



清华大学美术学院 主编

高等艺术院校艺术设计学科专业教材

College

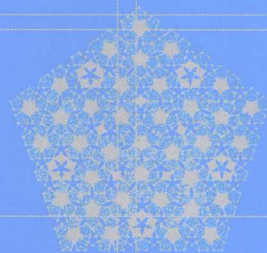
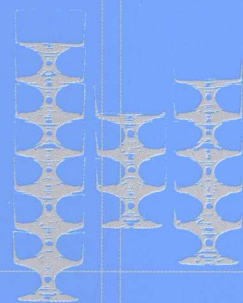
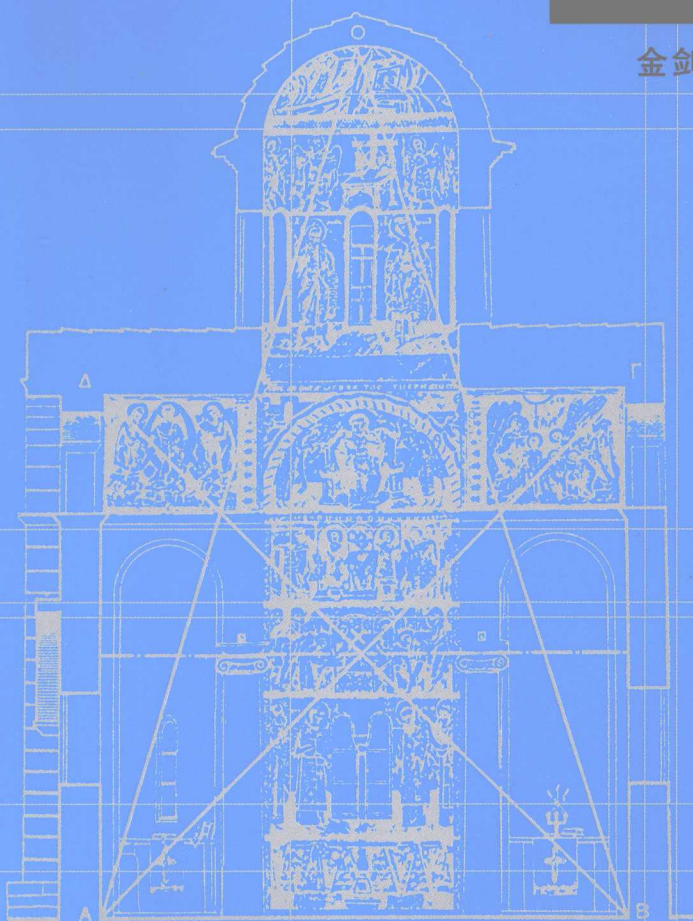
Textbooks on

