最后24小时轻松过关

- 名师押题　年年命中
- 预测考点　精确定位
- 全真模考　突破高分

新大纲

硕士研究生入学统一考试

模拟试卷及解答

数学三和数学四

赵达夫　刘晓　龚漫奇　编

2003

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

硕士研究生入学统一考试模拟试卷及解答

数学一和数学二

（2003）

赵达夫　刘晓　龚漫奇　编

天津大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学统一考试模拟试卷及解答/赵达夫，刘晓，龚漫奇编.—天津：天津大学出版社，2003.1
ISBN 7-5618-0965-4

Ⅰ.硕…　Ⅱ.①赵…②刘…③龚…　Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－试题　Ⅳ.O13－44 /2922/3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 091542 号

组稿编辑　杨秀雯　郭建国
责任编辑　杨秀雯　赵淑梅
技术设计　油俊伟
封面设计　谷英卉

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　11.25
字　　数　281 千
版　　次　2003 年 1 月第 1 版
印　　次　2003 年 1 月第 1 次
印　　数　1—5 000
定　　价　18.00 元

2003 年研究生入学统一考试(理工类)

数学一　模拟试卷(一)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)

(1)设 $y=f(e^x)e^{f(x)}$,其中 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,则 $y'=$__________.

(2)$\int\frac{\cos x+\sin x}{\cos^2 x(\cos x-\sin x)}dx=$__________.

(3)若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在点 $x=4$ 处收敛,在 $x=-2$ 处发散,则尚不能判定该幂级数是否收敛的整数点为__________.

(4)已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$ 分别为__________,其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 是行列式 D_5 中第 4 行第 j 列中元素的代数余子式.

(5)某批产品的废品率为 p,现从这批产品中任意取出 4 件,已知至少有 1 件次品的概率为 0.343 9,则这批产品的次品率 $p=$__________.

(6)设总体 $X\sim N(\mu,0.4^2)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_{16})$ 是从中抽取的一个样本的样本观测值,算得 $\bar{x}=10.12$,则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为__________.

(已知:$z_{0.025}=1.96, z_{0.05}=1.645$)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 a 为常数,则极限 $\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}$

(A)为无穷大.　　(B)不存在但不是无穷大.

(C)存在.　　(D)结果与 a 的取值有关.

【　】

(2)设 $D:x^2+y^2\leqslant 1$,则二重积分 $I=\iint_D f(x^2+y^2)dxdy$ 可以化成累次积分为

(A)$4\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}f(x^2+y^2)dy$.　　(B)$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 rf(1)dr$.

(C)$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 rf(r^2)dr$.　　(D)$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rf(r)dr$.

【　】

(3)函数 $y=-\sin x+C$(C 为任意常数)

(A)不是微分方程 $y''=\sin x$ 的解.

(B)是微分方程 $y''=\sin x$ 的通解.

(C)是微分方程 $y''=\sin x$ 的特解.

(D)不满足上述(A)、(B)、(C)中的任意一项.

【　】

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为给定的 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 为给定的 m 元列向量,考虑线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,则下列命题正确的是__________.

(A)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(B)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

(C)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(D)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解.

【　】

(5)设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(B)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

(D)存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

【　】

(6)设随机变量 X 与 Y 相互独立,其分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则以下结论正确的是

(A)$X=Y$.　　(B)$P\{X=Y\}=1$.

(C)$P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　(D)$P\{X=Y\}=0$.

【　】

三、(本题满分 10 分)

求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\,dt}{x^3}$.

四、(本题满分 10 分)

设密度为 1 的流体的流速 $\boldsymbol{v}=xz^2\boldsymbol{i}+\sin x\boldsymbol{k}$.曲面 S 是由曲线 $\begin{cases} y=\sqrt{1+z^2}\,(1\leqslant z\leqslant 2), \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面,其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.求单位时间内流体流向曲面 S 正侧的流量 Q.

五、(本题满分 12 分)

设 a,p,λ 为常数,讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p(\ln n)^{\lambda}}$ 的敛散性.收敛时,指出是绝对收敛还是条件收敛.

