



高等学校数学学习辅导教材

高等数学典型题精讲

(最新版)



同济大学·高等数学第五版

韩云瑞/主 编

 大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学典型题精讲

(最新版)

主 编 韩云瑞

编 者 刘庆华 黎传琦 王燕来

大连理工大学出版社

© 韩云瑞 2003

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题精讲 / 韩云瑞主编. —2版. 大连:大连理工大学出版社, 2003.7

(高等学校数学学习辅导教材)

ISBN 7-5611-1948-8

I. 高… II. 韩… III. 高等数学—高等学校—解题
IV. O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 017459 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961

E-mail: dulp@mail.dlptt.ln.cn URL: http://www.dulp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:20 字数:651千字

印数:70 001 ~ 80 000

2001年9月第1版

2003年7月第2版

2003年7月第7次印刷

责任编辑:刘杰

责任校对:刘智伟

封面设计:王福刚

定价:24.00元

最新版前言

《高等数学典型题精讲》问世尚不足二年,但是已经受到众多读者的好评。大多学生将它作为学习高等数学的首选辅导书,不少在第一线从事高等数学(微积分)教学的教师将它推荐给自己的学生。正是因为受到广大读者的支持和厚爱,本书的 2001 版被中国书刊发行协会评为 2002 年度全国优秀畅销书。

近几年,高校的高等数学(微积分)的教材内容和教学要求都在不断地发生变化,全国硕士研究生入学考试的考试大纲和具体要求也进行了某些修改。作为学习辅导书,《高等数学典型题精讲》也必须进行适当的修订,使之更加适应于《高等数学》(微积分)课程学习以及准备考研的需要。

本书的修订主要有以下几个方面:

1. 参照于全国硕士研究生入学考试的考试大纲和国内多数学校的实际教学要求,对于若干超纲内容进行了适当的删简(例如,极限的 $\epsilon-N$ 和 $\epsilon-\delta$ 方法,广义积分的审敛准则以及相关技巧,多元函数的极限的计算等)。

2. 删去了一些计算过程繁杂的题目以及重复题,补充了若干训练目的明确、同时计算过程又相对简单的题目。另外还精选或者编写了若干难度较大、但是对于提高解题能力富有启发性的题目。

学习辅导书应当通过适量的、比较简单的典型题帮助读者掌握基本运算和基本概念。在这个基础上,引导读者根据自己的精力和实际需要,通过不同难度、不同特点的题目,进一步学习、钻研解题思路 and 技巧,不断提高解题能力。本书对于题目的取舍以及解题过程的分析,始终坚持这样的原则:启发读者的解题思路,并且引

导他们正确地运用概念和各种运算法则,而不是过多地陷入繁杂的计算之中。

3. 补充了 2003 年全国硕士研究生入学统一考试(卷 1 和卷 2)的试题及解答。

本书编写的宗旨之一,是以高等数学的课程的学习辅导为主,兼顾考研复习。因此,它的特点是起点较低,注重基本概念和基本运算方面的训练。同时,题目的内容丰富、特色明显,并且范围和难度跨度大。在本书的编写和修订过程中,编者认真地参照研究生入学考试的要求,并且尽量地照顾国内常用教材(例如,同济大学《高等数学》五版等)的内容和要求。同时又在很大程度上体现了编者们在清华大学多年讲授微积分所积累的经验,以及编者对于微积分基本原理和方法的理解。所以本书不限于向读者罗列众多的题目,而是通过丰富的例题和习题,引导读者掌握基本要求,深入理解微积分的原理和方法,在这个基础上学习解题思路和方法。

4. 为了使本书成为一本更有价值的学习指导书,出版社和编者本着对读者负责的态度,特地聘请了有丰富经验的专家,对于本书进行了逐字逐句的校对和推敲,改正了许多错误和不妥之处。

对于正在学习或者即将学习高等数学(微积分)的读者,借再版的机会,编者愿意向他们再次指出:学好数学既需要自觉地培养兴趣,又需要具备刻苦精神;既需要树立学好数学的信心,又需要扎扎实实地从基础训练做起。要坚持自己动手做题,做好其中的每一步,直到得出正确的结果。有了扎实的基本功,对解题过程中的各种问题有了切身的体会,才能真正提高自己的解题能力,能在各种考试中做到思路敏捷,运算正确,少出错误,从而取得好的成绩。

