名门基训

联合重点中学的一线教师　打造名门教辅的优质品牌

高中总复习

MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN

名门基训

MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN-MINGMENJIXUN

- 整合教材
- 优化复习
- 同步教学
- 紧扣大纲

数学

内蒙古科学技术出版社

栏目说明

选择名门 成就梦想

为方便广大教师与考生的使用，本书将单元综合测试部分单独成册，单元测试完全按照一轮模拟试卷的形式设计题量，同时留出了合适的答题空间，并以8K活页的形式出现，与全书相得益彰。一书一卷、书卷结合、形式灵活、方便实用。

1书：全程复习讲解训练（16K） 1卷：一轮单元综合测试（8K）

整体设计与栏目导读

1	**知识梳理**	明确考点概念 梳理应试思路	打通学科知识通道 明确高考复习方向
2	**疑难突破**	解决疑点难点 预测最新考势	排疑解难指点迷津 直击考点明确目标
3	**典例剖析**	精析经典考题 知识拓展迁移	解剖高考命题技巧 掌握高考命题规律
4	**训练提升**	精编随堂测试 限时能力提升	学以致用夯实基础 训练思维举一反三
5	**活页测试**	精编细选综合试题 优化设计模拟测试	全面检测综合能力 着力提升应试技巧

《名门基训　高中总复习》（含一轮复习单元8K活页卷）是北京名门教育研究所组织全国一线教师共同研发的高中总复习精品系列丛书。本书自2004年问世以来，一直受到广大高考师生的高度认可，全国数百位特级教师总结多年教学经验，耗时五年，精心修订编著而成，其宗旨是：为广大考生解读考纲、探究考势、提炼考点、透析考题、直击高考。通过独具匠心的栏目设置，重在提高考生的学习能力和应试能力。

本套丛书在编写上有如下特色。

在编写理念上，本套丛书以人教社最新修订的高中教科书为蓝本，以2009年《考试大纲》为依据精心编写而成。由众多教改专家与一线资深教师全程参与编写，从备考方向到题型设置，从例题讲解到训练测试，紧随高考最新变化趋势，全面落实最新高考改革方案。

在体例设计上，本套丛书的栏目设置精练准确，切中高考命脉，实用高效。根据不同学科特点，设置了目标导航（主要考点）、知识梳理、疑难突破、典例剖析、高考在线、学法指导、训练提升众多栏目（具体学科有不同栏目设置）。将高考一轮复习脉络清晰地展现出来。

知识梳理部分，旨在明确概念，梳理思路。疑难突破部分旨在针对各章节知识中的难点疑点，进行排疑解难，对本部分考点重点分析解读，为考生拨云现日，预测考试方向。典例剖析部分是将经典例题、高考真题进行精准解析，解秘高考母题，追踪考点，深层次突破高考专题。训练提升部分，优选适量的基础题

及综合性、多元性的试题，意在培养考生的学科思想与悟性，使其对每一考点的复习落到实处，从而达到“实战演练，能力提升”的目的。

三、题源新颖，题型开放，密切关注社会焦点热点。

本套丛书所设计的复习策略科学新颖而富有实效，所提供的备考资源丰富新颖，所选编的例题、习题、试题都来自最新三年高考题和各地最新两年模拟题，重视练考与当今生产、社会生活实际和最新科技文化发展的密切联系，关注本学科内国际国内的热点问题和焦点问题。

四、形式灵活，科学实用的编写形式。

本丛书在编写形式上采用科学备考“1+1”的形式，即一本16K同步讲解、一本8K活页测试卷。它们功能各异，又互为补充：同步讲解，是实施师生互动的桥梁，精讲精练，便于师生灵活使用；活页测试卷，选题原则是：高考仿真性、务求实效性、综合启发性，旨在培养考生的应考能力。单独活页装订，在对本单元教与学的总结和检验，既可供教师作考试之用，又可供学生作自我检测之用。《名门基训　高中总复习》的编写具有很强的科学性和实用性。是学生备考的好伙伴，教师教学的好帮手。

丛书编委会

目 录

第一章　集合与简易逻辑 ······ (1)
第 1 讲　集合的概念 ······ (1)
第 2 讲　集合的运算 ······ (4)
第 3 讲　一元二次不等式和简单高次不等式的解法 ······ (7)
第 4 讲　含绝对值不等式和分式不等式的解法 ······ (10)
第 5 讲　命题 ······ (13)
第 6 讲　充要条件 ······ (15)
第二章　函数 ······ (17)
第 7 讲　映射与函数 ······ (17)
第 8 讲　函数的定义域 ······ (20)
第 9 讲　函数的值域 ······ (23)
第 10 讲　函数的奇偶性和周期性 ······ (26)
第 11 讲　函数的单调性 ······ (29)
第 12 讲　反函数 ······ (32)
第 13 讲　二次函数与方程、不等式 ······ (35)
第 14 讲　函数图象及其变换 ······ (38)
第 15 讲　指数与指数函数 ······ (41)
第 16 讲　对数与对数函数 ······ (44)
第 17 讲　函数的应用题 ······ (47)
第三章　数列 ······ (49)
第 18 讲　数列的概念与通项 ······ (49)
第 19 讲　等差数列 ······ (52)
第 20 讲　等比数列 ······ (55)
第 21 讲　数列的求和 ······ (58)
第 22 讲　简单的递推数列 ······ (61)
第 23 讲　数列的应用题 ······ (64)
第四章　三角函数 ······ (66)
第 24 讲　三角函数的概念 ······ (66)
第 25 讲　同角三角函数的关系与诱导公式 ······ (69)
第 26 讲　和角公式、二倍角公式 ······ (72)
第 27 讲　三角函数的求值 ······ (75)
第 28 讲　三角函数的化简与证明 ······ (78)
第 29 讲　三角函数的图象 ······ (80)
第 30 讲　三角函数的性质(一) ······ (83)
第 31 讲　三角函数的性质(二) ······ (86)
第 32 讲　三角函数的综合应用 ······ (88)
第五章　向量 ······ (91)
第 33 讲　平面向量的概念及运算 ······ (91)
第 34 讲　平面向量的坐标运算 ······ (94)
第 35 讲　平面向量的数量积 ······ (97)
第 36 讲　线段的定比分点与图象的平移 ······ (100)
第 37 讲　正、余弦定理与解三角形 ······ (103)
第 38 讲　三角形中的三角函数 ······ (106)
第 39 讲　平面向量的应用 ······ (108)
第六章　不等式 ······ (110)
第 40 讲　不等式的性质 ······ (110)
第 41 讲　均值不等式及应用 ······ (112)
第 42 讲　不等式的证明(一) ······ (115)
第 43 讲　不等式的证明(二) ······ (118)
第 44 讲　含参数不等式的解法 ······ (120)
第 45 讲　不等式的综合应用 ······ (123)

