

陈永明名师工作室 著

数学教学中的 逻辑问题

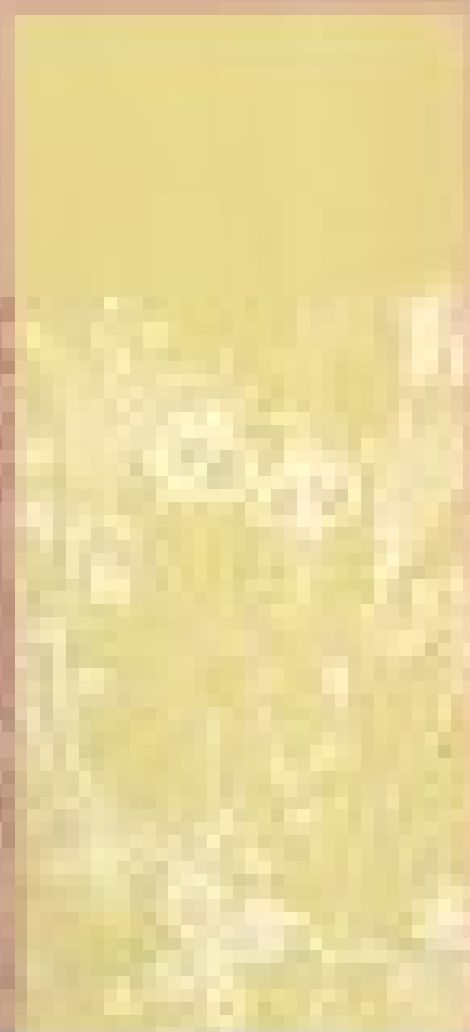
上海科技教育出版社



《中国数学教育》编辑部 编

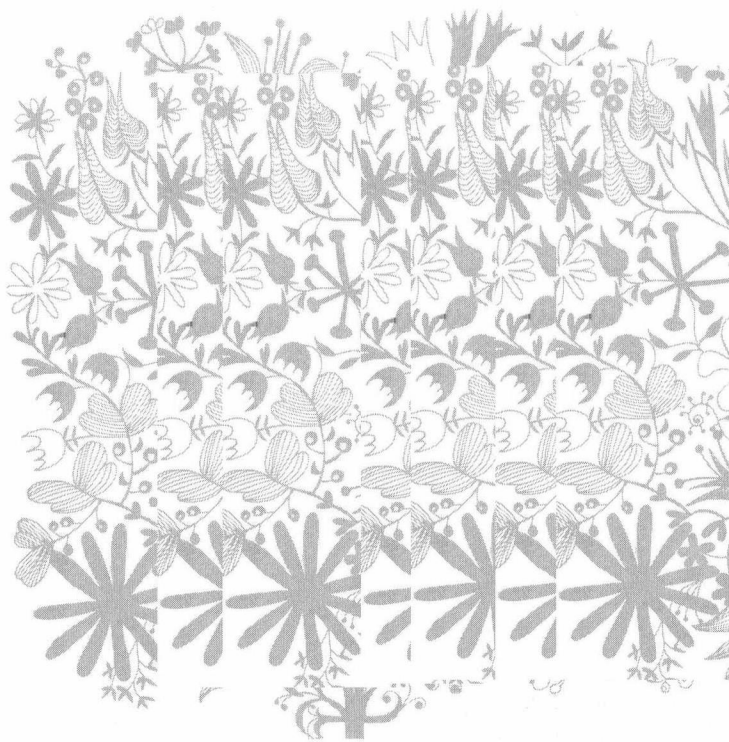
数学教学中的 应用问题

《中国数学教育》编辑部 编



数学教学中的逻辑问题

陈永明名师工作室 著



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学中的逻辑问题/陈永明名师工作室著.
—上海:上海科技教育出版社,2009.4