韩云瑞

2003 年 6 月

前 言

本书是大学理工科非数学各专业《高等数学》(微积分)课程的教学辅导书。编写本书的目的是指导大学一年级学生理解掌握高等数学的原理,帮助他们学会基本的解题方法,提高分析、解决问题的能力。本书参照了原国家教委审定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》和教育部 2001 年新审定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(数学卷 1 和卷 2),对于高等数学这门大学数学最重要的基础课程,既注重基础训练,又注意与硕士研究生入学统一考试的要求衔接。因此本书是一本融学习指导和考研辅导为一体的参考书。为了适合于更多的读者作为教学同步辅导用书,本书的章节编排,内容深度和广度主要参照目前国内教材中使用量较大的同济大学《高等数学》(四版),并且参考了其他有影响的若干教材的内容和要求。因此本书适合于包括同济大学《高等数学》(四版)以及同类教科书为教材的高等数学的同步学习指导,同时,本书也适合于准备参加全国硕士研究生入学统一考试的读者系统复习高等数学,提高解题能力,进行应考准备。另外,对于《高等数学》(微积分)教学第一线的教师,本书也是一本有用的参考资料。

本书的内容包括典型题精讲(客观题与非客观题),解题能力训练,模拟考场以及附录。典型题精讲中不仅给出问题的解答,还尽量地通过解题思路分析,对于重点和难点的注释和点评,帮助读者加深对于微积分基本概念和基本方法的理解,学会解题方法,并且尽可能避免常见错误。在典型题之后,精选了少量习题,供读者

通过自己亲自动手,寻找解题思路 and 技巧,对于学过的知识进行复习巩固。解题能力训练后附有参考答案和必要的提示,供读者参照。每一章的最后都精心设计了一份或两份测验题,本书称之为“模拟考场”。“模拟考场”为读者设置如亲临考场的某种氛围。读者可以通过自测,并对照参考解答测试自己对于本章知识的掌握程度,了解自己的不足,有针对性地进行复习。

每一章典型题的最后有若干综合例题,这些例题取材于清华大学微积分课程教材《微积分教程》中各章的补充习题。这些题目难度较大,但颇有特色,因此许多读者从全国各地不断地来信或发电子邮件向编者索取答案。编者在为众多读者的钻研精神受到鼓舞的同时,也为难于满足所有读者的要求而感到不安。因此借本书出版的机会,将这些题目作为例题放在本书之中,供读者参考。相信这些问题对提高读者的解题能力会有帮助。但是这些题目不属于基本要求,仅供有兴趣并有余力的读者参考。

本书并不是例题、习题和试题的简单堆积。为了对于读者学习高等数学起到有价值的指导作用,除了在典型题的讲解过程中尽可能地启发思路,提醒初学者避免常见错误之外,本书主编专门为大学一年级学生撰写了探讨大学数学学习方法的文章。主编在清华大学多年执教微积分课程,每年都要面对新入学的大学生,在教学的同时进行必要的学习方法指导,这篇文章是根据主编多年的经验体会整理而写成的。

本书首先是一本与《高等数学》教学同步的辅导书,所以需要照顾不同学校、不同水平的大多数学生,注重体现高等数学的基本要求,起点不能太高。另一方面,为了使读者开阔视野,提高水平,编者将近十年以来几乎所有的全国硕士研究生入学统一考试的微积分试题有机地穿插在本书的例题、习题和试题之中,可以使读者在大学低年级学习《高等数学》这门课程的阶段就可以了解研究生入学考试的要求,在提高解题能力的同时,为将来参加全国硕士

研究生入学统一考试奠定扎实的基础。本书中凡是带有五位数字编号的题目都是某年的考研题目。例如,(96103)说明本题是1996年试卷1的一道3分题;(00206)说明本题是2000年试卷2的一道6分题。在附录2中还为读者提供了国内五所著名大学《高等数学》(微积分)的期末试题,供读者参考和演练。透过这些试题,读者可以从一个侧面了解国内高校的高等数学教学的水平和特点,进一步开拓自己的视野。

王天亮、权爽先生对本书原稿进行认真的审阅,孙宏昌教授,李思泽教授和张云凤老师对本书编写提供了有力的支持,编者在此向他(她)们表示诚挚的谢意。

本书编者应大连理工大学出版社教材开发部第一工作室刘杰主任的盛情之约,努力为尽可能多的读者学习高等数学(微积分)并准备将来参加全国硕士研究生入学统一考试作必要的准备提供一本有价值、有特色的辅导书。但是由于编者水平有限,加之时间比较仓促,缺点和错误在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2001.7 于清华大学