第七章　直线与圆的方程 …… (126)
第 46 讲　直线的方程 …… (126)
第 47 讲　两直线的位置关系 …… (129)
第 48 讲　对称问题 …… (132)
第 49 讲　简单的线性规划 …… (134)
第 50 讲　曲线与方程 …… (137)
第 51 讲　圆的方程 …… (139)
第 52 讲　直线与圆、圆与圆的关系 …… (141)
第八章　圆锥曲线方程 …… (143)
第 53 讲　椭圆 …… (143)
第 54 讲　双曲线 …… (146)
第 55 讲　抛物线 …… (149)
第 56 讲　直线与圆锥曲线 …… (152)
第 57 讲　与圆锥曲线有关的最值问题 …… (156)
第 58 讲　轨迹问题 …… (159)
第 59 讲　圆锥曲线的综合问题 …… (162)
第九章　直线、平面、简单几何体 …… (165)
第 60 讲　空间向量及其运算 …… (165)
第 61 讲　空间向量的坐标运算 …… (167)
第 62 讲　平面的性质 …… (169)
第 63 讲　空间直线 …… (172)
第 64 讲　直线与平面 …… (174)
第 65 讲　三垂线定理 …… (176)
第 66 讲　平面与平面的位置关系 …… (179)
第 67 讲　平行关系的证明 …… (182)
第 68 讲　垂直关系的证明 …… (185)
第 69 讲　空间角 …… (187)
第 70 讲　空间距离 …… (190)
第 71 讲　棱柱与棱锥 …… (193)
第 72 讲　正多面体与球 …… (197)
第十章　排列、组合和二项式定理 …… (200)
第 73 讲　两个计数原理 …… (200)
第 74 讲　排列、组合的概念与计算 …… (202)
第 75 讲　排列、组合的应用题 …… (204)
第 76 讲　二项式定理及其综合应用 …… (207)
第十一章　概率 …… (210)
第 77 讲　等可能事件的概率 …… (210)
第 78 讲　互斥事件有一个发生的概率 …… (213)
第 79 讲　相互独立事件同时发生的概率 …… (215)
第十二章　概率和统计 …… (218)
第 80 讲　离散型随机变量的分布列 …… (218)
第 81 讲　离散型随机变量的期望和方差 …… (220)
第 82 讲　抽样方法和总体分布的估计 …… (222)
第 83 讲　正态分布与线性回归 …… (225)
第十三章　极限 …… (228)
第 84 讲　数学归纳法及其应用 …… (228)
第 85 讲　数列的极限 …… (231)
第 86 讲　函数的极限与连续性 …… (234)
第十四章　导数 …… (237)
第 87 讲　导数及常见函数的导数 …… (237)
第 88 讲　和差积商的导数与复合函数的导数 …… (240)
第 89 讲　导数的应用(一) …… (243)
第 90 讲　导数的应用(二) …… (246)
第十五章　复数 …… (249)
第 91 讲　复数的概念及运算 …… (249)
参考答案 …… (251)

目　录

专题一　集合与简易逻辑 …… (1)

专题二　函　数 …… (5)

专题三　数　列 …… (9)

专题四　三角函数 …… (13)

专题五　平面向量 …… (17)

专题六　不等式 …… (21)

专题七　直线与圆的方程 …… (25)

专题八　圆锥曲线方程 …… (29)

专题九　直线、平面、简单的几何体 …… (33)

专题十　排列、组合和二项式定理、概率 …… (37)

专题十一　概率和统计 …… (41)

专题十二　极限、导数、复数 …… (45)

2010年数学高考模拟试卷(一)(理科用) …… (49)

2010年数学高考模拟试卷(一)(文科用) …… (53)

2010年数学高考模拟试卷(二)(理科用) …… (57)

2010年数学高考模拟试卷(二)(文科用) …… (61)

学习札记

第一章 集合与简易逻辑

第1讲 集合的概念

知识梳理 明确概念 梳理思路

1. 集合.

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，简称集.其中的每个对象叫做这个集合的元素.

2. 集合中元素的三要素：确定性、互异性、无序性.

3. 集合的表示方法有：列举法、描述法、韦恩图法.

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号里的方法.

描述法：用集合所含元素的共同特征表示集合的方法（即把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号里的方法）.

韦恩图法：画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合的方法.

4. 集合的分类.

有限集：含有有限个元素的集合.

无限集：含有无限个元素的集合.

空集：不含有任何元素的集合.

5. 常用数集.

N：非负整数集（自然数集）；$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$：正整数集；**Z**：整数集；**Q**：有理数集；**R**：实数集.

1. 元素与集合的关系有属于与不属于两种，分别用符号 $\in$ 和 $\notin$ 来表示.

2. 集合与集合的关系.

子集：集合 A 是集合 B 的子集是指集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.

任何一个集合是它本身的子集.

空集：是没有任何元素的集合，用 $\varnothing$ 表示.

集合相等：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素（即 $A\subseteq B$），同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素（即 $B\subseteq A$），则称集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

真子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A 的元素，则称集合 A 是集合 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$，且 $A\neq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$.

全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可看做一个全集，通常用 U 表示.