ISBN 978-7-5428-4820-8

I. 数… II. 陈… III. 数学课—教学研究—中学
IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 040614 号

责任编辑:冯晨阳

封面设计:汤世梁

数学教学中的逻辑问题

陈永明名师工作室 著

出版发行:上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

网 址: www.ewen.cc
www.sste.com

经 销:各地新华书店

印 刷:常熟市华顺印刷有限公司

开 本:787×1092 1/16

字 数:430 000

印 张:17.75

版 次:2009 年 4 月第 1 版

印 次:2009 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1—3200

书 号:ISBN 978-7-5428-4820-8/O·606

定 价:35.00 元

作者队伍介绍

陈永明名师工作室于 2008 年 3 月经上海市徐汇区教育局授牌成立,主要从事基础教育数学教学研究。工作室的指导方针是:搭建舞台,自主发展;兼顾教学和研究,侧重研究。

工作室成立以来,一直坚持以教学实践为基础,研究课堂的有效教学,取得了一定成绩;在教学方面,有 10 人开了展示课,其中 4 人到兄弟省市开课,得到了好评,显示“课内高密度,课外轻负担”的一堂展示课更是得到了上海教育学会和上海市教育督导室领导的高度赞扬;在研究方面,出版专著 2 种,有近 10 篇论文在省市级以上杂志上发表,其中有 2 篇论文获全国高等师范院校数学教育研究会 2008 年会论文评比一等奖。

本书执笔人:

- 陈永明 1940 年生,江苏无锡人,教授,政府特殊津贴获得者,现任上海市徐汇区教学指导团团长。
- 陶焯昕 上海市位育中学高级教师,硕士。
- 傅琳 上海市梅园中学教导主任,硕士。
- 徐卫文 上海市第四中学教导主任。
- 张珺 上海市南洋模范中学高级教师,硕士。
- 沈为民 上海市零陵中学高级教师。

内 容 提 要

本书介绍了逻辑基本知识以及数学教学中有关的逻辑问题,本书有两个特色:一是打破了数学教育界里的“数理逻辑无用论”的误区,把数理逻辑的最基础的知识引进来.二是研究了数学特有的逻辑现象,有涉及逻辑的习题的解法研究和涉及逻辑的数学课教学研究.

本书分三篇.第一篇是逻辑基础知识篇,分别讲述概念、判断、推理、论证等,其中包括数学里的特殊逻辑现象,如“抽屉原理、平均值原理和零积原理”,“一致型命题和特殊值法”等.第二篇是习题篇,主要研究涉及逻辑知识比较多的数学习题(本书暂把它叫做“涉逻”习题)的解法研究,如“存在问题的解法”,“‘恒成立’问题的解法”.第三篇是数学中逻辑知识的教学研究和教学案例.

本书可供中学数学教师学习参考.

序

学逻辑,用逻辑,研究数学中的逻辑

数学离不开逻辑,这是大家的共识,因此,数学教师毫无异议的应该具有比较良好的逻辑素养.有一段时间里,好多大学校长是数学家,就是中学里,也是有好多名校的校长是数学教师.这说明,学数学的人,有一种特殊的优势,而思考问题时逻辑性比较强,可能是这种优势的一个主要方面.笔者还注意到,好多中学里,数学教研组往往是最团结,最和谐的.其原因可能是因为在数学里,答案是用逻辑推理得到的,对就是对,错就是错,因此,哪位老师行,哪位老师不太行,标准比较客观,这样,“文人相轻”的现象就比较少了,于是就比较容易达到认识的统一,进而形成集体的团结.

