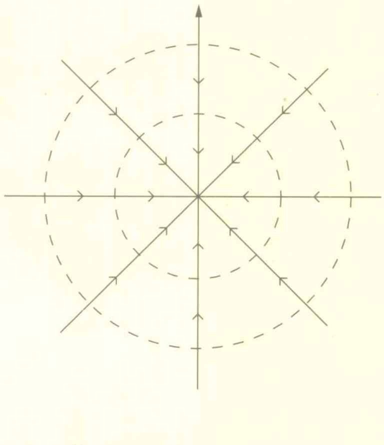
普通高等院校“十一五”规划教材

复变函数

FUBIAN HANSHU

高红亚 刘红 刘倩倩 编著



国防工業出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十一五"规划教材

复变函数

高红亚　刘红　刘倩倩　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

数学分析以实函数为研究对象。由于理论的发展和生产实践的需要，又提出了对复变量复值函数，即复变函数的研究。复变函数的理论与方法在流体力学、热学、电磁学和弹性理论中都有广泛的应用。

本书从现代数学的观点讲述复变函数理论的基础知识。全书共分5章，内容包括复数与复变函数、复变函数的积分理论、复变函数的级数理论、留数、复变函数的几何理论等。每章后都附有习题。

本书可供理、工、农、师范、综合类院校中的数学与应用数学专业学生使用，也可供自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数／高红亚，刘红，刘倩倩编著．—北京：国防工业出版社，2009．4

普通高等院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-118-06172-7

Ⅰ．复… Ⅱ．①高…②刘…③刘… Ⅲ．复变函数-高等学校-教材 Ⅳ．O174．5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 011327 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 $8\frac{1}{2}$ 字数 148 千字

2009 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 25.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

复变函数论研究复变量的复值函数。复变函数的理论基础是19世纪奠定的，这一时期的三个代表人物是Cauchy（1789—1857）、Weierstrass（1815—1897）和Riemann（1826—1866）。Cauchy研究复变函数的积分理论，Weierstrass研究复变函数的级数理论，而Riemann研究复变函数的几何理论。复变函数的理论与方法在流体力学、热学、电磁学和弹性理论中有广泛的应用。

本书讲述单复变函数的基本理论，主要内容包括复变函数的积分理论、级数理论、留数理论和几何理论等。第1章复数与复变函数为预备知识，内容包括复数、复变函数、解析函数和初等函数；第2章复变函数的积分理论是复变函数论的基础，主要内容为Cauchy定理与Cauchy积分公式；第3章复变函数的级数理论讲述Taylor级数和Laurent级数，重点内容为Laurent级数；第4章的留数理论是积分理论和级数理论的发展，讲述留数定理在定积分和广义积分计算中的应用以及辐角原理和Rouché定理；第5章复变函数的几何理论包括共形映射、分式线性映射和Riemann定理，调和函数的一些基本性质也放在本章。

本书是在作者近十年讲授复变函数的基础上对讲义进行修改整理而成。本书可供理、工、农、师范、综合类院校中的数学与应用数学专业学生使用，也可供自学者参考。由于作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，希望读者批评指正。

编　者
2009年1月

目 录

第1章　复数与复变函数

1.1　复数及其运算

复变函数论的研究对象是复变量的复值函数。首先复习与复数有关的一些基本知识。

1.1.1　复数及其代数运算

对于简单的一元二次方程

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.1}$$

它在实数范围内是没有解的,因为没有实数的平方等于 -1。由于解方程的需要,人们引进一个"虚有的"数i,并令 $i^2 = -1$,则式(1.1)有解 $x_{1,2} = \pm i$。同样,方程

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

的判别式小于0,它在实数范围内也没有解。引进数i之后,可得解 $x_{1,2} = -1 \pm i$。

i称为虚数单位。设 x、y 为两个实数,$z = x + iy$ 称为复数。x、y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为 $x = \mathrm{Re}(z)$,$y = \mathrm{Im}(z)$。当 $y = 0$ 时,$z = x$ 为实数;当 $x = 0$,$y \neq 0$ 时,$z = iy$ 为纯虚数。

设 $z_j = x_j + iy_j$,$j = 1,2$。$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,$y_1 = y_2$,即两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等。