六、(本题满分 12 分)

若函数 $f(x,y,z)$ 对任意的 $t>0$ 满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$,则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数.设 $f(x,y,z)$ 可微,试证:

$$f(x,y,z)\text{是 } k \text{ 次齐次函数}\Leftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

七、(本题满分 12 分)

计算曲线积分

$$\oint_C 2yz\mathrm{d}x+(2z-z^2)\mathrm{d}y+(y^2+2xy-3y)\mathrm{d}z,$$

其中 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=3(x-y)^2+(x+y-2z)^2, \end{cases}$ 且从原点向 C 看去时,C 的方向沿顺时针方向.

八、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导,且 $|f(x)|\leqslant 1$,又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$.证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

九、(本题满分 13 分)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,0,2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,1,3]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1,a]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=[3,10,b,4]^{\mathrm{T}}$.

(1)当 a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2)当 a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?并求出全部表示式.

十、(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,特征值为 $1,2,-1$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 和 2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.试用 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量表示向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,8,-1)^{\mathrm{T}}$,并求 $\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\beta}$.

十一、(本题满分 9 分)

某科统考的考试成绩 X 近似地服从正态分布 $N(70,10^2)$,第 100 名的成绩为 60 分,问第 20 名的成绩约为多少分?

附:标准正态分布表(部分):

x	0	0.5	0.75	0.86	0.97	1
$\Phi(x)$	0.5	0.691 5	0.779 4	0.805 1	0.832 0	0.841 3

十二、(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{N}\quad(k=1,2,\cdots,N),$$

其中 N 是未知的正整数,$(X_1,\cdots,X_n)$是从该总体中抽取的一个样本.

(1)试求 N 的极大似然估计量.

(2)某单位的自行车车棚内存放了 N 辆自行车,其编号分别为 $1,2,3,\cdots,N$,假定职工从车棚中取出自行车是等可能的.某人连续 12 天记录下他观察到的取走的第一辆自行车的编号为

$$12,203,23,7,239,45,73,189,95,112,73,159,$$

试求 N 在上述样本观测值下的估计值.

2003年研究生入学统一考试(理工类)

数学一　模拟试卷(二)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1)设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{(x-1)^2}=3$,则 $f(1)+f'(1)+f''(1)=$ ______.

(2) $\int e^{|x|}dx=$ ______.

(3)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是非齐次线性微分方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q(x)$$

的三个线性无关的特解,其中 $P_1(x),P_2(x),Q(x)$ 为已知的连续函数,则所给方程的通解 $y(x)=$ ______.

(4)设 4×4 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 都是4维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ______.

(5)已知随机变量 $X\sim N(3,4)$,随机变量 Y 服从指数分布,其密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y}=\dfrac{1}{2}$,又设 $Z=3X-4Y$,则随机变量 Z 的方差 $D(Z)=$ ______.

(6)设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布, $\lambda>0$ 为未知参数.$(X_1,\cdots,X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本,则参数 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}=$ ______.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A)充分必要条件.　　(B)充分条件但非必要条件.

(C)必要条件但非充分条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

【　】

(2)设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=2$ 时条件收敛,则对于此幂级数的收敛半径 R,

(A)只能确定 $R\geqslant 2$.　　(B)只能确定 $R\geqslant 4$.

(C)只能确定 $R\leqslant 4$.　　(D)能确定 $R=4$.

【　】

(3)设 S 为球面 $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ 的外侧, $S_{上}$ 为上半球面 $x^2+(y-1)^2+z^2=1,z\geqslant 0$

的上侧,则正确的是

(A) $\iint_S y^3dxdy=0$.　　(B) $\iint_S y^3dxdy=2\iint_{S_{上}}y^3dxdy$.

(C) $\iint_S z^3dxdy=0$.　　(D) $\iint_S z^3dzdx=2\iint_{S_{上}}z^3dzdx$.

【　】

(4) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)存在一组不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

【　】

(5) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的

(A)充分必要条件.　　(B)充分而非必要条件.

(C)必要而非充分条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

【　】

(6)设 A、B 为两个随机事件,且 $A\subset B$, $P(B)>0$,则下列选项必然正确的是

(A) $P(A)<P(A|B)$.　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$.

(C) $P(A)>P(A|B)$.　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$.

【　】

三、(本题满分8分)

设方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$,其中 F 具有连续的二阶偏导数,且 $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.证明

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

四、(本题满分 12 分)

在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$上某点 A 处作一切线,使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为$\frac{1}{12}$.试求 A 点的坐标和该图形绕x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V.

五、(本题满分 12 分)

试将$\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{0}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$ 化为球坐标系下的累次积分,其中 f 为连续函数,$b>a>0$.