但是,由于我国从基础教育到高等教育,学生都没有完整地学过逻辑学,甚至师范大学数学系的大部分学生也没有学过逻辑学,所以,中学数学教师的逻辑知识是不完整的.即使学习过一点逻辑知识,有的是从语文课里学到的“形式逻辑”(现在常称为传统逻辑),没有数学特色;有的是从大学选修课数理逻辑里学到的,过于艰深,不经过自己的消化和摸索,很难用到自己的教学中去.所以中学数学教师的逻辑知识掌握得并不完美.正因为中学数学教师的逻辑知识掌握得不完整,不完美,笔者在1990年曾经发表过《从数学教师几种流行说法看学点逻辑的必要性》^①和《从一道高考题的错证看学点数理逻辑的必要性》^②两篇文章,呼吁中学数学教师要学点逻辑.

在中学生中,问题更为严重.根据我们的调查,中学生对数学化语言的掌握,问题最严重的就是涉及“每一个”、“有一个”、“充分”等有关逻辑的词^③.

那么,我们应该掌握哪些逻辑知识?怎样学习逻辑知识呢?完完整整地学习逻辑学理论固然好,但是,这样做要花费很多时间和精力.比较有效的做法是,学习一些和数学教学紧密相关的逻辑知识.

数学在使用逻辑方面有它独特的地方,从中学数学而言,至少有以下几点:

第一,在进行数学推理时,只能用演绎法和完全归纳法,而不能用实验、不完全归纳与类比,更不能以某某伟人的话作为推理的依据.这样说,并不是贬低实验、不完全归纳与类比的作用.毛泽东曾经说过,要学点逻辑,但同时又说,逻辑是得不

① 陈永明.从数学教师几种流行说法看学点逻辑的必要性.数学通报,1990,3

② 陈永明.从一道高考题的错证看学点数理逻辑的必要性.数学教学,1990,1

③ 陈永明,阮夏丽等.数学教学中的语言问题(修订版).上海:上海科技教育出版社,2009

出新东西的,因为逻辑推得的结论其实都蕴涵在前提里了.实验、不完全归纳与类比,这些方法在人类发展中起到了极大的作用,在数学教学中也有很大作用.课程改革所大力提倡的探究性学习,就离不开这些方法.

第二,既然数学强调演绎推理,那么论证就有个依据问题.一个A论题的依据是B,B的依据又是C,⋯,打破砂锅问到底,最后的依据是什么呢?数学里是采用公理化体系的办法来处理.这和其他学科完全不同.

第三,从微观上说,数学里的命题结构特别复杂;数学里强调定义的作用,它是讨论问题的出发点;数学中引进变元,但又使用自然语言(特别在中学数学教学中),所以在表达上处于“半形式化”状态;数学里还有一些特别有“逻辑味”的论题和习题,譬如,“一致型命题”、“平均值原理”、“存在问题”、“恒成立问题”……

鉴于数学中的逻辑有这么多的特点,因此希望大家都来学点逻辑,特别要学习与数学相关的逻辑知识,用逻辑研究和数学相关的逻辑问题.研究数学特有的逻辑现象,这个工作对中学数学教师来说很重要.笔者早年曾经对此做了一点工作:发表过一些论文,提出了“一致型命题”和“平均值原理”等原创性的观点^{①②};对含逻辑知识的数学课的教学进行了研究^{③④⑤},还做了一个试验^⑥;主编过比较强调系统性的《数学教学逻辑》(上海市中学数学教师继续教育教材)^⑦.本书想以数学教师关心的问题为出发点,专题式地展开,这样可大大增加可读性.

本书的编写宗旨,一是介绍一般的逻辑知识,包括数理逻辑的最基础的知识.传统逻辑通常讲概念、判断、推理、论证;数理逻辑包括命题演算和谓词演算两部分.两者难以融合.我们采取了“拿来主义”的态度,根据数学教师的需要,在传统逻辑和数理逻辑中选择有用的部分.历来在数学教育界有个误区,那就是“数理逻辑无用论”:数理逻辑对中学数学来说是没有用的.其实数理逻辑中的最基础的知识,譬如,量词“每一个”和“有一个”,中学数学里经常在使用.把数理逻辑的最基础的知识引进来,是本书的一个特色.