Art & Design

数理·仿生造形设计方法

金剑平 著

湖北长江出版集团 湖北美术出版社





清华大学美术学院 主编

高等艺术院校艺术设计学科专业教材

College

Textbooks on

Art & Design

数理·仿生造形设计方法

金剑平 著

湖北长江出版集团 湖北美术出版社

编辑策划：王开元

责任编辑：余 杉 吴海峰

技术编辑：程业友

整体设计：陈 楠 刘嘉鹏

图书在版编目 (CIP) 数据

数理·仿生造形设计方法 / 金剑平 著

—武汉：湖北美术出版社，2009.3

高等艺术院校艺术设计学科专业教材

ISBN 978-7-5394-2559-7

I.数…

II.金…

III.造型设计—高等学校—教材

IV.J06

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第004209号

数理·仿生造形设计方法 / 金剑平 著

出版发行：湖北美术出版社

地 址：武汉市雄楚大街268号

湖北出版文化城B座

电 话：(027)87679520 87679521 87679522

传 真：(027)87679523

邮政编码：430070

h t t p : www.hbapress.com.cn

E-mail: hbapress@vip.sina.com

制 版：武汉市盛美联广告设计有限责任公司

印 刷：湖北恒泰印务有限公司

开 本：889mm×1194mm 1/16

印 张：6

印 数：3000册

版 次：2009年3月第1版 2009年3月第1次印刷

定 价：38.00元

序

与其他专业相比，艺术设计专业有一个鲜明的特色，这就是：经济越发达，国家和社会对艺术设计专业的人才需求就越迫切、越旺盛。改革开放以来，随着我国经济的持续高速发展，国民生活水平日益提高，我国的艺术设计教育事业也得到社会空前的关注而蓬勃发展。目前，不仅艺术类院校大力发展艺术设计教育，而且几乎所有的高等院校都在不同程度上以不同的规模和层次开设艺术设计专业，开展艺术设计教育。近几年，每年报考艺术设计的考生数量和各高校的招生数量不断攀升，办学规模不断扩大，办学层次也不断提高。社会的强劲需求，广大考生的热切期望，各高校的办学积极性，都极大地促进了这个专业的发展。但由于办学条件的局限，特别是师资力量和教学经验需要一个积累过程，这种快速发展也对人才培养质量提出严峻的挑战。

清华大学美术学院的前身是中央工艺美术学院，艺术设计专业教育是我院的特色和优势，50多年来，积累了丰富的教学经验，为国家的经济和文化建设培养了数以千计的高质量人才。这些人才在全国各相关行业和高校的教学、科研岗位上发挥着重要作用。为进一步满足社会需求，20世纪末，我们组织骨干教师编写了一套艺术设计专业的自学高考教材，该套教材出版以来，得到社会各界和广大自考生的好评，收到良好的社会效益，获得清华大学优秀教材一等奖。针对目前艺术设计专业本科

教育的发展现状，为进一步提高本科教学水平，最近，我们又在2002年版自考教材的基础上，精选一批具有代表性的课程，组织一批在教学一线执教多年，教学经验丰富的教授、副教授和中青年骨干，编写出这套艺术设计本科系列教材。这套教材不仅注重艺术水平和实际操作性，还结合现状，具有一定的系统性和前瞻性；不仅重视基本功训练和专业基础教学，还注重理论修养的提高和设计思维的创新。基础与专业创新并重，理论与实践相结合，艺术性与科学性兼顾是艺术设计专业人才培养的要求，也是这套系列教材的特色。希望这套教材的问世，能为我国艺术设计专业创新型人才的培养发挥应有的作用，也期待各位专家、学者和社会各界不吝赐教。

清华大学美术学院院长 李当岐

2008年7月于清华园

序

艺术设计专业所体现的知识交叉、传承创新、多元开放、以及前瞻与实验性特征，使其特色鲜明，并与时代的发展紧密相关。没有一套教材能够解决所有的问题，但一套好的教材，不仅能够使学生获取知识，掌握技能，更应该能够开启心智，培养和激发学生的思维和创造力，这一点在今天尤为重要。

学校的第一产品是课程，课程的质量如何直接与教材相关。教师根据教材授课，学生通过教材理解与消化学习内容，可见教材在人才培养环节中的重要作用。易懂、可读、实用、好用，这是对教材编纂的基本要求，如果能够成为学生们的良师益友，那就更理想不过了。

本套针对本科生课程教材的编纂工作是建立在2001-2003年我院主编出版的《高等教育自学考试艺术设计专业指定教材》基础上的，其主旨，一是对我院的本科教学工作进行阶段性总结，进一步规范我院专业教学用书；二是希望与兄弟院校在课程建设方面进行有效沟通与交流；三是为我国高等教育艺术设计专业课程建设的健康发展提供参数。

参与此次教材编写的大多是我院有多年教学实践经验的骨干教师，其中不乏在本专业领域卓有成绩的教授学者。他们在多年的教学实践、理论研究中积累了丰富的经验，对专业和教学有着深刻的理解和见解。这为教材的质量以及尺度的

把握提供了保障。

本套教材共分基础和专业两部分，专业部分又分视觉传达设计、工业设计、环艺设计三大类，是一套适合高等院校本科层次艺术设计专业基础和专业主干课程的系列教材。

以发展的眼光来看，任何教材都有其生命的周期，必然存在这样那样的缺憾与不足。我们诚心期望得到同行的批评指正。在这里也对湖北美术出版社诚挚的委托和编辑人员的努力工作谨表衷心的感谢。