六、(本题满分 12 分)

设有连结点 $O(0,0)$和 $A(1,1)$的一段向上凸的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$,对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点$P(x,y)$,曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为x^2,求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

七、(本题满分 12 分)

已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$,$0\leqslant x\leqslant 1$.

(1)证明:$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$;

(2)计算$\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $u_1(x)$和 $u_2(x)$分别满足下列关系式:

$$u_1'=a(x)u_1+v(x),\ u_1(0)=C,$$
$$u_2'\leqslant a(x)u_2+v(x),\ u_2(0)=C,$$

其中 $a(x)$,$v(x)$在 $x\geqslant 0$ 上连续,C 为常数.证明:当 $x\geqslant 0$ 时,$u_2(x)\leqslant u_1(x)$.

九、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

十、(本题满分 10 分)

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$,其中 k 为实数,$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.求对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似;并求 k 为何值时,$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

十一、(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

随机变量 Y 的分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且 $P\{XY=0\}=1$.求:(1) X 与 Y 的联合分布律;(2) X 与 Y 是否相互独立,为什么?

十二、(本题满分 9 分)

设总体 X 服从区间 $(0,\theta)$ 上的均匀分布,$(X_1,\cdots,X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本.证明:

(1)估计量 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$ 与 $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 都是未知参数 θ 的无偏估计;

(2) $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

2003年研究生入学统一考试(理工类)

数学一 模拟试卷(三)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} =$ ________.

(2)设 $f(x)$ 连续,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$ ________.

(3)微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2+1}{y^4-2xy}$ 的通解为________.

(4)已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一组基,则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}=$ ________.

(5)袋中有5张卡片,每张卡片上分别写有数字1,2,3,4,5,从中不放回地取出3张卡片,则取到的3张卡片中最大数与最小数之差等于3的概率为________.

(6)设随机变量 $X\sim N(1,4)$,随机变量 Y 服从参数 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 的指数分布,其密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

而且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{X,Y}=\dfrac{1}{2}$,则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$ ________.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$,则当 $n\to\infty$ 时,正确的是

(A)如 y_n 是无穷大,则 x_n 是无穷小.

(B)如 y_n 是无穷大,则 x_n 是无穷大.

(C)如 x_n 是无穷小,则 y_n 是无穷小.

(D)如 y_n 是无穷小,则 x_n 是无穷小.

【 】

(2)设函数 $r(\theta)$ 可导且 $r(\theta)>0$,则在极坐标系中,由两根射线 $\theta=0$ 和 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,以及曲线 $C:r=r(\theta).\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 所围图形绕极轴旋转一周所生成的旋转体的体积 $V=$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}r(\theta)\cdot 2\pi r(\theta)\cdot r(\theta)\mathrm{d}\theta$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}r(\theta)\cdot 2\pi r(\theta)\cos\theta\cdot r(\theta)\mathrm{d}\theta$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{3}r(\theta)\cdot 2\pi r(\theta)\sin\theta\cdot r(\theta)\mathrm{d}\theta$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(r(\theta)\sin\theta)^2\cdot(r(\theta)\cos\theta)'_\theta\mathrm{d}\theta$.

【 】

(3)设 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0$.则三重积分 $\iiint_\Omega(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}V=$

(A) $\iiint_\Omega 3\mathrm{e}^z\mathrm{d}V$.

(B) $\iiint_\Omega(2\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}V$.

(C) $\iiint_\Omega 3\mathrm{e}^x\mathrm{d}V$.

(D) $\iiint_\Omega(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}V$.

【 】

(4)设 n 维列向量组

$$(\text{Ⅰ})\quad \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$$

$(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组

$$(\text{Ⅱ})\quad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$$

线性无关的充分必要条件是

(A)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B)向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D)矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

【 】

(5)设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是 n 阶实对称矩阵,则二次型 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2$ 是正定二次型的充分必要条件是

(A)行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(B)行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(C)行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$.

(D)顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|>0\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

【 】

(6)设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{8}, & x=-1,\\ ax+b, & -1<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

又已知 $F\{X=1\}=\frac{1}{4}$,则

(A) $a=\frac{5}{16}, b=\frac{7}{16}$.

(B) $a=\frac{7}{16}, b=\frac{9}{16}$.

(C) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$.

(D) $a=\frac{3}{8}, b=\frac{3}{8}$.