清华大学韩云瑞教授

与新同学谈谈怎样学习高等数学

对于刚刚走进大学的新同学,学习环境发生了很大的变化。在学习高等数学(微积分)的过程中许多同学会遇到各种困难。借此机会,就学习心态和学习方法问题和新同学一起进行简单的探讨。

一、调整学习心态,尽快适应大学学习环境是学好大学数学的前提

第一,是用兴趣推动学习,而不是用任务观点强迫自己被动地学习数学。

兴趣是学好数学的一个非常重要的条件,因此应当理性地、主动地培养这种兴趣,新时代的科学技术工作者需要扎实的数学基础,这种需要应当成为学习数学的强大的动力。其次,在学习过程中扎实认真地对待每一堂课,以做对每一个习题,为自己通过钻研解决任何一个难题而自豪,对于数学的兴趣会在不知不觉中逐渐浓厚起来,和老师、与同学多开展讨论也是培养兴趣的一个有效方法。另外,如果稍微了解微积分的历史,就会被笛卡儿、阿基米德和牛顿等一个个名垂青史的伟大的科学家的事业和精神所感染,激发你的兴趣和钻研精神。

第二个问题是要努力摆脱对于教师对于课堂的完全依赖心理。

教师在有限的课堂教学时间中,只能讲思路,讲重点,讲难点。不要指望教师对所有知识都讲细讲透,要学会自学,更多地依靠自学,在自学中培养学习能力,理解能力和创造能力。

第三个问题是,不仅要勤学还要好问,要不耻下问。有一部分学生在学习中不爱提问,不爱讨论。其中一个原因是怕自己提的问题太简单,怕别人认为自己水平低,怕麻烦老师等。学习中问题逐渐积累会使得你在学习中的困难越来越大,甚至造成一种非常被动的局面,正确的心态应当是不耻下问,不怕麻烦老师,有问题随时问老师或者与同学讨论,直到彻底弄清楚为止。

第四个问题是学习要扎扎实实,切忌不求甚解。

简单的证明和运算往往包含了最基本的方法和原理,只有认真地对待这些问题,扎扎实实地完成这些基本的练习,才能真正体会,进而掌握基本的解法方法。才有能力去分析解决那些复杂的问题,有些人不会分析解决

比较复杂的问题,归根结底是对基本的原理理解不深入,对基本的解题方法不熟练。

二、改进学习方法,提高学习效果

1. 学会听课

对于教师在课堂上讲的知识,最重要的是获得整体的认识,而不是拘泥于每个细节是否清楚。在教师证明定理与推导公式时,重要的是要理解其中的思路。只要掌握了主要思路,即使某些细节没有听清楚,也没有关系。你自己完全能够在这个思路的引导下将全部细节补足,最后推出结论。

成功的课堂教学不在于是否讲细讲透,不是课堂完全解决问题。课堂教学应当把主要思路,重点与难点交待清楚,而将部分细节留给学生。课堂教学要为学生留下值得思考的问题,学生在课堂上听课时,也应当把主要精力集中在教师的证明思路和对于难点的分析上。如果有某些细节没有听明白,不要影响你继续听其他内容。

作为面向 21 世纪的大学生,肩负知识创新使命的未来科学技术人才,应当在学习的各个环节培养自己的主动精神和自学能力,摆脱对教师与课堂的过分依赖。这不仅是今天学习的需要,而且是培养创造能力的需要。

2. 怎样预习和复习?

适当的预习是必要的,如果时间不多,你可以浏览一下教师将要讲的主要内容,获得一个大概的印象,这可以在一定程度上帮助你在课堂上跟上教师的思路,如果时间比较充裕,除了浏览之外,还可以进一步细致地阅读部分内容,并且准备好问题,看一下自己的理解与教师讲解的有什么区别,有哪些问题需要与教师讨论。如果能够做到这些,那么你的学习就会变得比较主动、深入,会取得比较好的效果。

复习不是简单的重复,应当用自己的表达方式再现所学的知识,例如对某个定理的复习,不是再读一遍书或课堂笔记,而是离开书本和笔记,回忆有关内容,不清楚之处再对照教材或者笔记。另外,复习时的思路不应当是教师讲课或者教科书叙述的翻版,一个可供参考的方法是采用倒叙式。从定理的结论倒推,为了得到定理的结论,是怎样进行推理的,定理的条件用在何处。这样倒置思维方式,更加接近于这个定理的发现的思路,是一种创造性的思维活动。