疑难突破 排疑解难 点拨预测

下列对象组成的集体：①接近于1的数；②平方后等于自身的数；③高中数学课本所有的难题；④中国的大城市.其中为集合的有哪些？

只有②能构成集合.根据集合元素的确定性①③④都不能构成集合.

你能指出下列集合的不同点在哪里吗？并且用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x\mid y=\sqrt{9-x^2},x\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $B=\{y\mid y=\sqrt{9-x^2},x\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $C=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2},x\in\mathbf{Z}\}$.

集合 A 和集合 B 都是数集，不同的是，A 中的元素是后面条件中的定义域的取值，B 中的元素是后面条件中的值域的取值；C 集合是点集.

所以 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{0,\sqrt{5},2\sqrt{2},3\}$，$C=\{(\pm3,0),(\pm2,\sqrt{5}),(\pm1,2\sqrt{2}),(0,3)\}$.

有人说元素与集合之间就用“$\in$”或“$\notin$”；集合与集合之间就用“$\subseteq$”或“$\subsetneqq$”，对吗？

不全正确.元素与集合的关系是“$\in$”或“$\notin$”：$1\in\{1,2,3\}$；而集合 $\{1\}\subseteq\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$，显然是错误的，答案应该是 $\{1\}\in\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$.所以并不是一碰到集合与集合就用“$\subseteq$”或“$\subsetneqq$”，其实可能用“$\in$”.

集合有三种表示方法：列举法、描述法、韦恩图法.它们的用途是什么？

列举法一般用来表示有限集或有规律可循的数集；描述法可用来表示有限集或无限集，但一般用来表示无限集；韦恩图法主要用来表示抽象集合.

若集合 A 中有 n（$n\in\mathbf{N}^*$）个元素，则 A 的子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数分别是多少个？

A 的子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个，非空子集有 (2^n-1) 个，非空真子集有 (2^n-2) 个.

对集合问题的考查体现出以下特点：

一是考查对集合基本概念的认识水平和理解水平，如集合的表示法、元素与集合的基本关系、集合与集合的基本关系；二是考查对集合知识的应用水平，注重考查集合语言与集合思想的运用、数形结合思想、分类讨论思想的运用；三是加大了对集合创新试题的考查.

学习札记

预计2010年高考中，其一会突出考查集合相等、子集等运算；其二也会将集合以工具的身份出现，问题涉及命题、映射、函数、方程、不等式、三角、向量等知识；其三，还会继续以考查集合的创新题为主.

典例剖析 经典解析 追踪高考

例1 请判断：①$0\subsetneqq\{0\}$，②$\mathbf{R}\in\{\mathbf{R}\}$，③$\varnothing\in\{\varnothing\}$，④$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$，⑤$\varnothing=\{0\}$，⑥$0\in\{\varnothing\}$，⑦$\varnothing\in\{0\}$，⑧$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，正确的有哪些？

解析：正确的有②③④⑧.①错误，因为0是集合$\{0\}$中的元素，应是$0\in\{0\}$；②③中都是元素与集合的关系；④⑧正确，因为$\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，而④中的$\{\varnothing\}$为非空集合；⑤⑥⑦错误，$\varnothing$是没有任何元素的集合.

例2 已知$A=\{1,2\}$，$B=\{x|x\in A\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$.则A与B的关系是______；A与C的关系是______.

解析：$B=\{x|x\in A\}=\{1,2\}$，

$C=\{x|x\subseteq A\}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，可知$A=B$，$A\in C$.当碰到这类问题时，一定要把其中的$x$取全.

例3 $x,y\in\mathbf{R}$，$A=\{a|a=x^2-3x+1\}$，$B=\{b|b=y^2+3y+1\}$，则集合A与B之间的关系为______.

解析：由$a=x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geqslant-\frac{5}{4}$，得$A=\left\{a\left|a\geqslant-\frac{5}{4}\right.\right\}$，

由$b=y^2+3y+1=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geqslant-\frac{5}{4}$，得

$B=\left\{b\left|b\geqslant-\frac{5}{4}\right.\right\}$

$\therefore A=B$.

例4 已知集合$A=\{x|x^2-3x-10\leqslant0\}$，集合$B=\{x|p+1\leqslant x\leqslant2p-1\}$，若$B\subseteq A$，则实数$p$的取值范围是______.

解析：先化简集合，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$，

若$B=\varnothing$，则$p+1>2p-1\Rightarrow p<2$.

若$B\neq\varnothing$，则$\begin{cases}p+1\leqslant2p-1,\\-2\leqslant p+1,\\2p-1\leqslant5\end{cases}\Rightarrow2\leqslant p\leqslant3$，

综上得知：$p\leqslant3$时，$B\subseteq A$.

例5 (1)已知$M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，$M=N$，求a、b的值；

(2)设集合$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，集合$B=\{1,5a-5,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+4,a^3+a^2+3a+7\}$，则是否存在$a\in\mathbf{R}$，使得$A\cap B=\{2,5\}$？若存在，求出实数$a$的范围；若不存在，请说明理由.

解析：(1)$\begin{cases}a=2a,\\b=b^2\end{cases}$或$\begin{cases}a=b^2,\\b=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2},\end{cases}$

把三组解分别代入M、N，可知$\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(2)设不存在这样的a.

$\because A\cap B=\{2,5\}$，

$\therefore5\in A$，故$a^3-2a^2-a+7=5\Rightarrow(a-2)(a^2-1)=0$，

$\therefore a=\pm1$或$a=2$，

当$a=-1$时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,-10,2,4\}$，而$A\cap B=\{2,4\}$，不符题意；

当$a=1$时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,0,5,12\}$，而$A\cap B=\{5\}$，也不符题意；

当$a=2$时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,5,5,25\}$，不符题意.

$\therefore$不存在这样的a.

追踪1 ('07·全国Ⅰ)设$a,b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则$b-a=$

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

解析：设$a,b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$.

$\because a\neq0$，有$a+b=0$，$a=-b$，

$\therefore\frac{b}{a}=-1$，$a=-1$，$b=1$，则$b-a=2$，选C.

