

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

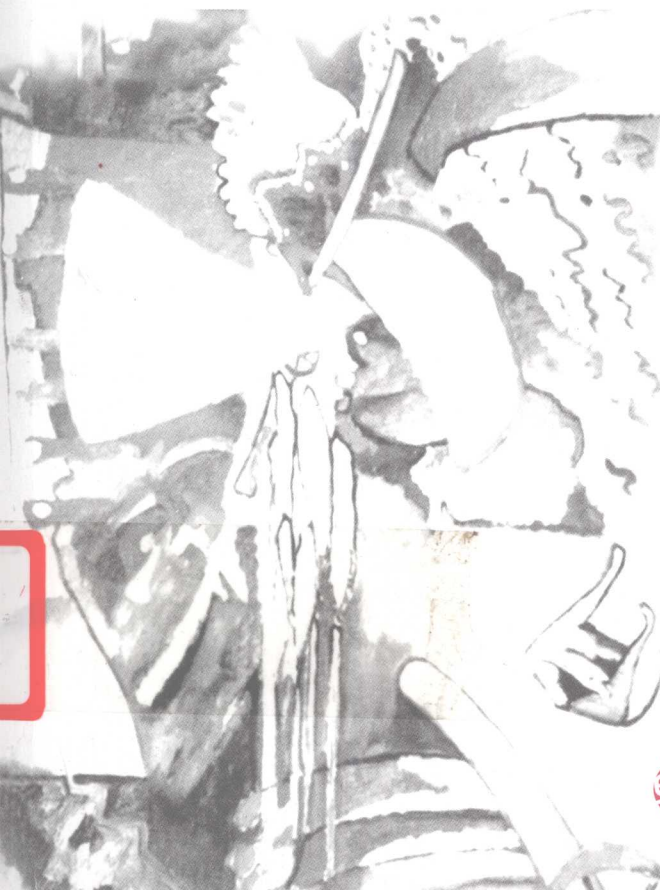
Thinking about Mathematics

# 数学哲学

对数学的思考

〔美〕斯图尔特·夏皮罗 著

郝兆宽 杨睿之 译



复旦大学出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

01-0  
49

文化理

丛书主

01-0  
49

Thinking about Mathematics

# 数学哲学

对数学的思考

〔美〕斯图尔特·夏皮罗 著

郝兆宽 杨睿之 译



復旦大學出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

## 西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

### 已出书目

《西方文化中的数学》

〔美〕 莫里斯·克莱因 著  
张祖贵译

《什么是数学》

〔美〕 R·柯朗 H·罗宾 著  
I·斯图尔特 修订  
左平 张饴慈 译

《后现代思想的数学根源》

〔美〕 弗拉第米尔·塔西奇 著  
蔡仲 戴建平 译

《数学与知识的探求》

〔美〕 莫里斯·克莱因 著  
刘志勇 译

《证明与反驳》

〔英〕 伊姆雷·拉卡托斯 著  
方刚 兰钊 译

《微积分概念发展史》

〔美〕 卡尔·B·波耶 著  
唐生 译

《高观点下的初等数学》

〔德〕 菲利克斯·克莱因 著  
舒湘芹 陈义章 杨钦樑 吴大任 陈鷄 译

《数学哲学——对数学的思考》

〔美〕 斯图尔特·夏皮罗 著  
郝兆宽 杨睿之 译

### 待出书目

《数学家的世代恩怨》

〔美〕 哈尔·赫尔曼 著

《19世纪数学思想史》

〔德〕 菲利克斯·克莱因 著

《数学与数字符号——数的文化史》

〔德〕 卡尔·曼宁格尔 著

## 图书在版编目(CIP)数据

数学哲学——对数学的思考/[美]斯图尔特·夏皮罗著;郝兆宽,杨睿之译. —上海:复旦大学出版社,2009.2

(西方数学文化理念传播译丛)

书名原文:Thinking about Mathematics; The Philosophy of Mathematics  
ISBN 978-7-309-06460-5

I. 数… II. ①夏…②赫…③杨… III. 数学哲学-研究 IV. 01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第002413号

### © Stewart Shapiro, 2000

*Thinking about Mathematics — The Philosophy of Mathematics* was originally published in English in 2000. This translation is published by arrangement with Oxford University Press and is for sale in the Mainland (part) of The People's Republic of China only.