注意,非实数的复数是不能比较大小的。

下面定义复数的四则运算。设 $z_j = x_j + iy_j$,$j = 1,2$。定义

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

设 $z_2 \neq 0$,若复数 z 满足 $z_2 z = z_1$,则 z 称为 z_1 与 z_2 的商,记为 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$。设 $z = x + iy$,由商的定义及复数的乘法,得

$$x_1 + iy_1 = (x_2 + iy_2)x + iy = (x_2 x - y_2 y) + i(y_2 x + x_2 y)$$

比较两端的实部与虚部得到二元一次方程组

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ y_2x + x_2y = y_1 \end{cases}$$

由 $z_2 \neq 0$ 知其系数矩阵

$$\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 \neq 0$$

于是

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

因此

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 称为 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数。共轭复数具有如下性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z), z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$;

(4) $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$。

上述性质容易证明。作为例子，证明性质(4)如下：

$$z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = (x^2 + y^2) + \mathrm{i}(xy - xy) = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$$

例 1－1　设 z_1、z_2 为两个复数，证明

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

并由此证明

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

证明：

$$\begin{aligned} |z_1 \pm z_2|^2 &= (z_1 \pm z_2)\overline{(z_1 \pm z_2)} = (z_1 \pm z_2)(\overline{z_1} \pm \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} \pm z_1\overline{z_2} \pm z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \pm z_1\overline{z_2} \pm \overline{z_1\overline{z_2}} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

因为

$$\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leqslant |z_1 \overline{z_2}| = |z_1||z_2|$$

所以由式(1.2)可得不等式

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

这样就有 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$。同理可得 $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$。

1.1.2 复数的几何表示

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x, y) 一一对应。因此,如果某个量和有序实数对成一一对应关系,那么就可以用这个量表示复数。

$z = x + \mathrm{i}y$ 称为复数 z 的代数表示法。因为有序实数对 (x, y) 与平面直角坐标系中的点一一对应,所以可以用平面直角坐标系中的点表示复数。此时,x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在的平面称为复平面,记为 C。

因为平面直角坐标系中的点与从原点出发终点指向这个点的向量成一一对应关系,所以可以用向量表示复数。如图 1-1 所示,设 $x^2 + y^2 \neq 0$,从原点 O 到复平面上的点 $P(x, y)$ 引向量 $\boldsymbol{OP}$。此向量的长度称为复数 z 的模,记为 $|z|$,向量与实轴正向的夹角称为复数 z 的辐角,记为 $\mathrm{Arg}z$。由于两个向量有无穷多个夹角,因此任何非零的复数 z 都有无穷多个辐角,这些辐角的值彼此之间相差 2π 的整数倍,$\mathrm{Arg}z$ 可理解为这些角度的集合。在 $(-\pi, \pi]$ 中的那个辐角称为复数 z 的辐角主值,记为 $\arg z$。这样 $\arg z \in \mathrm{Arg}z$。

复数 0 的模为 0,辐角无定义。

令 $|z| = r$,$\mathrm{Arg}z = \theta$。利用极坐标,得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

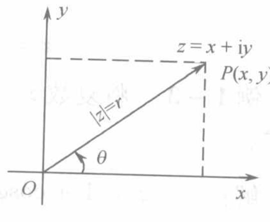


图 1-1

于是复数 z 又可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

称为复数 z 的三角表示法。

利用 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

三角表示法可改写成

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

称为复数 z 的指数表示法。

上面用到的 Euler 公式可由 e^x,$\sin x$,$\cos x$ 的 Maclaurin 展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

得到，只要将 e^x 的展开式中的 x 换成 ix，并利用 $i^2 = -1$ 即可。

例 1－2 分别用三角表示法和指数表示法表示复数 $z = 1 + \sqrt{3}i$。

解：因为 $x = 1, y = \sqrt{3}$，所以 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$，而

$$\arg z = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

因此得到三角表示式

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

和指数表示式 $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$。由于辐角的多值性，三角表示法和指数表示法也可写为

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right],$$

$$z = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)i}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例 1－3 将复数 $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi (0 < \varphi \leqslant \pi)$ 化为三角形式和指数形式。