追踪2 ('06·上海)已知集合$A=\{-1,3,2m-1\}$，集合$B=\{3,m^2\}$.若$B\subseteq A$，则实数$m=$______.

解析：由$m^2=2m-1\Rightarrow m=1$，经检验，$m=1$为所求.

追踪3 ('09·山东模拟)设集合$M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$S_1,S_2,\cdots,S_k$都是M的含两个元素的子集，且满足：对任意的$S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$$(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$，都有

$\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$($\min\{x,y\}$表示两个数$x$，$y$中的较小者)，则$k$的最大值是

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

解析：含2个元素的子集有15个，但$\{1,2\}$、$\{2,4\}$、$\{3,6\}$只能取1个；$\{1,3\}$、$\{2,6\}$只能取1个；$\{2,3\}$、$\{4,6\}$只能取1个，故满足条件的两个元素的集合有11个.

选B.

训练提升 夯实基础 提升能力

一、选择题

1. 下列表示错误的是

A. $\{a\}\in\{a,b\}$　　B. $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$

C. $\{-1,1\}\subsetneqq\{-1,0,1\}$　　D. $\varnothing\subsetneqq\{-1,1\}$

2. 设$M=\{x|x^2+x+2=0\}$，$a=\lg(\lg10)$，则$\{a\}$与M的关系是

A. $\{a\}=M$　　B. $M\subsetneqq\{a\}$

C. $M\supsetneqq\{a\}$　　D. $M\supseteq\{a\}$

3. 已知集合$M=\{x|x=a^2-3a+2,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x|x=b^2-b,b\in\mathbf{R}\}$，则$M$、$N$的关系是

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$

C. $M=N$　　D. 不确定

4. 设集合$P=\{m|-1<m\leqslant0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0,x\in\mathbf{R}\}$，则下列关系中成立的是

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\supsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=Q$

5. 满足$\{a\}\subsetneqq X\subseteq\{a,b,c\}$的集合$X$的个数是

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\in A,x\in \mathbf{N}^*\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$，则 A、B、C 之间的关系是________.

7. 设 $A=\{x|1<x<2\}$，$B=\{x|x>a\}$，若 $A\subsetneqq B$，则 a 的取值范围是________.

8. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{R}|ax^2+2x+1=0,a\in \mathbf{R}\}$ 只有 1 个元素，则 a 的值为________.

9. 设集合 $P=\{1,a,b\}$，$Q=\{1,a^2,b^2\}$，已知 $P=Q$，求 $1+a^2+b^2$ 的值.

10. 已知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求 a 的取值范围.

11. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\left|x-\frac{1}{2}(a+1)^2\right|\leqslant \frac{1}{2}(a-1)^2\right\}$，$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$. 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

学习札记

学习札记

第 2 讲　集合的运算

知识梳理　明确概念　梳理思路

1. 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

3. 补集：一般地，设 U 是一个集合，A 是 U 的一个子集（即 $A\subseteq U$），由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在全集 U 中的补集（或余集），记为 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

1. $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$，$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；
2. $\varnothing\subseteq A$ 且 $A\neq\varnothing\Leftrightarrow\varnothing\subsetneqq A$；
3. $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；
4. $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$；
5. $A\cup\complement_U A=U$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$；
6. $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$；
7. $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$；
8. $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；
9. $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；
10. $A\cup B=A\Leftrightarrow A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$.

疑难突破　排疑解难　点拨预测

如何理解交集和并集的含义？

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

也就是交集是取公共的部分，而并集取所有的部分.

已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为

A. $x=3,y=-1$　　　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　　　D. $\{(3,-1)\}$

解方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

故 $M\cap N=\{(3,-1)\}$，所以选 D.

因所求 $M\cap N$ 为两个点集的交集，故结果仍为点集，显然只有 D 正确.

一定要注意两个集合的交集或并集仍然为集合.

已知全集 $S=\{1,3,x^3-x^2-2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，如果 $\complement_S A=\{0\}$，求实数 x 的值.

$\because\complement_S A=\{0\}$，$\therefore 0\in S$ 且 $0\notin A$，即 $x^3-x^2-2x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=2$. 正确吗？

错误，正确解法为

$\because\complement_S A=\{0\}$，$\therefore 0\in S$ 且 $0\notin A$，

即 $x^3-x^2-2x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$，$x_3=2$.

当 $x=0$ 时，$|2x-1|=1$，不合题意，舍去；

当 $x=-1$ 时，$|2x-1|=3\in S$；

当 $x=2$ 时，$|2x-1|=3\in S$.

$\therefore$ 这样的实数 x 存在，是 $x=-1$ 或 $x=2$.

$\because\complement_S A=\{0\}$，$\therefore 0\in S$ 且 $0\notin A$，$3\in A$.

$\therefore x^3-x^2-2x=0$ 且 $|2x-1|=3$，$\therefore x=-1$ 或 $x=2$.

(1)已知集合 A、B 中的元素的个数，你能求出 $A\cup B$ 的元素个数吗？

(2)如果已知集合 A、B、C 中的元素的个数，你又能求出 $A\cup B\cup C$ 的元素个数吗？

符号 $\mathrm{Card}(A)$ 表示集合 A 中的元素的个数：

(1) $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$.

(2) $\mathrm{Card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)-\mathrm{Card}(A\cap B)-\mathrm{Card}(A\cap C)-\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C)$.

我们知道 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，那么 $\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap\complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow(\complement_U A)\cup B=U$ 成立吗？

成立，并且 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap\complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow(\complement_U A)\cup B=U$.

补集思想常运用于解决否定型或正面较复杂的有关问题.

如已知函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 上至少存在一个实数 c，使 $f(c)>0$，求实数 p 的取值范围.

至少存在一个的否定是一个也没有，先求 $f(c)\leqslant 0$，再求补集，解得 p 的取值范围为 $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$.

集合的概念和集合的运算在每年的高考中都有一道选择或填空题出现，而集合的运算考查的比重也比较大，对最近三年高考的研究，考查交集的运算比较多，还有交集和补集的混合运算及交并集的混合运算也比较多，而集合运算的创新试题的比重也在加大，像 2007 年广东定义了二元运算，陕西的“$\oplus$”运算.