《数学哲学——对数学的思考》最初用英文在2000年出版。本书经牛津大学出版社授权在中国内地出版和销售中文版。

著作权登记号 图字:09-2007-060

## 数学哲学——对数学的思考

[美]斯图尔特·夏皮罗 著 郝兆宽 杨睿之 译

---

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路579号 邮编200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

---

责任编辑 范仁梅

出品人 贺圣遂

---

印刷 浙江省临安市曙光印务有限公司

开本 890×1240 1/32

印张 10.25

字数 259千

版次 2009年2月第一版第一次印刷

印数 1—4 100

---

书号 ISBN 978-7-309-06460-5/O·422

定价 26.00元

---

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

这是一本关于数学的哲学著作。

## 内 容 提 要

斯图尔特·夏皮罗的这本独特的著作分为4大部分，全面地阐述了同数学有关的哲学问题和立场。全书探讨了自人类开始理智活动以来所引起的哲学家思考的那些数学问题。在对历史的全面综合中，作者讨论了数学在柏拉图、亚里士多德、康德和密尔这些思想家心目中的地位，并论述了贯串整个20世纪的3种主要立场：数学即逻辑（逻辑主义），数学的本质是按照规则对字符的操作（形式主义），以及认为数学是一种心灵活动的修正主义哲学（直觉主义）。最后，夏皮罗考察了当代的立场和著作，把读者引领到这个领域的最前沿。

读者只需要很少数学或哲学背景就能愉快地阅读本书。无论是很少涉足学院哲学的数学学生或数学专业人士，还是已经忘掉大部分所学数学的哲学学生和哲学家，都会从本书中受益匪浅。

## 序：数学哲学

这是一本关于数学的哲学著作。它首先涉及形而上学的内容：数学是关于什么的？它有研究对象吗？这个研究对象是什么？数、集合、点、线、函数等等是什么？然后有关于语义学的内容：数学陈述的含义是什么？数学真理的本质是什么？以及关于认识论的：数学是如何被认识的？它的方法论是什么？观察牵涉其中吗？抑或它只是纯心灵的活动？如何裁决数学家之间的争论？什么是证明？证明是绝对确定的、不受理性怀疑的吗？数学的逻辑是什么？存在不可知的数学真理吗？

数学因其是一个一成不变的领域而闻名遐迩，与哲学（在这方面）能有多不同就有多不同。在这里，事物似乎被一劳永逸地安排在一个一成不变的基础上。真是如此吗？数学中有没有革命，使那些长期存在的信念被抛弃？考虑到数学在自然和社会科学中被应用——以及被需求的程度，看起来基本上是一种心灵活动的数学，如何对科学所研究的物理的、人类的和社会的世界有所说明呢？为什么不了解很多数学就不能很深入地理解世界（自然科学意义上的）？对于数学这说明了什么？对于物理的、人类的和社会的世界，这又说明了什么呢？

数学哲学属于一个大类，这个大类包括物理学哲学、生物学哲学、心理学哲学、语言哲学、逻辑哲学甚或关于哲学的哲学。其主题是探讨与某个学术领域相关的哲学问题，内容包括该领域的形而上学、认识论、语义学、逻辑和方法论。一般来说， $X$  的哲学是由关心  $X$  的人来推动的，目的是想阐明它在整个知识领域中的位置。最理

想的是,从事  $X$  研究的人应能从一种  $X$  的哲学中获得些什么: 对她的研究领域的评价、它的定位, 以及对其在对世界的理解中所扮演角色的看法。数学哲学家需要对数学本身, 对作为人的数学家, 对数学得以应用的世界提出看法, 这是一个很高的要求。

本书分为四个部分: 第一部分, “概观”, 提供了对数学哲学的一个概述。第 1 章讨论了数学在哲学史上的地位, 以及数学和数学哲学之间的关系。第 2 章广泛讨论了数学哲学中的问题及其主要立场, 或立场的各种类型。

第二部分, “历史”, 概述了历史上的某些哲学家关于数学的观点, 并指出了数学在其一般哲学发展中的重要性。第 3 章讨论古代世界的柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristotle), 而第 4 章则前进到所谓的“近代时期”, 主要讨论伊曼努尔·康德(Immanuel Kant)和约翰·斯图亚特·密尔(John Stuart Mill)。本书这一部分的意图是讲解一个彻底的理性主义者(柏拉图)——一个认为凭人类心灵自己就能够拥有关于世界的切实的知识的哲学家——和一个彻底的经验主义者(密尔)——一个把所有, 或几乎所有知识都建立在观察之上的哲学家。康德则无畏地尝试了一种在理性主义和经验主义之间的综合, 对此两种观点取长补短。这些哲学家是大部分当代有关数学思考的先驱。