秩秩大猷，圣人莫之。

荏染柔木，君子树之。

清华大学美术学院副院长 何 洁

2008年10月于清华园

目 录

导言	001		
第1章 数理的基本认识	002	第5章 数理造形方法	034
1.1 形式数理的起源	002	5.1 几何形的数理造形	035
1.2 西方对数理的认识	003	5.2 黄金分割的数理造形	042
1.3 东方对数理的认识	005	5.3 螺旋线的数理造形	050
1.4 造形中的数理节奏	008	5.4 曲线的数理造形	056
1.5 数理形式发展的代表人物	010	5.5 无理数的数理造形	063
		5.6 麦比乌斯环	065
第2章 自然中的数理形态	016	5.7 分形的数理造形	067
2.1 人体中的数理形式	017	5.8 数轴的数理造形	069
2.2 植物中的数理形式	022	5.9 图案中的数理造形	071
2.3 动物中的数理形式	025	5.10 控制线与模数中的数理	076
第3章 数理比例设计的基本尺度	028	第6章 仿生形态的数理造形	078
		6.1 仿外形造形	080
第4章 形式数理的解读	030	6.2 仿功能造形	084
4.1 五角星的形式理解	030	6.3 仿内在数理造形	086
4.2 “卍”字形的形式理解	031		
4.3 穆斯林的拱形形式理解	032		
4.4 西藏“唐卡”的图形数理	033		

导 言

什么是造形呢?现在人们几乎把所有的形态都称之为造形。例如说:这棵树的造形很好看;这辆汽车的造形很美等等。把自然的形态和人工的造形不加以区别统称为造形,而这在严格的意义上是不准确的。所谓造形应该是指人的思想意识,通过可视的或可以触摸的材料所表达的形式和内容。造形应该是指人类创造形体的过程和结果。造形首先是人的思想意识的体现,创造或造物活动是人类特有的一种活动方式。不管你是在无意识中还是有意识中所创造的造形结果都可以称之为造形。无意识本身就是一种人类的意识。这可以说是对造形的真正诠释。

造形和造型有什么区别呢?在我们的日常生活中常常出现这两个词:造形和造型。在艺术类的活动中人们更多地运用“造形”一词,而在工业制造业中更多地是运用“造型”一词。辞典中对造形的解释是:造形是指外形,从某种意义上讲更注重的是轮廓。而造型呢?我们望文生义就可以得出它是用土来进行造形的,一般是指建筑的形体或者是模具的造型。辞典上解释:造型为形体或用土制成的模具。从个人的理解上造型更加强调了体量的关系,然而约定俗成都是用造形一词来表述形体。

现在书店里对立体造形介绍的书可谓是汗牛充栋,应有尽有,这也许是这个时代学习设计人的一种福份。然而这些书籍有一个共同的名称为立体构成,这些立体构成逃脱不了折纸的陋巢,我们不能否定立体构成的意义和方法,用折纸来代替了对立体造形的规律和方法的真正探求,立体构成所涉及的面非常广大:有社会文化层面、生理层面、心理层面以及工艺加工等方面。所传授的折纸方法只是冰山一角,然而作为基础教育的全部它涉及的面又太窄,我们不能以一概全,一叶障目而不见泰山。

我们回顾一下作为现代设计基础教育的发展地——德国包豪斯的基础课教学。它是从一个学习设计的人整体思路出发而设置教学课程的,虽然伊顿说教学是一种方法的探索,然而他融入了情感的体验、视觉的感受、材料的特性与效果、工艺精良的体验来全面培养一个设计专业学生的素质。然而经过日本改良后移植到中国设计教育的立体构成这些精髓几乎都看不见了,剩下的是表面形式的折纸游

戏。应该说日本的立体构成在一些方法和技巧中针对某些专业是有启发作用的,而作为学习设计专业的学生基础课,我们不能从一个专业或局部去培养,而是应该全面地去了解掌握,并提高造形的能力及方法。现阶段图书中较为系统地从感性和理性的二个角度去探讨造形法则太少了,有的是局部的、有的甚至是一知半解的。