解：
$$z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + i \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 2\cos\frac{\varphi}{2}e^{\frac{\varphi}{2}i}$$

复数还有一种表示方法，就是用球面上的点来表示。下面建立复数与球面上的点的一一对应关系，给出复数的球面表示法，并给出无穷远点的概念。

如图 1－2 所示，xOy 平面为复平面。取一个球面，使其南极 S 与复平面的原点重合。通过南极 S 作一条直线，使其与复平面垂直且与球面相交于另一点 N，N 称为球面的北极。

任取球面上异于 N 的一点 P，连接 P 与 N 的直线必交复平面上模为有限的一点 z；反过来，任取复平面上一点 z，连接 z 与 N 的直线也必与球面相交于一点 P。这说明，除了北极 N 以外，球面上的点和复平面上的点是一一对应的。这样就

可以用球面上的点 P 表示复数 z。

但是复平面上还没有一点与 N 对应。观察图1－2，设想复平面上的一点 z 无限地远离原点，z 走得越远，它与北极 N 的连线与球面的交点就越接近于 N。因此，可以认为北极 N 和复平面上一个模为无穷大的点相对应，并且称这个点为无穷远点，记为 ∞。加上 ∞ 的复平面称为扩充复平面，记为 C_∞，与之相对应的球面称为复球面。扩充复平面上的点与复球面上的点（包括 N 点）构成了一一对应关系。

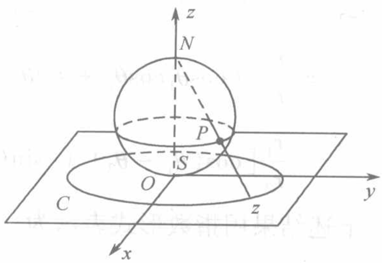


图1－2

用球面上的点表示复数的好处在于它明确表示出了 ∞ 的对应点。

相应于无穷远点，引进复数 ∞ 与之对应，规定 $|\infty| = +\infty$，模、辐角、实部、虚部没有定义。对于任一复数 z，规定

(1) $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, \dfrac{\infty}{z} = \infty, \dfrac{z}{\infty} = 0, z \neq \infty$；

(2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \dfrac{z}{0} = \infty, z \neq 0; \dfrac{z}{\infty} = 0, z \neq \infty$；

(3) 运算 $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$ 无意义。

1.1.3 复数的乘幂与方根

在进行复数的乘除或乘方、开方运算时，把复数表示成三角表示式比直接用代数表示式运算要简便。设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \tag{1.3}$$

先看乘法。

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

上述结果用指数形式表示为

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$$

再看除法。设 $z_1, z_2 \neq 0$ 如式(1.3)所示，则

$$\frac{z_1}{z_2}=[r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)]\left[\frac{1}{r_2}(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)\right]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

上述结果用指数形式表示为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

从以上运算可以看出，两复数相乘的模等于它们的模相乘，相乘的辐角等于它们的辐角相加；两复数相除的模等于被除数的模除以除数的模，相除的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角。

如果令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，反复运用复数的乘法法则可以得到 n 个 z 的乘积 z^n（称为 z 的 n 次幂），

$$z^n=z\cdot z\cdots z=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

特别地，当 $r=1$ 时，上式就成为 De Moivre 公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

对于复数 z，如果存在复数 w 满足等式 $w^n=z$（n 为正整数），那么 w 称为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$。下面求 w。令

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

由定义，得

$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

根据乘法法则和复数相等的概念知

$$\rho^n=r,n\varphi=\theta+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此

$$\rho=\sqrt[n]{r},\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即 z 的 n 次方根为

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

当 $k=0$ 时，　　$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right]$

当 $k=1$ 时，　　$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right]$

当 $k=2$ 时，　　$w_2 = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+4\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+4\pi}{n}\right]$

……

当 $k=n-1$ 时，　$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right]$

当 $k=n$ 时，　　$w_n = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right]$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right] = w_0$$

由以上规律可以看出，当 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 时，从上式可以得到 w 的 n 个互异的值，而当 k 取其它整数时，这 n 个互异的值会重复出现。于是，$w=\sqrt[n]{z}$ 为 n 值函数。