第三部分, “三大主义”, 涵盖了主导本世纪(20 世纪)早期的争论并仍然为当代文献提供了众多战线的主要哲学立场。第 5 章讨论逻辑主义, 认为数学就是、或能还原为: 逻辑。第 6 章讨论形式主义, 一种着眼于如下事实的观点: 很多数学由对语言符号按规则的操作组成。第 7 章讨论直觉主义, 认为数学由心灵构造组成。这“三大主义”的每一种在今天都有支持者。其中一些在本书的这一部分有所讨论。

第四部分题为“当代视野”。第 8 章讨论的是这样的观点, 它们按照字面意义理解数学语言, 并认为数学断言的绝大部分都是真的。

这些哲学家认为数、函数、点以及诸如此类的东西独立于数学家而存在，然后他们试图说明我们如何能有关于这些事物的知识，以及如此解释的数学如何与物理世界相联系。第9章讨论那些否认数学对象本身存在的哲学家。此处讨论的这些作者或者重新解释数学断言，以便使它们不必假设数学对象的存在也能为真，或者为数学确定一种与断言真理、否定谬误完全不一样的重要角色。第10章是关于结构主义的，这种观点认为数学是关于模式而不是个体对象的。这是我自己的立场(Shapiro 1997)。所以人们可以说我把最好的留在了最后。除了这一点冒昧之处外，我在整本书中都努力做到不偏不倚，整个计划是力图写一本这样的书，它既为那些对数学有兴趣但缺少哲学背景的人，又为那些对哲学有兴趣但缺少数学背景的人提供一些知识。对于本书大部分内容，熟悉高中或大学低年级数学，或许再加上一个哲学导论的课程就足够了。我力图避免过多使用符号，并对所使用的符号进行了解释。在某些地方，我可能假设了太多超出大学水平的数学，而在另一些地方又对不熟悉哲学术语的读者来说假设太多，但我希望这些地方极少并且相隔很远，而不会打断整本书的流畅，《牛津哲学词典》(*The Oxford Dictionary of Philosophy*, Blackburn, 1994)也许为初次接触哲学的人提供了一个方便的参考。

就这个计划来说我要感激很多人。首先感谢约翰·斯科儒夫斯基(John Skorupski)建议我写这本书，还要感谢牛津大学出版社的瑞特·孟奇洛夫(Reter Momtchiloff)，乔治·米勒(George Milker)，莱斯利·威尔森(Lesley Wilson)和蒂姆·巴顿(Tim Barton)在本书的整个出版过程中的鼓励和指导。当这本书的想法最初提出来后，我从同事和朋友那里得到的普遍意见是：有这样一本书当然很好，而我也写这样一本书的合适人选。我为这些赞美而深感荣幸，但所承担的任务又让我有些胆怯。我希望已将失望减少到最低限度。特别感谢佩内洛普·麦蒂(Penelope Maddy)，她阅



读了大部分章节的手稿并提出了仔细的建议。很多同事和朋友阅读了本书的部分手稿,并给我慷慨的帮助。我特别感激在历史材料方面得到的帮助,给我提出建议的有:乔迪·阿佐尼(Jody Azzouni)、马克·巴拉格尔(Mark Balagner)、李·布朗(Lee Brown)、约翰·布吉斯(John Burgess)、雅各布·布什(Jacob Busch)、查尔斯·赤哈拉(Charles Chihara)、朱利安·科尔(Julian Cole)、迈克尔·戴特芬森(Michael Detlefsen),若有遗漏则源自我的粗心,我对他们表示歉意。还要感激圣安德鲁丝(St Andrews)大学逻辑与形而上学系允许我在1996年秋季学期以本书的材料开设了一门课程。我在利兹(Leeds)大学的一小部分教师和学生中讲演了关于康德的半章,并在随后的讨论中受益匪浅。感谢本杰明·毕比(Benjamin Beebe)帮助完成定稿。

对我的妻子贝弗利·夏皮罗(Beverly Roseman Shapiro)以及我的孩子们我也各怀感激。他们有理由在我把自己关起来进行这项工作时感到恼怒。这本书深情地献给我的孩子们:瑞奇(Rache)、尤娜(Yonah)和阿维娃(Aviva)。没有他们,即使哲学上丰富的生活也会是空虚的。

# 目 录

## 第一部分 概 观

<b>第 1 章 什么使数学如此有趣(对一个哲学家)?</b> .....	3
1. 异性相吸? .....	3
2. 数学与哲学: 先有鸡还是先有蛋? .....	6
3. 自然主义和数学 .....	16
<b>第 2 章 各类问题及其尝试性的回答</b> .....	20
1. 必然性和先天知识 .....	20
2. 有关全局的问题: 对象和客观性 .....	23
2.1 对象 .....	23
2.2 真理 .....	28
3. 数学的和物理的 .....	32
4. 局部问题: 定理、理论, 以及概念 .....	38