典例剖析　经典解析　追踪高考

例1　已知 $A=\{x\mid x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$ 且 $A\cap B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，求 a，b 的值.

$A=\{x\mid -2<x<-1$，或 $x>0\}$.

设 $B=[x_1,x_2]$，由 $A\cap B=(0,2]$ 知 $x_2=2$，

且 $-1\leqslant x_1\leqslant 0$，　①

又由 $A\cup B=(-2,+\infty)$ 知 $x_1=-1$.　②

由①②知 $x_1=-1$，$x_2=2$，

$\therefore a=-(x_1+x_2)=-1$，$b=x_1x_2=-2$.

例2　已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，d 为公差且不为 0，a_1 和 d 均

为实数，它的前 n 项和记作 S_n，设集合 $A=\left\{\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)\middle| n\in\mathbf{N}^*\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x^2-y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\right\}$.

试问：下列结论是否正确？如果正确，请给予证明；如果不正确，请举例说明.

(1)若以集合 A 中的元素作为点的坐标，则这些点都在同一条直线上；

(2)$A\cap B$ 至多有一个元素.

(1)正确. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，则 $\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}(a_1+a_n)$，这表明点 $\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)$ 的坐标适合方程 $y=\frac{1}{2}(x+a_1)$，于是点 $\left(a_n,\frac{S_n}{n}\right)$ 均在直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a_1$ 上.

(2)正确. 设 $(x,y)\in A\cap B$，则 (x,y) 中的坐标 x,y 应是方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a_1,\\ \frac{1}{4}x^2-y^2=1\end{cases}$ 的解.

由方程组消去 y 得：$2a_1x+a_1^2=-4$.

当 $a_1=0$ 时，方程①无解，此时 $A\cap B=\varnothing$；

当 $a_1\neq0$ 时，方程①只有一个解 $x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1}$，此时，方程组也只有一解 $\begin{cases}x=\frac{-4-a_1^2}{2a_1},\\ y=\frac{a_1^2-4}{4a_1},\end{cases}$ 故上述方程组至多有一解.

∴$A\cap B$ 至多有一个元素.

例3　集合 $P=\{-1,0,1\}$，集合 $Q=\{0,1,2,3\}$，定义 $P*Q=\{(x,y)\mid x\in P\cap Q,y\in P\cup Q\}$，则 $P*Q$ 的元素的个数为

A. 4　　B. 7　　C. 10　　D. 12

由条件中的新的定义 $P*Q=\{(x,y)\mid x\in P\cap Q,y\in P\cup Q\}$，知 $x\in P\cap Q$，$y\in P\cup Q$，而 $P\cap Q=\{0,1\}$，$P\cup Q=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $P*Q$ 点集中的横坐标有两个元素可选，而纵坐标有 5 个可选择，所以集合 $P*Q$ 的元素有 $C_2^1C_5^1=10$ 个. 故选 C.

追踪1　('07·山东)已知集合 $M=\{-1,1\}$，$N=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $M\cap N$ 等于

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1\}$

C. $\{0\}$　　D. $\{-1,0\}$

$N=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right\}=\{-1,0\}$，选 B.

追踪2　('07·陕西)已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-3|<2\}$，则集合 $\complement_UA$ 等于

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{1,5\}$　　D. $\{5\}$

$A=\{2,3,4\}$，$\complement_UA=\{1,5\}$，选 C.

追踪3　('07·湖北)设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x\mid x\in P$，且 $x\notin Q\}$. 如果 $P=\{x\mid \log_2x<1\}$，$Q=\{x\mid |x-2|<1\}$，那么 $P-Q$ 等于

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant1\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

先解两个不等式得 $P=\{x\mid 0<x<2\}$，$Q=\{x\mid 1<x<3\}$. 由 $P-Q$ 定义，可知选 B.

追踪4　('06·全国Ⅱ)设 $a\in\mathbf{R}$，二次函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$，若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x\mid 1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

当 $a=0$ 时，不符题意，$a\neq0$，令 $f(x)=0$ 解得其两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，

由此可知 $x_1<0$，$x_2>0$.

①当 $a>0$ 时，$A=\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，

即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\frac{6}{7}$.

②当 $a<0$ 时，$A=\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，

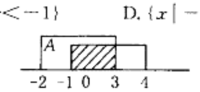
即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$.

综上，使 $A\cap B=\varnothing$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

追踪5　('08·北京)已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant3\}$，$B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，那么集合 $A\cap(\complement_UB)$ 等于

A. $\{x\mid -2\leqslant x<4\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant3$ 或 $x\geqslant4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<-1\}$　　D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant3\}$



$\complement_UB=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant4\}$，

∴$A\cap\complement_UB=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant3\}$.

选 D.

训练提升　夯实基础　提升能力

1. 已知集合 $M=\{x\mid x^2<4\}$，$N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N$ 等于

A. $\{x\mid x<-2\}$　　B. $\{x\mid x>3\}$

C. $\{x\mid -1<x<2\}$　　D. $\{x\mid 2<x<3\}$

2. 集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，则 $A\cap B$ 是

A. $(1,-1)$　　B. $\begin{cases}x=1,\\ y=-1\end{cases}$

C. $\{(1,-1)\}$　　D. $\{1,-1\}$

3. 设 M、N 是两个非空集合，定义 M 与 N 的差集为 $M-N=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin N\}$，则 $M-(M-N)$ 等于

A. N　　B. $M\cap N$　　C. $M\cup N$　　D. M

4. 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq0\}$

C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

5. 函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\in P,\\ -x,x\in M,\end{cases}$ 其中 P、M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非

学习札记

学习札记

空子集，又规定 $f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$. 给出下列四个判断：

①若 $P\cap M=\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$；

②若 $P\cap M\neq\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$；

③若 $P\cup M=\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$；

④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 4 个

二、填空题

6. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，那么 $A\cup(\complement_U B)=$

7. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ ______.