如何复习概念?首先,对于重要的定义,要求大家能够用自己的语言正确地进行复述。这是理解和应用它们的前提条件。其次,尽可能用具体形象的例

子解释或者表现抽象的数学概念,你能举出越多的实际例子说明某个概念,那么你对这个概念的理解就越加生动和深入。

一般来说,学习数学不能死记硬背,这无疑是正确的。但是在某些情况下,背诵定理的证明,对于理解和掌握证明的思想方法也确实是有用的。其奥妙在于通过反复背诵定理,深切地体会,进而掌握了定理的证明思想,这种方法对于某些数学课程是有效的。

3. 怎样解题

学生在学习高等数学过程中,更多的困难来自于习题。

首先,大家要重视基本概念和基本原理的理解和掌握,不要一头扎进题海中去。上面已经提及,提高解题能力重要途径之一是掌握好基本概念和基本方法。另一方面,因为高等数学题型变化多样,解题技巧丰富多彩,许多类型的题目并不是只要掌握好基本概念和基本方法就能会做的。需要看一些例题,或者需要教师的指点。不要因为某些题目一时找不到思路而失去信心。

至于如何解题,教师很难总结出几个适用于所有题目的通用的方法。怎样提高自己的解题能力?我认为,除了天生的智力因素之外,解题能力首先取决于基本概念和基本原理的理解与掌握程度。所以,多下功夫掌握基本概念和基本原理,尽可能地多做题目,是提高解题能力的重要途径。另外,做题要善于总结,特别是从不同的题目中提炼出一些有代表性的思想与方法。

4. 怎样看参考书

尽可能多地参考一些书籍会使你开阔眼界,增长知识,加深理解。看参考书有两种方式,其一是通读某一本书,不过大家往往没有太多的时间去通读教材之外的书。所以我建议大家采用第二种方法:以问题为中心,有选择地读参考书,具体地说就是:如果你对微积分中的某一部分,或者某个问题有兴趣,希望多了解一些,作比较深入的研究,那么可以查阅几本书,看一看其他书上对于这个问题是怎样论述的,在学习的基础上,自己可以做一个小结,这是自学的一个重要方式。

好的辅导书对于帮助自己学习高等数学也是有用的,但是使用辅导书要注意方法,不要仅仅停留于逐个地看例题,看得懂不等于会做,想到思路不等于做得完全正确。如果你想扎扎实实地提高解题能力,就要认真地、独立地解题,通过自己动脑动手体会解题的思路、方法和技巧。

三、有关几个问题的对话

下面是许多学生经常向教师提出的一些问题,借此机会,以对话方式和

大家进行简短的讨论。

1. 我学得不好,但是又提不出问题,怎么办?

我曾经向这些学生推荐过几个方法,帮助他们学会提问题。第一个方法是学会自己向自己提出问题,在进行课后复习时,不要看书,不要看课堂笔记,自己回忆或背诵定理和定理证明过程等内容。这样做的好处是,一方面有助于你发现不明白的问题,另一方面也能提高你的复习效果;第二是热心与别人开展讨论,积极地思考并试着回答别人提出的问题。有的同学在教师答疑时间经常去听听别人提的问题,也逐步学会了自己提问题;第三,尽可能多做一些不同类型的习题,从中发现问题,并与别人讨论,做题要善于比较和总结,既随时提出和解决问题,又能不断积累经验;第四,是自己学习教师没有讲过的内容,发现问题及时请教。

总之,自己不会提问题的主要原因,大概是学习没有深入,或者在学习中老是顺着别人的思路进行思维。解决这些问题,需要大家在学习过程中多动脑子,经常离开课本或笔记,多问些为什么。

2. 前一段学得不好,现在以补习以前学的知识为主,还是以学好现在为主? 还能不能赶上?

首先,微积分的知识结构系统性和连续性很强,前面的知识学的不扎实,肯定要影响后面知识的学习。所以适当的补习是必要的,但是在补习前面知识的时候要注意两点:第一,一定要以现在学的内容为主,不能脱离现在的学习去系统地复习,否则又会造成新的损失,问题越积越多,造成更大的被动。其次,边学习,边补习不一定全面复习,应当着重复习那些与现在学习密切相关的,最基本,最必要的概念和原理,如果自己不是很清楚,可以请教师指导,要有信心,只要方法得当,你能够摆脱一时的被动局面。但是,如果你的问题拖得太久,太多,被动局面就难以扭转了。

3. 做题没有思路怎么办?