## 第二部分 历 史

<b>第 3 章 柏拉图的理性主义和亚里士多德</b> .....	47
1. 在的世界 .....	48
2. 柏拉图之于数学 .....	50
3. 数学之于柏拉图 .....	56
4. 亚里士多德, 令人尊敬的对手 .....	60
5. 进一步阅读建议 .....	68

<b>第 4 章 亲近的对手：康德和密尔</b> .....	70
1. 重新定位 .....	70
2. 康德 .....	73
3. 密尔 .....	87
4. 进一步阅读建议 .....	98

### 第三部分 三大主义

<b>第 5 章 逻辑主义：数学(只)是逻辑？</b> .....	103
1. 弗雷格 .....	104
2. 罗素 .....	111
3. 卡尔纳普和逻辑实证主义 .....	120
4. 当代观点 .....	129
5. 进一步阅读建议 .....	134
<b>第 6 章 形式主义：数学陈述有任何意义吗？</b> .....	136
1. 基本观点；弗雷格的冲击 .....	137
1.1 词项 .....	137
1.2 游戏 .....	140
2. 演绎主义：希尔伯特的《几何基础》 .....	144
3. 有穷主义：希尔伯特计划 .....	153
4. 不完全性 .....	162
5. 科里 .....	164
6. 进一步阅读建议 .....	167
<b>第 7 章 直觉主义：我们的逻辑是不是有问题？</b> .....	168
1. 修正经典逻辑 .....	168
2. 老师，布劳威尔 .....	170
3. 学生，海丁 .....	181
4. 达米特 .....	185
5. 进一步阅读建议 .....	193

## 第四部分 当代视野

<b>第 8 章 数是存在的</b> ·····	197
1. 哥德尔 ·····	198
2. 信念之网 ·····	207
3. 集合论实在论 ·····	215
4. 进一步阅读建议 ·····	220
<b>第 9 章 不,它们不</b> ·····	221
1. 虚构主义 ·····	222
2. 模态构造 ·····	231
3. 我们应该如何解释这一切? ·····	237
4. 补遗: 少壮派 ·····	243
5. 进一步阅读建议 ·····	249
<b>第 10 章 结构主义</b> ·····	251
1. 背后的思想 ·····	251
2. 先物结构主义, 和对象 ·····	257
3. 没有结构的结构主义 ·····	263
4. 关于结构的知识 ·····	268
4.1 模式识别和其他抽象 ·····	269
4.2 隐定义 ·····	275
5. 进一步阅读建议 ·····	281
<b>参考文献</b> ·····	282
<b>索引</b> ·····	300

# 第一部分 概 观



# 第 1 章

## 什么使数学如此有趣(对一个哲学家)?

### 1. 异性相吸?

穿越整个历史,哲学家总是被数学所特别吸引。据说柏拉图学院的入口处刻着以下语句:“不懂几何学者勿入。”按照柏拉图的哲学,数学是了解宇宙本身而不是它的表面现象的真正训练。柏拉图通过反思数学在理性的知识获取中的地位而得到他的观点(见第 3 章,第 2—3 节)。在大规模学科分类之前,很多数学家也是哲学家。立刻会浮现在脑海里的是笛卡儿(René Descartes)、莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)和帕斯卡(Blaise Pascal)这些名字,紧接着出现的有波尔查诺(Bernard Bolzano)、罗素(Bertrand Russell)、怀特海(Alfred North Whitehead)、希尔伯特(David Hilbert)、弗雷格(Gottlob Frege)、丘奇(Alonzo Church)、哥德尔(Kurt Gödel)和塔斯基(Alfred Tarski)。而到最近,几乎每位哲学家都了解数学的状况,并对它抱有相当专业的兴趣。

理性主义是一种经久不衰的哲学流派,它的特征就是试图把已知的数学方法论推广到整个知识领域。理性主义者对数学享有的似乎不可动摇的基础及其在纯理性中的基本原则印象深刻。他们力图使所有知识都有这样的立足之处。科学、伦理学以及类似学科也应该这样进行:仅从理性中提供关于其命题的严格证明。理性主义源自柏拉图,在 17 世纪和 18 世纪初叶,凭借笛卡儿、斯宾诺莎(Baruch Spinoza)和莱布尼茨的著作而繁荣起来。对理性主义的主要反对来