三、解答题

8. 记函数 $f(x)=\log_2(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N. 求：

(1)集合 M、N；

(2)集合 $M\cap N$、$M\cup N$.

9. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，若 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立，求实数 a 的值.

10. 若 $B=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，是否存在实数 a，使 $A=\{x|x^2-(a+a^2)x+a^3<0\}$ 且 $A\cap B=A$？请说明你的理由.

第3讲　一元二次不等式和简单高次不等式的解法

知识梳理　明确概念　梳理思路

一、基本解法

1. 一元一次不等式的解法.

一元一次不等式通过去分母、去括号、移项、合并同类项等同解变形均可化为 $ax>b$ 或 $ax<b$ 的形式.

$ax>b$ 的解集:

①当 $a>0$ 时,解集为 $\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$;

②当 $a<0$ 时,解集为 $\left(-\infty,\frac{b}{a}\right)$;

③当 $a=0$ 且 $b<0$ 时解集为 $\mathbf{R}$;

④当 $a=0$ 且 $b\geqslant0$ 时,解集为 $\varnothing$.

2. 一元一次不等式组($\alpha<\beta$)的解法.

① $\begin{cases}x>\alpha,\\x>\beta\end{cases}$ 的解集为 $(\beta,+\infty)$;② $\begin{cases}x<\alpha,\\x<\beta\end{cases}$ 的解集为 $(-\infty,\alpha)$;③ $\begin{cases}x>\alpha,\\x<\beta\end{cases}$ 的解集为 (α,β);④ $\begin{cases}x<\alpha,\\x>\beta\end{cases}$ 的解集为 $\varnothing$.

3. 一元二次不等式的解法.

步骤:①先化为 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$,且 $a>0$ 的形式;

②求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根;

③写出解集.

4. 简单的高次不等式的解法——数轴标根法.

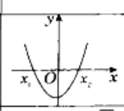
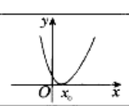
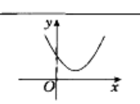
步骤:①先把不等式化成一边是0,一边是一次因式的积或商且一次项的系数要为正;

②在数轴上标根(注意"实点""空点"),再穿线(注意"穿奇不穿偶");

③写出解集.

二、基本关系

三个"二次"之间的关系:二次函数、一元二次不等式和一元二次方程是一个有机的整体,要深刻理解它们之间的关系,运用函数方程的思想方法将它们进行相互转化,才是准确迅速答题的关键.二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根即为不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0)解集的端点值,也是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象与 x 轴的交点的横坐标.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$			
方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	无解
$ax^2+bx+c>0$ 的解	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq x_0$	$x\in\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ 的解	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

疑难突破　排疑解难　点拨预测

一、概念辨析

不等式 $ax^2+2x+4>0$ 为一元二次不等式吗?

不一定.这种情况要讨论:

当 $a=0$ 时,原不等式为 $2x+4>0$,可知为一元一次不等式;当 $a\neq0$ 时,不等式 $ax^2+2x+4>0$ 为一元二次不等式.

所以以后我们碰到二次项系数是字母的时候一定要记得讨论.

二、疑难点拨

(1) $ax^2+bx+c>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\\Delta<0;\end{cases}$

(2) $ax^2+bx+c<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\\Delta<0\end{cases}$ 对吗?

错.

(1) $ax^2+bx+c>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\\Delta<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b=0,\\c>0;\end{cases}$

(2) $ax^2+bx+c<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\\Delta<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b=0,\\c<0.\end{cases}$

三、方法点拨

一元二次不等式的解法有规律可寻吗?

有.

①首先化为标准式:$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$.

②大于0时,则大于大根或小于小根;小于0时,则大于小根且小于大根.

四、高考展望

不等式的解法是每年高考的必考内容.解不等式的应用非常广泛,如求函数的定义域、值域,求参数的取值范围等.主要以选择题、填空题为主,题目小巧灵活、常考常新.偶尔也出现在解答题中,主要以集合的运算和充分必要条件背景出现考查不等式的解法,也考查含有参数的不等式的解法,如2006年的全国Ⅱ卷.不等式的解法更多的是以工具的身份出现,内容涉及集合、函数、方程、数列、导数、三角、解析几何、平面向量等知识.

典例剖析　经典解析　追踪高考

例1　解不等式 $(x+5)(x+2)(x-1)(x-4)\leqslant-80$.

解析　$(x+5)(x+2)(x-1)(x-4)\leqslant-80$,

$[(x+5)(x-4)][(x+2)(x-1)]\leqslant-80$,

$(x^2+x-20)(x^2+x-2)\leqslant-80$,

令 $t=x^2+x$,

则 $(t-20)(t-2)\leqslant-80$,

$\therefore t^2-22t+120\leqslant0$,

$\therefore(t-10)(t-12)\leqslant0$,

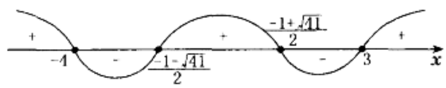
$\therefore(x^2+x-10)(x^2+x-12)\leqslant0$,

学习札记

学习札记

$\therefore \left(x-\frac{-1-\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right)(x-3)(x+4)\leqslant 0.$

画序轴：



$\therefore -4\leqslant x\leqslant \frac{-1-\sqrt{41}}{2}$，或$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}\leqslant x\leqslant 3$ 即为原不等式的解.

注：也可令 $x^2+x-2=u$，或 $x^2+x-11=v$，此时不等式可化为$(v-9)(v+9)\leqslant -80$，$v^2\leqslant 1$，$-1\leqslant v\leqslant 1$，这样更加简洁.

例2 (1)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象与直线$y=25$ 有公共点，且不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，求 a、b、c 的取值范围.

(2)设不等式 $x^2-2ax+a+2\leqslant 0$ 的解集为 M，如果 $M\subseteq[1,4]$，求实数 a 的取值范围.

(1)依题意 $ax^2+bx+c-25=0$ 有解，故 $\Delta=b^2-4a(c-25)\geqslant 0$.

