极坐标	383
二、极坐标和直角坐标的互化	385
§ 2 由已知条件求曲线的极坐标方程	388
一、求曲线的极坐标方程	388
二、曲线的极坐标方程和直角坐标方程的互化	392
三、圆锥曲线的统一定义和它的极坐标方程	394
§ 3 极坐标方程的图形	401

练习二十九.....	410
第六章 参数方程	415
§ 1 参数方程	415
§ 2 参数方程与普通方程的互化	416
一、参数方程化成普通方程.....	416
二、普通方程化成参数方程.....	420
§ 3 求曲线的参数方程.....	424
§ 4 由参数方程画图	435
练习三十.....	440
附：练习题的提示或答案.....	452

第一篇 平面几何

第一章 平面几何的基本概念和基本定理

§ 1 直线、角、平行线

一、直线、射线、线段

直线上两点之间的部分叫做线段。

在直线上某一点一旁的部分叫做射线。

直线的性质：1. 两点确定一直线；2. 两点间的连线以线段为最短；3. 两条直线相交只有一个交点。

二、角

从一点引两条射线所组成的图形叫做角。组成角的两条射线叫做角的边，这两条射线的公共端点叫做角的顶点。

角按大小可分为周角、平角、钝角、直角、锐角；角按位置关系可分为邻角、余角、补角、对顶角、同位角、内错角、同旁内角。

角的性质：

1. 平角都相等，直角都相等，周角都相等，对顶角相等；

2. 边对应平行（或垂直）的两个角相等或互补；

3. 同一个角的余角（或补角）相等；
4. 补邻角的平分线互相垂直；
5. 过角的顶点引垂直于这个角的平分线必平分这个角的补邻角。

三、垂线和斜线

两条直线交成直角，这两条直线叫做互相垂直，其交点叫做垂足。

垂线的性质：1. 过一点只能画一直线和已知直线垂直；2. 点到直线做的线段中，以垂直的线段为最短。

从直线外一点向直线作垂线和斜线，则

1. 垂线长小于斜线长；
2. 垂足到斜足的距离相等的两条斜线等长；
3. 等长的斜线，其斜足到垂足的距离相等；
4. 垂足到斜足的距离较长的斜线也较长；
5. 较长的斜线，其斜足到垂足的距离也较长。

四、平 行

在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线。

平行线的性质：

1. 过直线外一点只能画一直线平行已知直线；
2. 平行线的同位角相等，内错角相等，同旁内角互补；
3. 夹在平行线间的平行线段相等。

平行线的判定：

1. 垂直（或平行）于同一直线的两条直线必互相平行；
2. 二直线和另一直线相交，有下列条件之一时，这二

直线必互相平行：

- ① 同位角相等；
- ② 内错角相等；
- ③ 同旁内角互补。

3. 一直线截一三角形的两边（或两边的延长线）成比例时，它必和这个三角形的第三边平行。

例1 已知 $OB \perp OD$ ，又 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。
证明 A 、 O 、 E 三点在一条直线上（图1-1）。

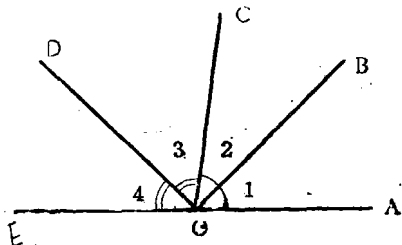


图1-1

〔已知〕 $OB \perp OD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

〔求证〕 A 、 O 、 E 三点在一条直线上。

〔证明〕 $\because OB \perp OD$ ，

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2 \times 90^\circ = 180^\circ.$$

$\therefore A$ 、 O 、 E 三点在一条直线上。

注：证明三点在一条直线上，只要证明由这三点组成的角为 180° 即可。

例2 求证：如果两条平行线和第三条直线相交，那么它们的一对同位角的平分线互相平行；而它们的一对同旁内

角的平分线互相垂直。

〔已知〕 $l_1 \parallel l_2$, l_3 与 l_1 、 l_2 相交, OB 、 O_1B_1 、 OB_1 分别为 $\angle AOC$ 、 $\angle A_1O_1C$ 、 $\angle AOO_1$ 的平分线 (图 1-2)。

〔求证〕 (1) $OB \parallel O_1B_1$; (2) $OB_1 \perp O_1B_1$ 。

〔证明〕 (1) $\because l_1 \parallel l_2$,

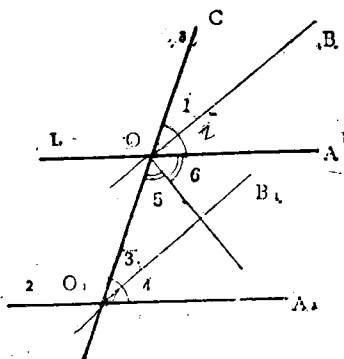


图 1-2

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4,$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore 2\angle 1 = 2\angle 3,$$

$$\text{即 } \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore OB \parallel O_1B_1.$$

$$(2) \because l_1 \parallel l_2, \therefore \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 3 = \angle 4, \angle 5 = \angle 6,$$

$$\therefore 2(\angle 3 + \angle 5) = 180^\circ, \text{ 即 } \angle 3 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 3 + \angle 5 + \angle OB_1O_1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OB_1O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$\therefore OB_1 \perp O_1 B_1$.