自从人类产生建筑以来便产生了许多造形设计方法。受到古希腊理性主义地影响,早期的造形方法都倾向于用数理的理性方法表达,这大概是由于建筑需要精确的计算吧!而这些理性的表达方法及解释散见于各类的建筑造形书籍中,而较少对这些方法进行归纳,在我们现有的教材中对方法的介绍非常少,只是对案例和实际操作介绍更多一些。人们常常错误地认为造形的创造是依据感觉而言的,无法用语言来描述灵感的闪现来源,不可否认在现实的创造中确有部分是这种状况,这种状况也是长期的观察积累以及从冥想中得到的启迪,然而大部分造形的创造是有一定方法可以依循的。且这些在造形设计的历史长河中产生的各种造形类别是可以加以归纳的。本书主要是总结了前人在设计过程中所用的一些常见的数理方法,并举例加以分析,以期待同学们在汲取营养的同时能创造出更加多彩的造形,总结出更多的丰富手段和方法,书的脉络构成主要是以中西方造形形式的形成作为切入点,通过这一介绍能使同学们了解造形发展的历史渊源以及对构成这些造形轨迹中作为点的转折作用的人物介绍,同时深入到我们日常生活中:常见的一些形式符号是从何而来,它们的内在意义和方法又是什么?后几章主要介绍数理中的形式以及介绍历史上出现的名作并加以分析,最后一章主要介绍了仿生在设计中的运用,从一些常被人忽略的自然现象中得到新形式启发的作品分析。

这些方法和例子对造形设计的构思是具有启发性的,在教学中同学们得到了很大的收益,眼界上得到了开拓,方法上得到了了解,通过对这些作品的仔细分析同学们更加深刻地认识到方法的重要性,更加深切地理解了设计的内涵。并想通过此书抛砖引玉将我国的设计理论推向一个新的高度。

第1章

数理的基本认识

1.1 形式数理的起源

西方文明的楷模是古希腊、罗马时代的文化艺术。在漫长的西方历史中,古希腊、罗马精神有时像奔腾的大河,有时却如山涧的涓涓细流从不间断。古希腊、罗马之美的特征在于:一方面确立了造形上的形而上学,另一方面却失去了古埃及壁画中的色彩象征性。发源于古希腊、罗马而后形成的欧洲文化的基本思想是来源于石头,古希腊的巴特农神庙、巴黎圣母院经历了长期的沧桑,至今仍以那壮丽的美姿为世人传颂,它们都是用坚固的石块垒砌起来的。我们看到的流传至今的雕塑都是以白蜡似的大理石为素材,可以说欧洲的文化造形美术是以石块为基础的,从而形成了具有独特风格形式和色彩的基本形态。

欧洲石雕最重要的理想是一种量感的美,它不同于亚洲和中东地区,众神题材的大理石圆雕注重体积感的表现,而这种体积感的表现更能表现出光与影的对比,加强了作品的体积感与量感。也许是材料的开采过程所产生的形式和古希腊人以理性的合理主义精神为出发点,他们将宇宙看作由球体或正多面体所构成的。也许正是古希腊人重视几何学形体的观念意外地导致了忽视色彩作用的局面。在古希腊人看来,自然中一切物质都由土、火、气、水这四种元素按照不同比例混合而成。希腊的哲学家恩培多克勒认为基本元素只有四种:水、气、火、土。这种理论主宰化学科学近两千年之久,到了柏拉图手里,它又得到了新的发展。柏拉图在这方面正是近代主要传统科学的先驱者,形成了“几何或数学原子论”,并且认为一切事物都可以化为几何,柏拉图为我们提供了用四种元素解释物理世界的方法。当然,柏拉图囿于四种元素,不能不说是一种局限性,但运用的假说是数学式的,从数的观点看,世界最终是可理喻的。火原子为四面体,土原子为正方体,气原子为八面体,而水原子为二十面体。正多面体的发现对西方的早期文明产生过很深的影响,正四面体、正方体、正八面体与正二十面体分别代表火、土、气和水的的基本粒子。把这些立体分解为构成它们的三角形再对其重新编排,就能实现元素之间的变换。对于所有五种正多面体的描述是柏拉图给出的,在《蒂迈欧》中,他讲了如何用正三角形、正方形和正五边形构造出这些正多面体。不过很显然,正多面体的数量比基本元素多出一个。十二面体没有对应的基本元素,这不能使所有柏拉图的信徒们满意。于是一些人提出了第五种元素的存在。例如亚里斯多德提出了“以太”。它是一