二是作为数学,在使用逻辑方面有自己的特点.本书在研究数学特有的逻辑现象方面,在涉及逻辑的习题的解法研究方面,在涉及逻辑的数学课教学研究方面,作进一步的努力.这是本书的又一个特色,并且是最重要的特色.

本书分三篇.第一篇是逻辑基础知识篇,分别讲述了概念、判断、推理、论证等,其中包括数学里的特殊逻辑现象,如“抽屉原理”、“平均值原理和零积原理”与“一致型命题和特殊值法”等.第二篇是习题篇,主要研究涉及逻辑知识比较多的数学

① 陈永明.一致性命题和赋值法.数学通报,1990,12

② 陈永明,毛之阶.平均值原理.数学通报,1992,7

③ 陈永明.“命题的否定”的作用和求法.数学教学,1991,5

④ 陈永明.逻辑量词“每一个”和“有一个”.数学教学,1996,2

⑤ 陈永明.要重视在数学教学中运用必要的同义反复.上海中学数学,1990,2

⑥ 陈永明等.在高三学生中进行逻辑量词教学的实验.数学教育学报,1998,7

⑦ 陈永明主编.数学教学逻辑.上海:上海教育出版社,1994

习题(本书暂把它叫做“涉逻”习题)的解法研究,如“存在性问题的解法”、“‘恒成立’问题解法”等.第三篇是“涉逻”的数学内容的教学研究和教学案例.

本书的对象是中学数学老师,为了让初中高中数学老师各有所得,其中涉及高中数学的知识和例题都用仿宋体印刷.有些内容比较艰深,特用小字号排印,供有兴趣的读者阅读.愿这本书能够给读者,特别是初登讲台的青年教师有所帮助.

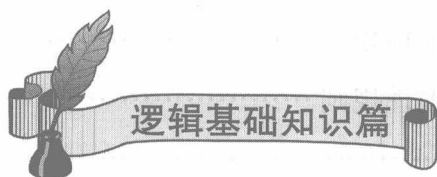
需要说明的是,本书的作者都不是逻辑学家,在逻辑方面一定有不到位的地方,敬请逻辑专家、数学教育专家和广大数学教师指正.

陈永明

于上海徐汇区教师进修学院

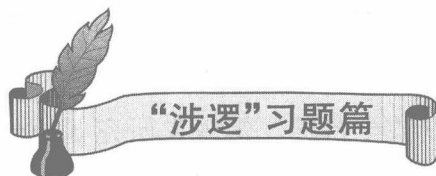
2008年10月

目 录 MULU

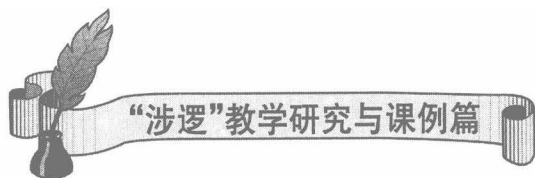


1-1	概念	3
1-2	给概念下定义	7
1-3	重视定义的必要性(数学特殊逻辑现象研究 1)	13
1-4	原始概念的处理(数学特殊逻辑现象研究 2)	16
1-5	概念的划分	18
练习一		24
1-6	命题	29
1-7	复合命题	32
1-8	复合命题的否定	42
1-9	命题四种形式(数学特殊逻辑现象研究 3)	46
1-10	充分条件、必要条件和充要条件	51
1-11	命题函数	55
1-12	全称命题	58
1-13	特称命题	62
1-14	抽屉原则、平均值原理和零积原理(数学特殊逻辑现象 研究 4)	65
1-15	全称命题和特称命题的否定	69
1-16	至多、至少命题和存在唯一命题及其否定	72