上述 z 的互异的 n 个方根都具有相同的模 $\sqrt[n]{r}$，而相邻的两个 k 值的辐角的差都为 $\frac{2\pi}{n}$，所以在几何上，z 的 n 次方根所对应的点就是以原点为中心、以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆内接正 n 边形的顶点。

例 1－4　求 $(1+\mathrm{i})$ 的 4 次方根。

解：$(1+\mathrm{i})$ 的三角形式为

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right], k=0,1,2,3$$

即

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

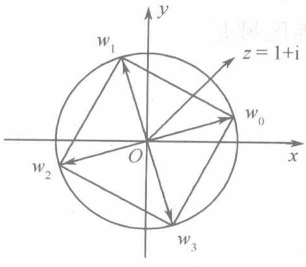


图 1－3

如图 1－3 所示，这四个根是内接于以原点为

中心、以$\sqrt[8]{2}$为半径的圆的正方形的顶点。

1.2 区 域

本节给出复平面的基本拓扑知识。

定义1.1 设z_0为复平面上的一点。满足条件$|z-z_0|<\rho$的点z,即以z_0为圆心、以ρ为半径的圆内的点称为z_0的ρ邻域，记为$N_\rho(z_0)$。满足条件$0<|z-z_0|<\rho$的点z所组成的点集称为z_0的去心ρ邻域,记为$N_\rho(z_0)\setminus\{z_0\}$。

定义1.2 设E为点集,$z_0\in E$。若存在z_0的邻域$N_\rho(z_0)$全含于E,则z_0称为E的内点;若点集E的点全部是内点,则集E称为开集;若点z_0的某一邻域内的点都不属于E,则z_0称为E的外点;若平面上一点z_0(不必属于点集E)的任意邻域都有E的无穷多个点,则z_0称为E的聚点或极限点;若集E或者没有聚点,或者所有聚点都属于E,则集E称为闭集;若点z_0的任意一个邻域内,同时有属于E的点和不属于E的点,则z_0称为E的边界点。点集E的所有边界点组成的集合称为E的边界。

定义1.3 若点集E中的所有点z都满足$|z|<R$,即点集E能完全包含在以原点为心、以某一有限数R为半径的圆内,则E称为有界集,否则称为无界集。

定义1.4 若对集E中的任意两点,存在连接两点的折线属于E,则集E称为连通集。

定义1.5 连通的开集称为区域。

定义1.6 如果区域D是有界集,那么D称为有界区域;否则称为无界区域。

复平面上的区域可以用不等式来表示。

例1-5 z平面上以原点为心、以R为半径的圆(即圆形区域)可以表示为$|z|<R$。

例1-6 z平面上分别以实轴$\mathrm{Im}(z)=0$和虚轴$\mathrm{Re}(z)=0$为边界的几个无界区域是

上半z平面$\mathrm{Im}z>0$,

下半z平面$\mathrm{Im}z<0$,

左半z平面$\mathrm{Re}z<0$,

右半z平面$\mathrm{Re}z>0$。

定义1.7 设$x(t)$及$y(t)$是实变数t的两个在闭区间$[\alpha,\beta]$上连续的实函数。由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

或由

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

所决定的点集L,称为z平面上的一条连续曲线,$z(\alpha)$ 和$z(\beta)$ 分别称为L的起点和终点;对满足 $\alpha < t_1 < \beta, \alpha \leqslant t_2 \leqslant \beta, t_1 \neq t_2$ 的t_1 及t_2,当$z(t_1) = z(t_2)$ 时,点$z(t_1)$ 称为曲线L的重点;没有重点的连续曲线称为简单曲线或 Jordan 曲线;若简单曲线L的起点与终点重合,即$z(\alpha) = z(\beta)$,则曲线L称为简单闭曲线。

定义1.8 在复平面上,如果区域D内任意一条简单闭曲线的内部都含于区域D内,那么D称为单连通区域,否则称为多连通区域。

例1-7 集$\{z \mid 3 < \mathrm{Re}z < 5\}$ 为一垂直带形,它是一个单连通无界区域,其边界为直线 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 及 $\mathrm{Re}(z) = 5$。