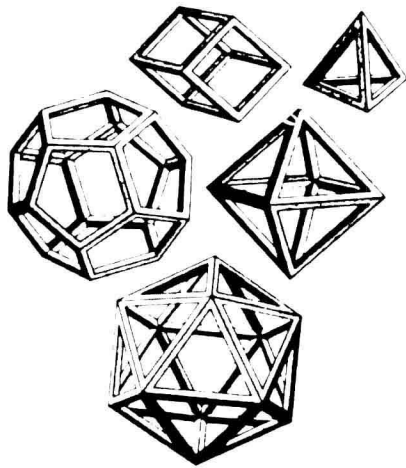


图1-1-1 五个正多面体

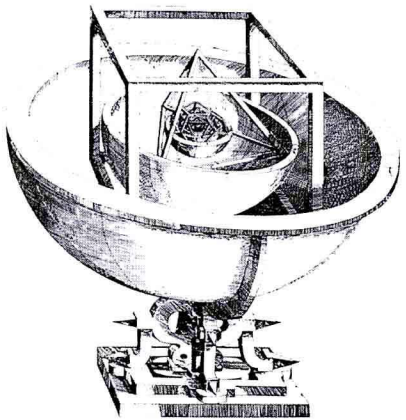


图1-1-2 托勒密天体运行图

种充满整个宇宙的物质,是第五种元素(精髓)。它弥漫在所有物质中,可确保运动和变化按照自然规律发生。有关空间里存在一种作为光的必要传播媒介的物质这一观点一直流传了下来。

如果多面体的各面都是全等的正多边形,那么这个多面体就叫做正多面体,虽然在平面上有许多正多边形存在,但在空间只能构成五种不同的正多面体;正四面体,正六面体,正八面体,正十二面体,正二十面体,即按其面数的多少命名。五种不同的正多面体通常称为柏拉图体,但这并不准确,正四面体,正六面体应该归功于毕氏学派,而正二十面体应该归功于狄埃太图斯(Theaetetus)。我们凭直觉就可以很容易地看出为什么只存在五个柏拉图体。封闭的平面图形中边数最少的是三角形,如果要在三维空间中围绕一点构造立体图形最少需要三个三角形。四个三角形和五个三角形都能构成多面体,而整个就会有重叠,所以能构成多面体的情况只能是三个、四个或者五个三角形。对正方形来说,三个正方形围绕一点构成一个正方体,但四个就会有重叠。五边形只能有三个,四个五边形平面就无法容纳了。也就是说,只有三个、四个、五个三角形,三个正方形,三个五边形才可能在三

维空间中围绕一点构造多面体。在五种正多面体中,只有这—种的各个面不是由两种基本三角形,而是由正五边形组成的,正五边形是毕达哥拉斯学派的神秘符号之一。它的构造涉及到无理数,而且正十二面体看起来比其它四个立体都要圆一些,因此柏拉图用它来代表世界。正多面体是一种三维立体图形,各面由规则的多边形组成——所有面、边和顶角都相等。正多面体总共只有五种少得出奇。在几何学上,欧几里德为纪念柏拉图把它们统称为“柏拉图体”,尽管毕达哥拉斯早在柏拉图出生之前200年就发现了这五种正多面体。

柏拉图立体的对称性产生了其他有趣的属性,例如,六面体和八面体有着相同的边数,但是它们的表面数和顶点数正好相反(六面体有6个面、8个顶点,而八面体有8个面、6个顶点)。十二面体和二十面体也是类似,它们都有30条边,十二面体有12个面、20个顶点,而二十面体则正好相反。

卢克·贝森1997年的科幻电影《第五元素》标题中的“第五元素”代表了一种生命力——能够化腐朽为神奇。

在古希腊的理性主义精神的倡导下,毕达哥拉斯及柏拉图的哲学理念推动下,以及欧几里德的数学理念的普及下,在古希腊形成了以几何形的球体和正多面体为审美价值取向的特征。从那个时期起以古希腊为代表的西方造形文化形成了以球体和正多面体为主要形式的建立形态。西方在追求形式的至美中不遗余力地追求其球体和正多面体的形式建筑,历史上曾出现了多次重大建筑因追求圆拱顶而倒塌的事件。而这种对形式的认识一直影响到当今的审美。

