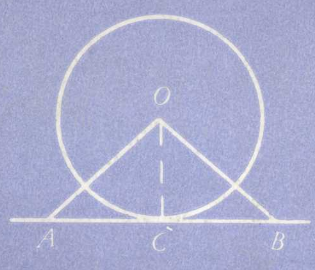
中学数学课本辅导丛书

初中几何第二册学习指导

邢清泉 魏超群 编



辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

初中几何第二册学习指导

邢清泉　魏超群　编

辽宁教育出版社

一九八六年·沈阳

初中几何第二册学习指导

邢清泉　魏超群　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：120,000　开本：787×1092 1/32　印张：5 7/8
印数：1—29,500
1986年11月第1版　1986年11月第1次印刷

责任编辑：杨　力　　责任校对：王淑芬
封面设计：周咏红　　插　　图：潘智倩

统一书号：7371·307　　定价：0.72 元

出 版 说 明

提高学生的自学能力，是时代对人材培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本丛书的主编工作，并同钱永耀同志一起审阅了全部初稿。

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，逐章逐节逐个问题地进行剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每个单元都配有巩固基本知识的思考与练习，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

目　录

第六章 相似形

同学们在这一章要学习的，仍然属于直线形的内容，然而它比以前学过的内容深入了，发展了，是专门研究平面图形的形状关系，讨论直线形中另一个重要性质：相似．这一章我们所要学习的知识结构是：

- 相似形
  - 比例线段
    - 比例
    - 比例线段
    - 平行线分线段成比例定理
    - 三角形中平行线段的判定
    - 三角形角平分线的性质
  - 相似三角形
    - 相似三角形
    - 三角形相似的判定
    - 相似三角形的性质
    - 直角三角形中成比例的线段
    - 相似多边形
  - 位似图形和它的实际应用（选学）

一 比例线段

（一）内容简介

在这一单元里，同学们主要是学习比例的性质；什么叫

做两条线段的比和比例线段；平行线分线段成比例定理；三角形中平行线段的判定；三角形角平分线的性质．这些内容都是为大家学习相似形做准备的，是学习相似形的基础理论知识．在这些知识中，比例的性质是个关键的内容，两条线段的比是个基本的概念．平行线分线段成比例定理，是研究相似形最重要、最基本的理论，因此是我们学习的重点．

（二）学习指导

从“比例线段”这个标题，同学们会联想到过去学过的什么知识呢？自然会联想到在小学数学中学过的成比例的数，就是说两个数的比，四个数所成的比例．数的比和比例的概念以及它们的性质，是学习线段的比和比例的理论基础，而线段的比和比例则是数的比和比例的发展．另外，我们在第一册第四章学过的平行线等分线段定理和在这个单元里所要学习的平行线分线段成比例定理之间，也有着同样的关系．因此，大家学习这个单元，一定要随着课本注意温习、回忆过去学过的有关知识．

6·1 比例

同学们想一想，为什么这节课本一开始，就出现两幅大小不同的我们伟大祖国的地图呢？这两幅地图，大小不同，但形状相同．这一章就是要研究这些形状相同的图形之间的关系．就是说，通过这两幅大小不同，形状相同的地图，启示我们先学比例及比例线段，是为了研究这些形状相同的图形之间的关系．

1．比例式的字母表示形式

把用数表示的比例式写成$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$a:b=c:d$的形式，更

有普遍意义（以后会学到，比例式中的a、b、c、d也可以代表线段）.

【注意】　上面比例式中的a、b、c、d都不等于零. 大家想一想，为什么？

2．比例中项

这个概念在小学数学中没有讲到，它的特点是，比例中的两个比例内项相等，这样位置上的比例内项称为两个比例外项的比例中项. “比例中项”这个概念很重要，以后常用到，大家一定要把它的特点搞清楚.

3．推理符号

在第一册中，逻辑推理是采用叙述的形式. 从第二册开始采用推理符号“$\Longrightarrow$”和“$\Longleftrightarrow$”进行逻辑推理，这样可以使推理过程更加简明. 因此，采用推理符号进行推理，是个进步，是知识更新. 同学们要尽快熟悉它的用法.

【注意】　推理符号“$\Longrightarrow$”表示由左端可以推出右端；“$\Longleftrightarrow$”表示左右两端可以互相推出.

4．比例的性质定理

1）文字：如果四个数成比例，那么两内项的积等于两外项的积；反之也成立.

2）式子：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$.

【注意】　①这是比例的基本性质.

②比例的基本性质的实质，是四个量之间的等比关系式与等积关系式可以互化. 大家想一想，代表每个量的字母有没有条件限制？

【引申】　1）由$ad=bc$可以导出以下八个比例式：

①$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；②$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；③$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；④$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$；⑤$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

⑥$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$；⑦$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$；⑧$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

2）把①式作为基本比例式，由①式也可以导出其它七种形式.