例1-8 集$\{z \mid 2 < \arg(z - i) < 3\}$ 为一角形域,它是一个单连通无界区域,其边界为半射线 $\arg(z - i) = 2$ 及 $\arg(z - i) = 3$。

例1-9 集$\{z \mid 3 < |z - i| < 6\}$ 为一圆环,它是一个多连通有界区域,其边界为圆周 $|z - i| = 3$ 及 $|z - i| = 6$。

例1-10 在扩充复平面上,集$\{z \mid 4 < |z| < +\infty\}$ 及集$\{z \mid 4 < |z| \leqslant +\infty\}$ 分别是多连通及单连通的无界区域,其边界分别是$\{z \mid |z| = 4\} \cup \{\infty\}$ 及$\{z \mid |z| = 4\}$。

1.3 复变函数

1.3.1 复变函数的定义

定义1.9 设在复平面上有点集E。如果有一法则f,使得对于任意的$z = x + iy \in E$,都存在一个或多个复数$w = u + iv$和它对应,那么f称为E上确定的复变数函数,简称复变函数,记为 $w = f(z)$,或$z \mapsto f(z)$。

复变函数中允许多值函数,例如 $w = \sqrt[n]{z}$ 为n值函数。在1.5节中也将遇到一些多值函数。一般所理解的复变函数都是单值的,也就是说,对于复变数z的每个值,相应的w的值唯一确定。

函数f也可看成是从一个复平面上的点集E到另一个复平面上的点集的一个映射或映照。把集E表示在z平面上,把z的函数值$w = f(z)$ 表示在w平面上。令$A = \{f(z) \mid z \in E\}$,记为$A = f(E)$,映射$w = f(z)$ 把任意$z_0 \in E$映射成为

$w_0=f(z_0)\in A$，把集 E 映射成为集 A，即 f 是从 E 到 A 的一个映射，w_0 和 A 分别称为 z_0 和 E 的像，而 z_0 及 E 分别称为 w_0 和 A 的原像。如果 f 把 E 中任意不同的两点映射成 A 中不同的两点，那么 f 是一个从 E 到 A 的双射，且 E 和 A 中的点是一一对应的。

对于简单的映射，有时也将 z_0 及 E 以及它们的像作在同一复平面上。

1.3.2 三个特殊的映射

本节举出复变函数所确定的映射的三个典型的例子，这些例子在第 5 章有用。第 5 章还将对复变函数的映射做进一步的研究。

例 1－11 映射 $w=z+\alpha$，其中 $\alpha=a+\mathrm{i}b$。

令 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，$\alpha=a+\mathrm{i}b$，这里 x、y、u、v、a 及 b 是实数。由 $w=z+\alpha$ 知

$$u=x+a,v=y+b$$

显然，$w=z+\alpha$ 是从 z 平面到 w 平面的一个双射。如果把 z 和 w 作在同一个复平面上，这一映射是 z 平面的一个平移。

例 1－12 映射 $w=\alpha z$，其中 $\alpha\neq 0$。

令 $\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r\neq 0$ 是 α 的模，θ 是它的辐角，那么 $w=\alpha z$ 可以看做是下列两个映射的复合映射：

$$\vartheta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z,$$

$$w=r\vartheta$$

把 z、ϑ、w 都作在同一复平面上。因为 ϑ 与 z 的模相同，而它的辐角是 z 的辐角加上 θ，所以上面第 1 个映射确定一个旋转。第 2 个映射中，ϑ 与 w 的辐角相等，而 w 的模为 ϑ 的模的 r 倍，所以它确定一个以原点为中心的相似映射。因此，映射 $w=\alpha z$ 是一个旋转及一个相似映射的复合映射。

例 1－13 映射 $w=\dfrac{1}{z}$。

这一映射可以看做是下列两个映射的复合映射：

$$z_1=\frac{1}{\bar{z}},w=\overline{z_1}$$

把 z、z_1、w 都作在同一个复平面上。显然，$w=\overline{z_1}$ 是关于实轴的对称映射；而 $z_1=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 把 z 映射成 z_1，它的辐角与 z 的辐角相同，即

$$\operatorname{Arg}z_1=-\operatorname{Arg}\bar{z}=\operatorname{Arg}z$$