又不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，

$\therefore a<0$ 且有$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{6}$，$\frac{c}{a}=-\frac{1}{6}$.

$\therefore b=\frac{1}{6}a$，$c=-\frac{1}{6}a$.

$\therefore b=-c$，代入 $\Delta\geqslant 0$ 得 $c^2+24c(c-25)\geqslant 0$，

$\therefore c\geqslant 24$. 故 a、b、c 的取值范围为 $a\leqslant -144$，$b\leqslant -24$，$c\geqslant 24$.

(2)$M\subseteq[1,4]$有两种情况：其一是 $M=\varnothing$，此时 $\Delta<0$；其二是 $M\neq\varnothing$，此时 $\Delta=0$ 或 $\Delta>0$. 分三种情况计算 a 的取值范围.

设 $f(x)=x^2-2ax+a+2$.

有 $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)=4(a^2-a-2)$.

当 $\Delta<0$ 时，$-1<a<2$，$M\subseteq[1,4]$.

当 $\Delta=0$ 时，$a=-1$ 或 2.

当 $a=-1$ 时，$M=\{-1\}\not\subseteq[1,4]$；

当 $a=2$ 时，$M=\{2\}\subseteq[1,4]$.

当 $\Delta>0$ 时，$a<-1$ 或 $a>2$.

设方程 $f(x)=0$ 的两根 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，

那么 $M=[x_1,x_2]$，$M\subseteq[1,4]\Rightarrow 1\leqslant x_1<x_2\leqslant 4\Leftrightarrow$

$\begin{cases}f(1)\geqslant 0,\\ f(4)\geqslant 0,\\ 1\leqslant a\leqslant 4,\\ \Delta>0.\end{cases}$ 即$\begin{cases}-a+3>0,\\ 18-7a>0,\\ 1\leqslant a\leqslant 4,\\ a<-1 \text{ 或 } a>2,\end{cases}$ 解得 $2<a<\frac{18}{7}$，

$\therefore M\subseteq[1,4]$时，$a$ 的取值范围是$\left(-1,\frac{18}{7}\right)$.

例3 (1)解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$；

(2)若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$对满足$|m|\leqslant 2$ 的所有 m 都成立，求 x 的取值范围.

(1)原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$.

①$a=0$ 时，$x\leqslant -1$.

②$a\neq 0$ 时，不等式即为$(ax-2)(x+1)\geqslant 0$.

当 $a>0$ 时，$x\geqslant\frac{2}{a}$或 $x\leqslant -1$；

由于$\frac{2}{a}-(-1)=\frac{a+2}{a}$，于是

当$-2<a<0$ 时，$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$；

当 $a=-2$ 时，$x=-1$；

当 $a<-2$ 时，$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

综上，当 $a=0$ 时，$x\leqslant -1$；当 $a>0$ 时，$x\geqslant\frac{2}{a}$或 $x\leqslant -1$；

当$-2<a<0$ 时，$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$；当 $a=-2$ 时，$x=-1$；当 $a<-2$ 时，$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

(2)原不等式化为$(x^2-1)m-(2x-1)<0$.

令 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)(-2\leqslant m\leqslant 2)$.

则$\begin{cases}f(-2)=-2(x^2-1)-(2x-1)<0,\\ f(2)=2(x^2-1)-(2x-1)<0.\end{cases}$

解得$\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

追踪1 ('07·全国Ⅰ)设 $S=\{x\,|\,2x+1>0\}$，$T=\{x\,|\,3x-5<0\}$，则 $S\cap T$ 等于

A. $\varnothing$　　B. $\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{5}{3}\right\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\right\}$

以集合的交集运算考查了一元一次不等式组的解法. $\begin{cases}2x+1>0,\\ 3x-5<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ x<\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right)$. 选 D.

追踪2 ('06·福建)已知全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x+8<0\}$，则 $\complement_U A\cap B$ 等于

A. $[-1,4]$　　B. $(2,3)$

C. $(2,3]$　　D. $(-1,4)$

以集合的运算考查了一元二次不等式和绝对值不等式的解法.

全集 $U=\mathbf{R}$，且 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x+8<0\}=\{x\,|\,2<x<4\}$，

$\therefore(\complement_U A)\cap B=(2,3]$，选 C.

追踪3 ('07·浙江)"$x>1$"是"$x^2>x$"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

以充要条件考查了一元二次不等式的解法.

由 $x^2>x$ 可得 $x>1$ 或 $x<0$，

$\therefore x>1$ 可得到 $x^2>x$，但$x^2>x$ 得不到 $x>1$. 故选 A.

追踪4 ('06·上海)若关于 x 的不等式$(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实常数 k，总有

A. $2\in M$，$0\in M$　　B. $2\notin M$，$0\notin M$

C. $2\in M$，$0\notin M$　　D. $2\notin M$，$0\in M$

代入判断法，将 $x=2$，$x=0$ 分别代入不等式中，判断关于 k 的不等式解集是否为 $\mathbf{R}$；

求出不等式的解集：$(1+k^2)x\leqslant k^4+4\Rightarrow x\leqslant\frac{k^4+4}{k^2+1}=(k^2+1)+\frac{5}{k^2+1}-2\Rightarrow x\leqslant(k^2+1)+\frac{5}{k^2+1}-2=2\sqrt{5}-2$. 故选 A.

链接5　('08·天津)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, x<0,\\ x-1, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集是　(　　)

A. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$

B. $\{x\mid x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid x\leqslant \sqrt{2}-1\}$

D. $\{x\mid -\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$

解析：①当 $x+1<0$，即 $x<-1$ 时，

$x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$

$\Rightarrow x+(x+1)[-(x+1)+1]\leqslant 1\Rightarrow -x^2\leqslant 1$，

$\therefore x<-1$.

②当 $x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -1$ 时，

$x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1\Rightarrow x+(x+1)(x+1-1)\leqslant 1$

$\Rightarrow x^2+2x-1\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1$.

综合①②有 $x\leqslant \sqrt{2}-1$. 故选 C.