这种变换很有用处，同学们要熟练掌握. 课本例1之（1）就是运用〔引申〕1）推出的，即：$3a=4b\Longrightarrow\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$；例1之（2）就是运用〔引申〕2)推出的，即：$\frac{a}{5}=\frac{b}{7}\Longrightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$.

5. 合比性质

1）文字：如果四个数成比例，那么两个比的前项和后项的和（或差）对于各后项仍然成比例.

2）式子：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

【研究】 合比定理的证明，可以这样分析、思考：

要证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$,

即证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{b}\pm\frac{b}{b}=\frac{c}{d}\pm\frac{d}{d}$,

即 $\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$.

所以，证明时可由

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1\Longrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

6．等比性质

1）文字：如果若干个比相等，那么各个比的前项的和对于它们的后项的和的比，等于原来的比．

2）式子：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq0)\Longrightarrow$

$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$．

【注意】 ①课本中关于等比性质的证明方法是设比值的方法．这种证明方法具有一般性．

②等比性质也包括这种情形：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$ $(b-d-\cdots-n\neq0)\Longrightarrow\frac{a-c-\cdots-m}{b-d-\cdots-n}=\frac{a}{b}$，证明方法和课本中等比性质的证明方法相同．

【研究】 ①同学们互相研究一下，怎样用设比值的方法证明合比定理．

②例2之（2）的证明，可以联想等比性质先将求证结论$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-c}$变形为$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-c}$．于是再根据等比性质可得：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\end{array}\right\}\Longrightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}\Longrightarrow\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

6.2 比例线段

1．两条线段的比的概念

两条线段的比是两条线段的倍数关系，它表示一条线段是另一条线段的几倍或几分之几．以前大家学习的两条线段

的相等或不相等，是两条线段的相差关系．

【注意】 ①两条线段的比，内含条件是长度单位相同；比值一定是正数．

② 课本中为什么说，两条线段的比与所采用的长度单位没有关系呢？这是因为两条线段的比是用同一个长度单位度量两条线段所得的数的比，学习时一定要注意这一点．因此，同学们研究线段的比和比例时，不必考虑长度单位．

2. 比例线段的概念

比例线段是成比例线段的简称．线段的比是对两条线段说的，成比例的线段是对四条线段说的．因此，我们说四条线段成比例时，和四个数成比例一样，四条线段也是有顺序（位置）的，而且各个位置的线段的称呼和四个数成比例的称呼相同；具备的性质也相同．

【研究】 ①例 2 的解法，已知线段$AB=l$，……求 AC 的长，就是要求用 l 表示AC．因为 AC 是未知数，所以设 $AC=x$．再根据AC是AB和BC 的比例中项，列出一元二次方程 $x^2=l(l-x)$，解得$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx0.618l$．

这是用代数方法解几何问题，把几何和代数联系起来了．

②大家知道“黄金分割”的来历吗？一点把一条线段分成两部分，较长部分和全线段的比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，这个比在古代就被注意到了．人们认为把一条线段分成中外比，用所得的两条线段作邻边所成的矩形，看起来很美观；所以在绘图和建筑中，这个比常常用到．在乐器中，弦长的比等于这个比，也与和谐的音调有关．因此，分线段成中外

比在古代叫做黄金分割.

【注意】 作一条线段的黄金分割点有两种方法：一种是截取这条线段的0.618倍的点就是黄金分割点（近似）；另一种是课本中图6—4，根据勾股定理用尺规作图法截取黄金分割点.

6.3 平行线分线段成比例定理

1. 定理内容

1）图形：如图6—1.

2）文字：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

3）比例式：$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.

【变形】 图6—2也是平行线分线段成比例定理的情形，它的比例式仍是$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$；图6—3是平行线分线段成比例定理的特殊情形，它的比例式是$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF}$.

2. 推论

1）图形：如图6—4.

2）文字：平行于三角形一边的直线截其他两边，所得

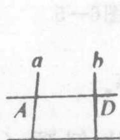


图6—1

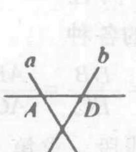


图6—2

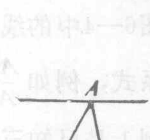


图6—3

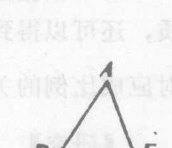


图6—4

对应线段成比例.