东方文明来自于自然界中的元素—木,无论它的思想、文学、哲学都能看到其影子。中国朴素的唯物主义所形成的世界观认为“天圆地方”,天是由近似于圆锅的锅盖盖住的,而锅脐便是九天。地是方的,有前朱雀,后玄武,左青龙,右白虎的方位图腾。自然的木与线的艺术结下了很深的姻缘,并且,因受到中国人观察世界和表达世界的散点透视影响,形成了在中国描绘事物几乎都用线来表示物体的轮廓,然后再填色,而并不像西方那样用色来造形。在东方并没有象古希腊那样产生过用元素和几何的方法来解释世界,然而它产生了“天圆地方”的认识论和“阴阳五行”的方法论。这些理论和西方的元素、几何论是不谋而合的,它们至今一直深刻地影响着中国人的审美,影响着中国的造形文化。至今我们对圆的解释中首先是对“天”的语义表达:天坛是祀天之用的,所以在设计礼制规格中为最高。天坛的整个设计是以圆为母题进行展开的,而且这种圆是平面的圆并不是立体空间的球形圆。每逢祀事都会运用各种与元素相对应的色彩、器物、方位等等来表达对世界的物质构成膜拜。而地坛是祀地用的,所以在设计上运用的母题都以“方”形为主。为了体现人们敬畏天地而后达到敬畏皇权之意,在许多的庙宇和神坛的出入口的门洞中依然能够看到圆形的门洞,其意充满了对天地的崇拜。在生活中过去使用的铜钱和筷子其组成的基本形都是圆和方,除其功能外其意不言而喻。

1.2 西方对数理的认识

数字的起源

数字只是数学的一部分,然而数字的产生以及加、减、乘、除等基本数字运算的出现标志着数学的诞生。早在大约3万年前的旧石器时代,有证据显示我们的祖先就已经认识了数字,并且对它们进行了分类。进化史上的偶然使我们的双手各有5个手指,总共10个手指,再加上10个脚趾,这就顺理成章地支持了5进制、10进制和20进制。

古老美索不达米亚的计数法

在巴比伦人以及之前的苏美尔人生活的年代。普遍的计数单位是60(60进制)。时间流逝,我们已经无法追溯60进制的由来。也许合并了常见的5进制和12进制;或者源自数字360,可能人们认为一年有360天;也可能是因为60能够同时被1、2、3、4、5、6整除。尽管60进制早已成为历史,但它延续至今,比如1分钟有60秒,1小时有60分钟。

玛雅人的计数法

古代中美洲一直沿用20进制。也许是由于当时的居住者还没有鞋穿(裸露的手指加上脚趾总共20个),才自然而然地产生了20进制。到了玛雅人的时代,天文学家、数学家、建筑工程师辈出,数字0最终出现,20进制也在这时正式形成。因此,玛雅人被公认为美洲大陆上第一个发现0的。法国人使用10进制的历史和其他欧洲国家一样长,但法语中的80、直意为4个20,也许还留下了20进制留下的影子。

印度人和阿拉伯人的伟大遗产

希腊人、埃及人、希泰人、亚述人、腓尼基人(通常被认为是音标的发明者)以及罗马人都没能创造出代表“无”的数学符号。这一符号最终出现在迥然不同的两个地域。公元前1世纪,玛雅人发明了数字0。印度的数学家和天文学家则早在公元前4世纪就已将0应用于10进制计数法中了。到公元前400年,阿拉伯的天文学家阿雅哈塔使0正式成为10进制体系的10个符号之一。

公元750年前后,忙于传播伊斯兰教的阿拉伯人入侵印度。与印度人的交锋使他们第一次见识了10进制。它由1-9的9个符号加上0组成。在《古兰经》的指引下,伊斯兰学者专注于研究自然,并以此作为对神的崇拜。这种做法为后来欧洲的伟大科学家们树立了榜样。

伊斯兰科学和数学的创造性发展直到哲学家、数学家海亚姆之后的几个世纪,甚至15世纪的奥斯曼土耳其时代仍然硕果连连。毫无疑问,大半个世纪以来,穆斯林的科学家、数学家们远远超过了他们的欧洲同行。