1-17	多元命题	76
1-18	一致型命题和特殊值法(数学特殊逻辑现象研究 5)	80
练习二		84
1-19	推理	89
1-20	不涉及命题结构的推理规则	93
1-21	一元命题的推理规则	100
1-22	多元命题的推理规则	105
1-23	三段论	108
1-24	证明和解答	113
1-25	反证法(数学特殊逻辑现象研究 6)	119
1-26	同一法(数学特殊逻辑现象研究 7)	131
1-27	数学归纳法(数学特殊逻辑现象研究 8)	135
1-28	分析与综合(数学特殊逻辑现象研究 9)	147
练习三		155



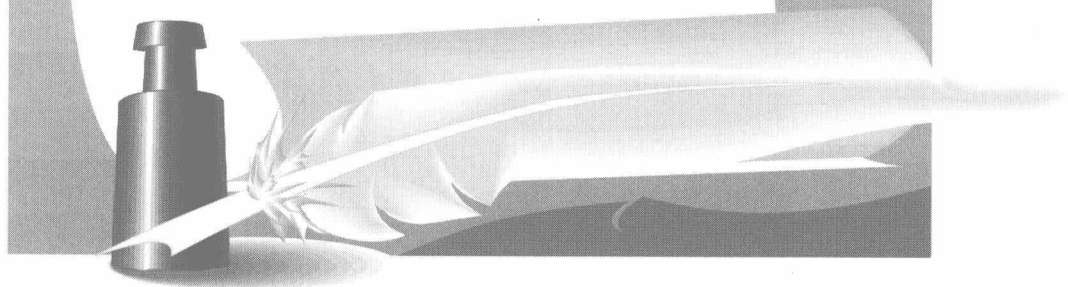
2-1	新定义问题	165
2-2	存在性问题的证明	174
2-3	“恒成立”问题的解法	181
2-4	反推和反面扣除	198
2-5	选择题解法研究	206
2-6	分类讨论	213



3-1	定义语言的分析与正反举例	223
3-2	分辨容易混淆的概念	226
3-3	重视概念间的联系	233
3-4	突出量词,并早期渗透	236
3-5	突出“否定”	239
3-6	重视必要的同义反复	242
3-7	数学证明和解答中的常见错误	247
3-8	零指数幂(教学实录)	252
3-9	有理数的复习(一)(教学实录)	255
3-10	四种命题的关系(一)(教学实录)	257
3-11	“由特殊到一般的数学思想方法”(教学实录)	260
3-12	分类讨论思想的运用(教学实录)	263
3-13	“数学归纳法”(教学实录)	270

逻辑基础知识篇

LUO JI JI CHU ZHI SHI PIAN



1-1 概念

传统逻辑认为,概念是反映客观事物的本质属性的思维形式.譬如,数学里的“角”、“三角形”、“方程”、“正弦函数”等都是些概念.

有时概念用一个专用名词表达出来,这叫做概念的命名.上面说的“角”、“三角形”、“方程”、“正弦函数”就是一些专用名词.这些专用名词是根据实际需要产生出来的,他们能简洁地表达一个概念.这种专用名词,还包括专用符号在内,如 $\tan x$ 、 $\in$ 等.

有时一个概念不需要,或者还没有人把它抽象成一个专用名词,就是说还没有命名,这时往往可用一个词组来表示,如

“有一个内角是直角的四边形”、

“有且只有一对内角相等的四边形”.

我们可从两个方面来研究概念——概念的内涵和外延.

一个概念所反映的事物的本质属性的总和就是这个概念的内涵.所以,内涵反映的是概念的质.譬如,“三角形”这个概念反映的是怎样的事物呢?就是说“三角形”这个概念的内涵是什么呢?它反映了一个平面图形,是由直线段组成的,是由三条直线段组成的,而且是这三条直线段两两首尾相接组成的,正是由于这些特征,才使“三角形”这个概念不同于“四边形”、“五边形”这些概念.

一个概念所反映的事物的范围,就是这个概念的外延.所以,外延反映的是概念的量.“三角形”这个概念所反映的是哪些事物呢?或者说“三角形”这一概念的外延是什么呢?它可以包括直角三角形、等腰三角形,还可以包括边长为 3 cm、4 cm、6 cm 的三角形……外延是空集的概念,叫虚概念.