3）比例式：$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$或$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\text{或}\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

$$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\text{或}\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$$

【注意】 ①上述推论是把平行线分线段成比例定理应用到三角形中得出的．这个推论应用很多，同学们一定要熟练地掌握．

②大家在运用平行线分线段成比例定理和它的推论时，要特别注意“对应”的问题，不能乱比．如图6—4，只能是$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$（可以说成是“上比下等于上比下），而绝不能写成$\frac{AD}{DB}=\frac{EC}{AE}$．其他比例式也是这样．

③理解上述推论时，不管怎样变换三角形的图形位置，都能善于写出各个比例式才行（如图6—5，在$\triangle DEF$中，$MN\parallel EF$）．

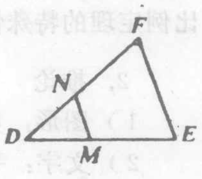


图6—5

④ 根据上述推论，利用比例性质，还可以得到图6—4中的线段的各种对应成比例的关系式，例如$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$等．

【研究】 例1是已知三条线段，求第四比例项（线段）．这是最基本的比例作图题．作法是根据平行线分线段成比例定理的推论，在平面上取一点组成一个角，再通过三角形中的线段比例关系得出所求作的第四条比例线段．课本

中的图6- 8，就和上面的图6—5相类似.

【发展】 例2的证明，应用了平行线分线段成比例定理的推论. 但推论中成比例的四条线段都在$\triangle ABC$的边上，而例2对于证明$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$的分析，着重指明$DE$不在$\triangle ABC$的边上，因此要发展自己的思路，必须通过平移的方法把DE移到$\triangle ABC$的BC边上，得$FC=DE$，于是可得到证题的思路，即通过作$DF\parallel AC$，得$DFCE$是平行四边形，再由证明$\frac{AD}{AB}=\frac{FC}{BC}$，而证得$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

【注意】 例2的结论可以当作定理用.

6·4 三角形一边的平行线的判定

1. 定理内容

1）图形：如图6—6.

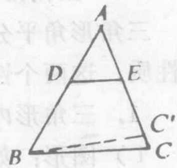


图6—6

2）文字：如果一条直线截三角形的两边，其中一边上截得的一条线段和这边与另一边上截得的对应线段和另一边成比例，那么，这条直线平行于第三边.

3）式子：$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow DE\parallel BC$.

【研究】 课本证明这个定理用这样一个思想：在已知条件下作一个和求证相反的假设，即设$DE\nparallel BC$，于是可作$BC'\parallel DE$，因而有$AC'\neq AC$. 但又结合已知条件可推出$AC'=AC$，彼此矛盾，因而否定原来的假设，从而肯定求证的结论. 这种思想渗透了一种新的证明方法，以后同学们可以学到.

2. 推论

1）图形：如图6—6.

2）文字：如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

3）式子：$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$或$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\parallel BC$.

【研究】 课本中的例题，它的证明思路在于从求证$AC\parallel A'C'$联想到$\triangle OA'C'$，AC是截$\triangle OA'C'$的两边OA和OC'的直线，因而需要证得$\frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}$或$\frac{OA}{AA'}=\frac{OC}{CC'}$，再根据上述推论可得$AC\parallel A'C'$.

6·5 三角形角平分线的性质

三角形角平分线的性质，有内角平分线性质和外角平分线性质，这两个性质定理都很重要.

1. 三角形内角平分线性质定理

1）图形：如图6—7.

2）文字：三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例.

3）比例式：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

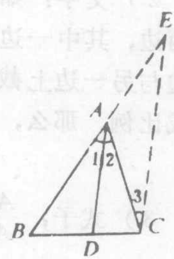


图6—7

【研究】 证明这个定理引辅助线是比较难的. 怎样想到过点C引AD的平行线呢？课本在“分析”中抓住了第四比例项这个关键，而在$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$中第四比例项$AC$在原图形位置上不能直接使问题得证，需要作出一个第四比例项代替它. 而D是AD在BC

上的一个截点，于是想到过点C作$CE \parallel AD$，交BA的延长线于E，可得BD、DC、BA的第四比例项AE，只要证明$AC=AE$就可以了，这样找到了证明的路子.

【注意】 ①课本讲了线段的内分点和外分点的概念，但区分一个点内分（或外分）一条线段所得的两条线段容易弄错. 正确的区分是，例如：在图6—8中，点C是线段AB的内分点，所得的两条线段分别是AC和BC. 在图6—9中，点E是线段BD的外分点，所得的两条线段分别是BE和DE. 这里要注意线段字母的顺序.

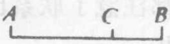


图6—8

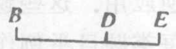


图6—9

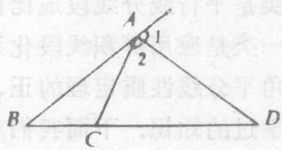


图6—10

②根据内分点定义，三角形内角平分线性质也可以说成：三角形内角平分线内分对边所成的两条线段和相邻两边成比例.

2. 三角形外角平分线性质定理

1）图形：如图6—10.

2）文字：如果三角形的外角平分线外分对边成两条线段，那么这两条线段和相邻的两边对应成比例.

3）比例式. $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$.

【注意】 ①对于这个定理，课本要求同学们自己写出证明. 虽然课本引出了辅助线，我们可以不看，自己联系证明三角形内角平分线性质定理时引辅助线的方法，独立地进