各种文明都处于崛起和衰亡的永世轮回之中。9世纪中叶,当伊斯兰科学攀登上新高时,欧洲的研究也空前深入。昔日的罗马人是伟大的建设者,他们重实践、轻理论。而希腊人作为罗马文化的先辈,却精于理论研究,涌现出许多杰出的哲学家、数学家、科学家。阿拉伯人、波斯人等早期穆斯林对哲学、数学和科学有着浓厚的兴趣。与他们不同的是,奥斯曼土耳其人偏爱建筑、工程和拓展本已广阔的疆土。但这种

局面在15世纪末、16世纪初的佛罗伦萨文艺复兴开始扭转，随后的工业革命更是加速了这一变化。对于伊斯兰科学文明之所以会衰落有很多推测。一种观点认为伊斯兰文化被一种普遍的忧郁、痛苦之情的宿命论所笼罩。另一种观点较为可信，认为12世纪时巴格达兴起了一场文化运动，推崇信仰和教条，反对理性思辨和直接证明。这一运动的发起人是波斯人阿尔戈扎利。伊斯兰科学发展由盛转衰还有一个原因，那就是哲学思想的蜕变。

长度

我们用长度来回答诸如“多远”、“多长”、“多高”等问题。历史记载的最早的长度单位是“肘长”，即从张开的手掌的中指指尖到手肘的长度。这一长度单位可能出现在公元前6000年。《圣经》中诺亚方舟的长度是300肘长；约140米。

罗马人最先开始使用“英里”，后来英国人沿用下来，并由英国殖民者带到了美洲。1英里的长度基于罗马军团士兵走两步的距离(约5英尺)的1000倍。相比之下，“英尺”似乎更符合统计学原理。1英尺的长度是以40个英国人的右脚长度的平均值为参照而规定的(这40个人是周日早上最早走出教堂的40名男子)。

1670年，法国人盖柏·莫敦较为精确地测定了地球的周长，并建议将地球周长的一份作为长度的标准单位。1791年，最终将“1米”规定为“经过巴黎的那条纬线上、从北极到赤道距离的千万分之一”。莫敦还建议将“米”的10进位倍数“千米”(1000米)和10进制分数“厘米”(1/100米)作为长度标准。法国大革命之后不久，在化学家安托万·拉瓦锡的强烈推动下，法国开始实行公制。

按照经验来说，当人向右伸直右臂并直视前方时，1码等于右手手指指尖到右耳的水平距离；1米等于右手手指指尖到鼻尖的距离。1米约比1码长9厘米，而1英寸正好是2.54厘米。

1889年法国政府建立了一个国际标准局，并用铂铱合金制造了一把“标准米尺”(能够在各种温度条件下保持长度不变)。20世纪60年代，一种新标准的引入为全世界科学实验室的研究工作提供了更高的精确度。以氪86原子的橙红放射为基础，1米被规定为 $1.650\,763\,73 \times 10^6$ 个波长为 $6.057\,802 \times 10^{-7}$ 米的放射波的总长度。随着原子钟的产生，时间度量精确至极，甚至为规定标准米长开创了新方法，即以真空中的光速 c (固定为299 792 458米/秒)为量度单位，1米就等于光在 $1/299\,792\,458$ 秒中穿行的距离。

数字

数字1被认为是其他所有数字的创始者，因此其本身并不被当做一个数字；它还被用来表述理由；在几何中，数字1由点来表示，用以强调它是所有元素的创始者。

数字2是第一个女性数字，也是充满意见和分歧的数字。同样的观点也表现在中国宗教宇宙论中的阴阳学说，阴代表女性和负面的属性，像消极和黑暗，阳表示光明和男性气质。

数字2在许多语言中直到现在还和伪善、不可靠联系在一起。最初把2和女性联系在一起、把3和男性联系在一起，可能是来自女性乳房和男性生殖器外形的启发。在几何学上，2用线来表示(两点决定一线)，具有一维属性。

数字3可能是第一个真正的男性数字，同时也是和谐的数字，它结合了统一“1”和分开“2”。对于毕氏学派来说，3在某种意义上是第一个数字，因为它有“一个开始”，一个“中间”和一个“结束”(不像2，没有中间)。3的几何表达式是三角形(因为不在一条线上的三个点决定一个三角形)，具有二维属性。