【 】

三、(本题满分 8 分)

求椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 与锥面 $z^2=3x^2+y^2$ 的交线在点 $M(1,-1,2)$处的切线方程.

四、(本题满分 12 分)

计算 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy\int_0^{y} e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}dx$.

五、(本题满分 12 分)

求 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

六、(本题满分 12 分)

计算下列曲线积分

$$\int_{\widehat{AMB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy,$$

其中 $\widehat{AMB}$ 为连接点 $A(\pi,2)$ 与点 $B(3\pi,4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线,且该路线与线段 $\overline{AB}$ 所围图形的面积为 2.

七、(本题满分 12 分)

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$的和.

八、(本题满分 10 分)

位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上距原点 1 个单位的 A 点处的敌舰发射制导鱼雷,且鱼雷永远对准敌舰,设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线行驶,又设鱼雷的速度是敌舰的 5 倍,求鱼雷的轨迹曲线方程及敌舰行驶多远时,将被鱼雷击中.

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为 $m\times n$、$n\times p$、$p\times s$ 矩阵,而且秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,$r(\boldsymbol{C})=p$,及 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{0}$,证明:$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

十、(本题满分 10 分)

求一个正交变换,化二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

成标准形.

十一、(本题满分 9 分)

设随机变量 X 服从区间 $(0,2)$ 上的均匀分布，$Y=2X^2+1$，试求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$，并计算概率 $P\{Y<2\}$.

十二、(本题满分 9 分)

设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个简单随机样本 $(n>1)$. 令

$$\hat{\lambda}_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \hat{\lambda}_2=n[\min(X_1,\cdots,X_n)],$$

试比较关于 λ 的两个估计量 $\hat{\lambda}_1$ 与 $\hat{\lambda}_2$ 哪个更有效?

2003年研究生入学统一考试(理工类)

数学一　模拟试卷(四)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}=$ ________.

(2)微分方程 $y''+4y=x\cos 2x$ 的待定特解 $y^*=$ ________.

(3) $\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x=$ ________.

(4)已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-3 & -a & 3\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -b & 1\end{vmatrix}=0$,则矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}5 & a & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & b & 1\end{vmatrix}$ 有一个特征值 ________.

(5)设 $P(A)=0.8,P(A-B)=0.2$,则 $P(\overline{AB})=$ ________.

(6)设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\alpha>-1$ 为未知参数,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本.则参数 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}=$ ________.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)下述关于 $f'_+(a)$ 和 $f'(a+0)$ 的结论中,正确的是

(A)如 $f'_+(a)$ 存在,则 $f'(a+0)$ 存在.

(B)如 $f'(a+0)$ 存在,则 $f'_+(a)$ 存在.

(C)如 $f'_+(a)$ 存在,且 $f(a+0)=f(a)$,则 $f'(a+0)=f'_+(a)$.

(D)如 $f'(a+0)$ 存在,且 $f(a+0)=f(a)$,则 $f'_+(a)=f'(a+0)$.

【　】

(2)已知直线 $L_1:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z-1}{5}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$,则

(A) L_1 与 L_2 平行.　(B) L_1 与 L_2 垂直.

(C) L_1 与 L_2 相交但不垂直.　(D) L_1 与 L_2 是异面直线但不垂直.

【　】

(3)下列四个级数中,发散的级数是

(A) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{\pi^n n!}$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\sin n^2)\ln^3 n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$.　(D) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{\ln n}\right)\pi\right]$.

【　】

(4)记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1.　(B)2.

(C)3.　(D)4.

【　】

(5)设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$$ (未标出处为0),

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A)合同且相似.　(B)合同但不相似.

(C)不合同但相似.　(D)不合同也不相似.

【　】

(6)设 X 与 Y 为两个随机变量,且

$$P\{X\geqslant0,Y\geqslant0\}=\frac{3}{7},\qquad P\{X\geqslant0\}=P\{Y\geqslant0\}=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant0\}=$

(A) $\dfrac{16}{49}$.　(B) $\dfrac{5}{7}$.　(C) $\dfrac{3}{7}$.　(D) $\dfrac{40}{49}$.

【　】

三、(本题满分8分)

计算二重积分 $\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中区域 $D:x^2+y^2\leqslant Rx\,(R>0)$.

四、(本题满分 12 分)

设$\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ e^y\sin t-y+1=0, \end{cases}$ 求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

五、(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中 S 是 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geqslant 0)$的上侧.