自经验主义,这种观点认为感觉经验,而不是纯理性,是知识的来源。经验主义可以追溯至亚里士多德,通过洛克(John Locke)、贝克莱(George Berkeley)、休谟(David Hume)和密尔这些英国作家而得到发展(见第4章,第1节)。经验主义传到了逻辑实证主义和维也纳学派,包括石里克(Moritz Schlick)、卡尔纳普(Rudolf Carnap)和艾耶尔(A. J. Ayer),并在今天仍活跃于范·福来森(Bas van Fraassen)和蒯因(W. V. O. Quine)的著作中。由于数学知识似乎是基于证明而不是观察,因此数学显然是经验主义主流观点的一个反例。事实上,数学有时被看作是先天知识——先于并独立于经验的知识——的范型。几乎每个经验主义者都最严肃地对待数学的挑战,他们中有些为了容纳数学而走得很远,有时把它扭曲得难以辨认(见Parsons 1983: 论文1)。

今天我们在所有学术领域都看到广泛的专业化。数学家和哲学家个人经常难以理解本系同事的研究工作。代数学家不能跟上分析中的发展;物理学哲学中的著作对大多数伦理学家来说不可理解。其结果是,在主流数学和主流哲学之间没有很多直接的和有意识的联系。然而,数学离认识论、形而上学、逻辑学、认知科学、语言哲学,以及自然和社会科学哲学这些哲学领域所关注的内容并不很远。而哲学离逻辑学、集合论、范畴论、可计算性,甚至分析和几何这些数学领域所关注的内容也不远。世界范围内的哲学系和数学系都教授逻辑学。

无论是好是坏,当代哲学中使用的很多技术和工具都是为了数学——只为了数学——而发展和磨炼出来的。逻辑学通过有代数思维的数学家布尔(George Boole)、施罗德(Ernst Schröder)、波尔查诺、弗雷格和希尔伯特而成长为一个繁荣的领域。他们毫不含糊地聚焦于逻辑和数学基础。通过逻辑我们拥有了模型论语义学。而通过后者有了对模态和认识论话语的可能世界分析。形式逻辑的语义学和演绎系统已经成为当代哲学全部议题和思虑的通用语言,这样



说一点都不夸张<sup>①</sup>。在某种意义上,很多分析哲学都尝试把逻辑在数学语言上的成功推广到自然语言和一般认识论上,这或许属于理性主义的传统。

有多种理由把数学和哲学联系起来。它们两个都属于为理解我们周围世界所做的最初的理智上的尝试,并且都或者诞生于古希腊或在那里经受了深刻的变革(这取决于什么被看作数学和什么被看作哲学)。第二,也更为核心的是,数学是哲学家一个重要的研究案例。很多当代哲学议事日程上的议题在聚焦于数学时都具有相当简明的表达。这包括与认识论、本体论、语义学和逻辑学相关的问题。我们已经注意到在数学推理成为焦点时逻辑学所取得的成功。哲学家对指称问题感兴趣:一个词项代表或表示一个对象,这是怎么回事?我们如何能把一个名字与其命名的东西连接起来?数学语言为这些问题提供了一个焦点。哲学家还对规范性问题有兴趣:一个人A被迫做行为B,这是怎么回事?当我们说某人应该做某事,如应该捐助慈善事业时,我们是什么意思?数学和数理逻辑至少提供了一种重要的,而且可能是简单的案例。逻辑比任何事情都规范。在什么意义上我们被要求在研究数学时要遵循正确推理的标准原则?柏拉图建议他的学生们要从相对简单和直接的事例出发<sup>②</sup>。也许数理逻辑的规范性正是这样的事例。

数学与哲学相联系的第三个理由存在于认识论——对知识的研究中。数学是极其重要的,因为它几乎在所有以理解物质世界为目

---

① 有些患有“数学焦虑症”的学生被哲学所吸引,因为它位于人文学科中——远离科学。可他们沮丧地发现大多数学校要求主修哲学的本科生必修数理逻辑的课程。考虑到形式语言在许多当代哲学文献中所扮演的角色,这一要求是合理的。另一方面,科学与工程的学生,也许患有所谓的“人文逃避症”,很高兴学习逻辑课程,有时可以算作他们的人文必修课。

② 在1967—1969年的夏天,我有幸参加了NSF\*在俄亥俄州立大学为中学生举办的暑期数学项目。指导者罗斯(Arnold Ross)告诉我们要深入地思考简单的事情。这对数学家和哲学家都是好的建议。

\* 美国国家科学基金会(National Science Foundation, NSF)。——编辑