基本的计算题和简单的证明题不会没有思路,但是对于初学者来说,比较复杂、技巧性很强的题目一时找不到思路并不奇怪。思路从何而来?第一是理解好基本原理和例题中的基本解题方法;第二是多看、多做一些例题,学习各种新的思路 and 技巧;第三是善于总结各种解题思路和方法,并且运用你掌握的思路 and 技巧去探索新的问题。如果老的方法不能完全解决新的问题,多想想,怎样修改思路 and 技巧才能适用于新的情况。另外,经常和同学开展讨论,多向教师请教会使自己受到启发,使思路更加开阔。

4. 考试题我都会,但总是出错

许多同学都把做错习题和考试出错归咎于自己粗心,实际上,这里更重要的原因是基本功不够扎实,平时马马虎虎、不求甚解的后果不仅是容易犯小错误,久而久之,会对于基本概念和基本运算的理解掌握不扎实,这是经常出错的根本原因。所以,学习要踏踏实实,务求甚解,即使是简单的、计算性的题目,也要认真、准确地做好。只有认真才能理解掌握基本运算和基本的证明方法,只有踏实的学风和一丝不苟的精神才能使你少犯错误。

学习数学要有科学的方法。笛卡儿强调说:“没有正确的方法,即使是有眼睛的博学者也只会像瞎子一样盲目探索。”同时学习数学也必须扎扎实实,切忌浮躁。任何方法都要以勤奋踏实的学习态度为基础,学习数学就像攀登泰山,如果你总是盯着高耸入云的顶峰,就总是觉得自己非常渺小,就容易产生畏难心理;反之,如果你尽力走好脚下的每一步,将自己迈出的每一步都作为一个成绩,为自己登上的每一个高度感到自豪,你就能不断地登上新的高峰。正如马克思教导的那样:在崎岖道路上不断攀登的人,才有希望登上光辉的顶峰。近代数学的重要奠基人、数学史上影响最大的数学家之一高斯说过:“假如别人和我一样深刻和持续地思考数学真理,他会作出同样的发现。”因此,只要有信心,你一定能学好数学。

2001.7 于清华大学

目 录

最新版前言

前言

清华大学韩云瑞教授与新同学谈谈怎样学习高等数学

第一章 函数与极限	1
典型题精讲	1
客观题	1
非客观题	8
综合题	43
练习题	50
参考答案与提示	53
模拟考场一	54
参考答案与提示	56
模拟考场二	57
参考答案与提示	59
第二章 导数与微分	62
典型题精讲	62
客观题	62
非客观题	73
综合题	103
练习题	105
参考答案与提示	106
模拟考场一	106

参考答案与提示	108
模拟考场二	109
参考答案与提示	111
第三章 导数应用	113
典型题精讲	113
客观题	113
非客观题	123
综合题	160
练习题	165
参考答案与提示	168
模拟考场一	171
参考答案与提示	173
模拟考场二	175
参考答案与提示	176
第四章 不定积分	179
典型题精讲	179
客观题	179
非客观题	182
练习题	199
参考答案与提示	200
模拟考场一	202
参考答案与提示	203
第五章 定积分及其应用	205
典型题精讲	205
客观题	205
非客观题	214
综合题	254

练习题.....	259
参考答案与提示.....	261
模拟考场一.....	262
参考答案与提示.....	263
模拟考场二.....	266
参考答案与提示.....	267
第六章 空间解析几何与向量代数	270
典型题精讲.....	270
客观题.....	270
非客观题.....	273
练习题.....	295
参考答案与提示.....	296
模拟考场一.....	297
参考答案与提示.....	298
第七章 多元函数微分法及其应用	300
典型题精讲.....	300
客观题.....	300
非客观题.....	304
综合题.....	340
练习题.....	344
参考答案与提示.....	346
模拟考场一.....	347
参考答案与提示.....	350
第八章 重积分	351
典型题精讲.....	351
客观题.....	351
非客观题.....	355

综合题·····	387
练习题·····	389
参考答案与提示·····	390
模拟考场一·····	393
参考答案与提示·····	394
模拟考场二·····	395
参考答案与提示·····	396
第九章 曲线积分与曲面积分·····	399
典型题精讲·····	399
客观题·····	399
非客观题·····	404
综合题·····	435
练习题·····	440
参考答案与提示·····	441
模拟考场一·····	442
参考答案与提示·····	443
第十章 级数·····	446
典型题精讲·····	446
客观题·····	446
非客观题·····	454
综合题·····	482
练习题·····	486
参考答案与提示·····	489
模拟考场一·····	491
参考答案与提示·····	493
模拟考场二·····	495
参考答案与提示·····	497