训练提升　夯实基础　提升能力

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$ 的定义域为　(　　)

A. $(1,2)\cup(2,3)$　　B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

C. $(1,3)$　　D. $[1,3]$

2. 设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，集合 $M\cap N$ 等于　(　　)

A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

3. 如果 $P=\{x\mid (x-1)(2x-5)<0\}$，$Q=\{x\mid 0<x<10\}$，那么　(　　)

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\subsetneqq Q$

C. $P\supsetneqq Q$　　D. $P\cup Q=\mathbf{R}$

4. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是　(　　)

A. $(0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(2,4]$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

5. 设命题甲：$ax^2+2ax+1>0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$；命题乙：$0<a<1$. 则命题甲是命题乙成立的　(　　)

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$ 则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant 5$ 的解集是____________.

7. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<3\}$，则不等式 $ax^2-bx+c>0$ 的解集为____________.

三、解答题

8. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$，求 $a+b$ 的值.

9. 求实数 m 的范围，使 $y=\lg[mx^2+2(m+1)x+9m+4]$

(1)对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒有意义.

(2)值域为全体实数.

10. 关于 x 的不等式 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ 2x^2+(2k+5)x+5k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$，求实数 k 的取值范围.

学习札记

学习札记

第4讲 含绝对值不等式和分式不等式的解法

知识梳理 明确概念 梳理思路

一、基本概念

1. 实数绝对值的定义:在实数集 **R** 中,$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$

2. 实数绝对值的几何意义:$|x-a|$ 表示数轴上点 x 到点 a 的距离.

二、基本解法

1. 含绝对值不等式的解法.

① $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\Leftrightarrow x^2<a^2(a>0)$;

$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a\Leftrightarrow x^2>a^2(a>0)$;

$|ax+b|<c\Leftrightarrow -c<ax+b<c(c<0)$;

$|ax+b|>c\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c(c<0)$.

② $|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$;

$|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant -g(x)$ 或 $f(x)\geqslant g(x)$;

$|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$

$\Leftrightarrow(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))<0$.

③对于含两个或两个以上的绝对值的不等式可用"零点分段法"(即应用绝对值的定义去掉绝对值符号)、图象法或实数绝对值的几何意义(即 $|x-a|$ 表示数轴上点 x 到点 a 的距离)求解.

2. 分式不等式的解法.

① $\dfrac{x-a}{x-b}>0\Leftrightarrow(x-a)(x-b)>0$;

$\dfrac{x-a}{x-b}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)(x-b)\leqslant 0,\\x-b\neq 0.\end{cases}$

② $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$;

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\leqslant 0,\\g(x)\neq 0.\end{cases}$

疑难突破 排疑解难 点拨预测

一、概念辨析

1. $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$,$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$,其中的 a 一定要大于0吗?

答:$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$;

$|x|>a\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$ 其中的 $a\in$ **R** 都适合;

$|ax+b|<c\Leftrightarrow -c<ax+b<c$;

$|ax+b|>c\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$ 其中的 $c\in$ **R**;

$|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$;

$|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant -g(x)$

或 $f(x)\geqslant g(x)$

其中的 $g(x)$ 也不受符号限制.

二、疑难疏引

2. $\dfrac{x-3}{x-4}\leqslant 0$ 的解集为$[3,4]$,对吗?

答:错.本题致错的原因是漏掉了分母不能为0.

$\dfrac{x-3}{x-4}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-4)\leqslant 0,\\x-4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow[3,4)$.

3. $|\sqrt{2}x|>x-1\Leftrightarrow(|\sqrt{2}x|)^2>(x-1)^2\Leftrightarrow x^2+2x-1>0\Leftrightarrow x>-1+\sqrt{2}$ 或 $x<-1-\sqrt{2}$ 正确吗?

答:不正确.$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2(a>0)$,用平方法解的前提是两边都为正.

正解1:当 $x-1\leqslant 0$ 时,$x\leqslant 1$.

当 $x-1>0$ 时,$|\sqrt{2}x|>x-1\Leftrightarrow(|\sqrt{2}x|)^2>(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-1>0\Leftrightarrow x>-1+\sqrt{2}$ 或 $x<-1-\sqrt{2}$,

此时,$x>1$.

综上所述可知 $x\in$ **R**.

正解2:$|\sqrt{2}x|>x-1\Leftrightarrow\sqrt{2}x>x-1$ 或 $\sqrt{2}x<-(x-1)$

$\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ 或 $x<\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$,可知 $x\in$ **R**.

三、方法点拨

4. 解含绝对值不等式的关键是什么?

答:解含绝对值不等式的关键是去绝对值符号.方法有不等式的性质、平方等.

5. 解分式不等式所用到的数学思想是什么?

答:转化思想——一般分式不等式的解法转化为整式不等式的解法.

四、高考展望

含绝对值、分式不等式的解法通常不会单独命题来考查.一般是与充要条件等综合来考查.

典例剖析 经典解析 追踪高考

例1 (1)解不等式 $\dfrac{x-1}{2x+3}>1$;

(2)解不等式 $\dfrac{5-x}{x^2-2x-3}<-1$.

解析:(1) $\dfrac{x-1}{2x+3}>1\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2x+3}-1>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)-(2x+3)}{2x+3}>0\Leftrightarrow\dfrac{-x-4}{2x+3}>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+4}{2x+3}<0\Leftrightarrow(x+4)(2x+3)<0\Leftrightarrow -4<x<-\dfrac{3}{2}$.

∴原不等式的解集为 $\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$.

(2)**方法一:**原不等式变为 $\dfrac{5-x}{x^2-2x-3}+1<0$,

即 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2<0,\\x^2-2x-3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-3x+2>0,\\x^2-2x-3<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow -1<x<1$ 或 $2<x<3$.

∴原不等式的解集是 $\{x|-1<x<1$ 或 $2<x<3\}$.

方法二:原不等式变为 $\dfrac{5-x}{x^2-2x-3}+1<0$,

即 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0\Leftrightarrow(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)<0$