一般地说,内涵越多,外延就越小;反之,内涵越少,外延就越大.传统逻辑把这一特性称为内涵和外延的反变关系.

以前的传统逻辑在讨论概念时,较重视内涵,之后,布尔开始强调外延,这是逻辑史上的一个重要事件.从外延角度来分析概念,此时就可以把一个概念看作一个集合,并把概念“三角形”的外延记为 $\{x|x \text{ 是三角形}\}$,或 $\{\text{三角形}\}$ 等.这样集合间的关系和运算就可以运用到概念上面去.

我们关注一般的逻辑知识,还应特别关注数学和数学教学中使用逻辑知识的特殊性。

就我们目前的认识,数学概念至少有以下几个特点:

◆ 重视存在性

外延是空集的概念叫虚概念(或称为空概念)。例如,“内角和等于 360° 的五边形”是不存在的,所以称为一个虚概念。

数学特别重视概念的存在性。数学发展史上曾为“虚数”的存在性问题争论过,类似的争论有好几次。可见,一个概念一时弄不清它的存在性,就会引起数学界的震动。

在数学研究中,常采用“存在性抽象”,也就是先假设某种概念存在(如无理数、虚数),然后发展成一套新的数学理论。之后,再去寻找这些概念的合理解释。

在中学数学中,我们也常常讨论存在性,如果所涉及概念根本不存在,这个问题就没有讨论下去的必要了。

忽视概念的存在性,则会导致种种错误。如

有人在求式子 $\frac{9-9}{3-3}$ 的值时,采用了两种不同的解法。

$$\begin{aligned}\text{解法一: } \frac{9-9}{3-3} &= \frac{3(3-3)}{3-3} \\ &= 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法二: } \frac{9-9}{3-3} &= \frac{(3+3)(3-3)}{3-3} \\ &= 6.\end{aligned}$$

你认为哪一种解法是正确的?

其实,都不正确。因为 $\frac{9-9}{3-3}$ 的分母为 0,整个式子根本没有意义,也就是说 $\frac{9-9}{3-3}$ 是不存在的概念。

在历史上曾有过对于下述数列和的一些争辩:

$$1-1+1-1+1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

$$\begin{aligned}\text{解法一: } & 1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 0+0+0+\cdots \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法二: } & 1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots \\ &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots \\ &= 1-0-0-0-\cdots\end{aligned}$$

$$= 1.$$

解法三： 令 $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$,
 则 $S = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots}{2S = 1},$

$$\therefore S = \frac{1}{2}.$$

解法四： 把 1 除以 $1+x$, 得

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots.$$

令 $x = 1$, 得

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots = \frac{1}{2}.$$

其实, 这四种解法都不正确, 其基本原因是式子 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ 是发散级数, 不存在和. 第四个展开式当且仅当 $|x| < 1$ 时成立.

可见, 数学概念不能只看形式, 还要看它的实质, 式子 $\frac{9-9}{3-3}$ 及 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 虽有形式, 但实质上是不存在的. 忽视了概念的存在性, 有时就会引出种种错误. 然而, 目前中学数学教学中常常会出现一些怪题, 只讲究技巧, 而不考虑概念的存在性, 譬如

例 求 $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \cdots}}}$

解 设 $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \cdots}}} = A,$

两边平方, 得

$$1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \cdots}}} = A^2,$$

即

$$1 - A = A^2.$$

解得

$$A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (负舍去).}$$

其实, 第一步设 $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \cdots}}} = A$, 就等于默认了这个值存在, 这是没有根据的. 第二步对无穷的根式两边平方, 还能不能沿用有限情况下的性质, 也是没有根据的. 这类题目的解法, 看起来很巧妙, 但是对学生的思维会起到极大的负