注：证明两条直线互相垂直，只要证明这两条直线的夹角为 90° 即可。

练习一

1. 已知： $\angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 3$ 。求证： $AB \parallel DE$ 。

2. 已知： $\angle AEG = \angle CGN$ ，
 $\angle AEF = \angle CGH$ ，求证： $EF \parallel GH$ 。

3. 直线 AB 、 CD 分别和直线 EF 相交于 G 、 H 。

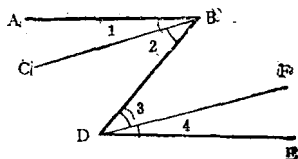
(1) 已知： $\angle AGE = \angle DHF$ 。

求证： $AB \parallel CD$ 。

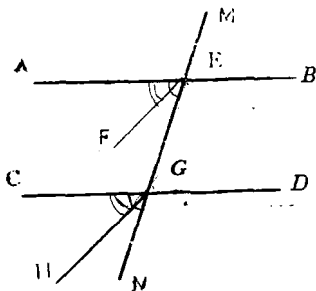
(2) 已知： $\angle AGE + \angle CHF = 180^\circ$ 。

求证： $AB \parallel CD$ 。

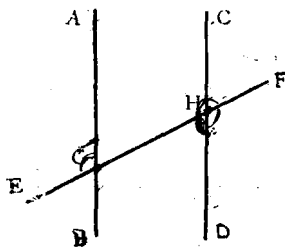
4. 如图，已知 $\angle BED = \angle 1 + \angle 2$ ，求证 $AB \parallel CD$ 。



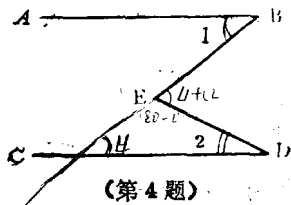
(第1题)



(第2题)



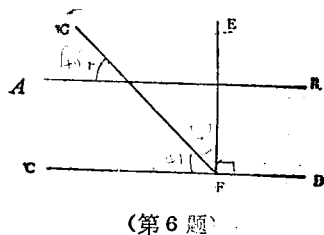
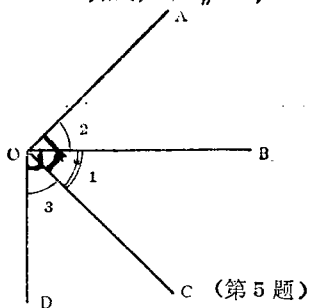
(第3题)



(第4题)

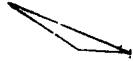
5. 如图, $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle AOD = 3\angle BOC$, 求 $\angle BOC$.

6. 如图, $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$, $\angle 1 = 40^\circ$, 求 $\angle EFG$.



§ 2 三 角 形

一、三角形的分类

按边	按角	锐角的	直角的	钝角的
不等边的				
等腰的				
等边的				

二、全等三角形

1. 能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形。

2. 全等三角形的判定:

任意三角形,具有下列条件之一时,这两个三角形必全等:

- (1) 两条边和它们的夹角对应相等, SAS
- (2) 两个角和它们的夹边对应相等, ASA (AAS)
- (3) 三条边对应相等. SSS

3. 三角形的性质:

- (1) 三角形三个内角的和等于两个直角 (180°).
- (2) 三角形的一个外角等于两个不相邻的内角的和.
- (3) 三角形的一个外角与不相邻的一个内角之差, 等于不相邻的另一个内角.
- (4) 若两个三角形有两个角对应相等, 则第三个角也相等.
- (5) 三角形的一条边小于其他两边的和, 大于其他两边的差.
- (6) 在三角形中, 等边对的角等, 大边对的角大.
- (7) 在三角形中, 等角对的边等, 大角对的边大.
- (8) 两边对应相等的两个三角形中, 这两条边夹角大的第三边也大.
- (9) 两条边对应相等的两个三角形中, 第三边大的对角也大.
- (10) 三角形两边中点的连线平行第三边且等于第三边的一半.
- (11) 过三角形一边中点而平行另一边的直线平分第三边.
- (12) 三角形一内角平分线把它的对边分成的两个线段和这个内角的两边成比例.
- (13) 三角形一外角平分线如果与对边相交, 则交点到