六、(本题满分 12 分)

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^{x_0}(2+t^2)e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0, \\ A, & x=0. \end{cases}$

确定 A 使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内任意次可导,并求 $f^{(8)}(0)$,$f^{(9)}(0)$.

七、(本题满分 12 分)

已知在 $x>-1$ 上有定义的二阶可微函数 $f(x)$满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0 \text{ 和 } f(0)=1.$$

(1)求$f'(x)$;

(2)证明:当 $x\geqslant 0$ 时,$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在$[-L,L]$上连续,在 $x=0$ 可导,且$f'(0)\neq 0$.

(1)求证:$\forall x\in(0,L)$,$\exists\theta\in(0,1)$使$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$;

(2)求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,证明矩阵秩的关系式

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$$

十、(本题满分 10 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$,及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1)a、b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2)a、b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3.\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一线性表示式?并写出该表示式.

十一、(本题满分 9 分)

验收一批共有 60 件的产品.按照验收规则,随机抽取 3 件,只要 3 件中有一件是不合格品,就拒收整批产品.设验收时不合格品被误判为合格品的概率为 0.03;而合格品被误判为不合格品的概率为 0.01.如果这 60 件产品中有 3 件为不合格品,问这批产品被接收的概率是多少?

十二、(本题满分 9 分)

(1)设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布,其中 $\lambda>0$ 为未知参数,$(X_1,\cdots,X_n)$ 是从该总体中抽取的一个样本,试求 $p_0=P\{X=0\}$ 的极大似然估计量.

(2)某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从 Poisson 分布,求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计.使用下表中的 122 个观测值.下表中,r 表示一扳道员在某五年内引起严重事故的次数,s 表示观察到的扳道员的人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

2003年研究生入学统一考试(理工类)

数学一　模拟试卷(五)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1)已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=5,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=3$,则$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2=$__________.

(2)设$\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x(x-2)},\displaystyle\int_1^3\dfrac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x=$__________.

(3)将以y做因变量,x做自变量的微分方程$y''+(4x+\mathrm{e}^{2y})(y')^3=0$化为以$x$做因变量,$y$做自变量的微分方程________________.

(4)已知$\lambda=8$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&a&2\\4&2&3\end{bmatrix}$的一个特征值,则$a=$__________.

(5)设随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$,且已知$P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}=$__________.

(6)区域D是由直线$y=x$及曲线$y=x^2$所围成,二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布,则(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)=$________________.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)命题甲:若$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=a,\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=a$.

命题乙:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$不存在.

以下结论正确的是

(A)甲正确,乙不正确.　　(B)甲、乙都不正确.

(C)乙正确,甲不正确.　　(D)甲、乙都正确.

【　　】

(2)设$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某邻域内二阶偏导数连续,又记$f''_{xx}(x_0,y_0)=A,f''_{xy}(x_0,y_0)=B,f''_{yy}(x_0,y_0)=C$,则下列关于$f(x_0,y_0)$是否为极值的四个命题中,错误的是

(A)如$AC-B^2>0$,则$f(x_0,y_0)$是极值.

(B)如$f(x_0,y_0)$是极值,则$AC-B^2\geqslant0$.

(C)如$f'_x(x_0,y_0)\neq0$,则$f(x_0,y_0)$不是极值.

(D)如$f(x_0,y_0)$是极小值,则$f'_x(x_0,y_0)=0$且$A\geqslant0$.

【　　】

(3)下列命题正确的是

(A)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

(B)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

(C)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.

(D)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$条件收敛.

【　　】

(4)设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},$$

则3条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0,$$

(其中$a_i^2+b_i^2\neq0(i=1,2,3)$)交于一点的充要条件是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(C)秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.

【　　】

(5)设n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$满足关系式$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵,则必有

(A)$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$.　　(B)$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$.

(C)$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$.　　(D)$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

【　　】

(6)设$X_i(i=1,2,3,4)$的分布如下,则

$$P\{X_i>E(X_i)\}\neq P\{X_i\leqslant E(X_i)\}$$

的是__________.

(A)$X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$.

(B)X_2服从区间(a,b)上的均匀分布.

(C)X_3的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0.\end{cases}$

(D)X_4的密度函数为$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

【　　】

三、(本题满分8分)

设$y=f(x,t)$,而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的函数,其中f、F都具有一阶连续偏导数.试证明