数字4对毕氏学派来说，是公正和秩序的数字。在地球表面，四种风或方向为人类提供了必要的方位来了解他们的空间的坐标位置。几何学中，不在同一平面上的4个点可以形成一个四面体，具有三维属性。4的特殊地位还出于毕氏学派的另一种认识，即他们对10的态度。10是最受崇拜的数字，因为它代表了宇宙整体。而 $1+2+3+4$ 等于10的事实使10和4之间产生了密切的联系。同时，这一联系意味着10不仅包含了代表所有维数的数字，而且还包含了唯一性(由1代表)、两极性(由2代表)、和谐性(由3代表)以及空间和物质的属性(由4代表)。10因此是万物的数字，毕氏学派的菲罗劳斯约在公元前400年绝好地表达了它的这种性质——“卓越、强大和无所不能，它是神赐生活的起步和指南”。

数字6是第一个完美的数字，也是创造性的数字。“完美”是指该数字精确地等于其 $1/2$ 以下的所有数字之和，即 $6=1+2+3$ 。下一个这样的数字是 $28=1+2+4+7+14$ ，然后是496。当我们找到第九个完美数字时，它将是一个37位数。6也是第一个女性数字2和第一个男性数字3的乘积。希腊的犹太哲学家、亚历山大时期的菲罗一居大士(约前20年-40年)在著作中总结希腊的哲学和希伯来的典籍并提出，上帝之所以在6天内创造了世界，是因为6是一个完美的数字。同样的认识在圣奥古斯丁的《上帝之城》中也有详细的阐述：“并不是因为上帝在6天里创造了世界而使得6成为一个完美的数字，恰恰相反，上帝在6天里创造了世界是因为这个数字是完美的，而且它将永远完美，即使这6天的工作其实并不存在。”一些圣经的解说家把28也看做是上帝的一个基本数字，他们指出月运周期是28天。完美数字的魅力甚至渗透到犹太教里。犹太教信徒在祈祷时重复奇数次(3次，7次)12世纪时犹太教博士约瑟夫在他的著作《灵魂的愈合》中就提倡对这些数字进行研究。中东的宗教也有类似的态度，根据穆斯林的 tradition，预言家穆罕默德在奇数日结束斋戒。

数字5放到最后，旨在举例说明毕氏学派对数字的态度，还因为这个数字也和黄金比例的起源有关。5表示第一个女性数字2和第一个男性数字3的结合，因此它是第一个代表爱和婚姻的数字。毕氏学派使用了五角星形作为同仁会的标志，并称之为“健康”。

五角星形还和规则五边形——有5个相同的边和相同角

度的平面图形——有密切的关系。如果你把五边形所有的顶点用对角线连接起来就可以得到一个五角星形。这些对角线还在中央形成了一个小的五边形，这个五边形的对角线又可以形成一个五角星形和一个更小的五边形。这个过程可以无限进行下去，形成越来越小的五边形和五角星形。所有这些图形的惊人特性在于：如果你研究一下长度逐渐减少的线段，你会很容易地用基础几何证出每一条缩小的线段都比前一条线段短，而且它们之间的比例正好等于黄金比例。最重要的是，你可以用这个事实（即制造系列嵌套五角星形和五边形的过程可以无限进行下去）有力地证明五边形的对角线和边线的长度比不能用两个整数的比例来表示。

十一是罪恶。在德国剧作家、诗人席勒的戏剧《皮克罗米尼》中，占星家宣称：“十一是罪恶，十一背叛了十戒。”这表达了中世纪的观点。另一方面，费古纳齐数列的特性却与之相反，对它而言，11不是罪恶，而是美。假设我们把数列前十个连续数字相加： $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$ 。这个数字可以被11整除（ $143/11=13$ ）。数列中任何十个连续数字的和都可以这样。例如， $55+143+233+377+610+987+1597+2584+4181=10857$ ，10857能被11整除， $10857/11=987$ 。如果你仔细观察这两个例子，你会发现一些别的东西。任何十个连续数字的和都等于11与第七个数字的积。利用这个特性，你能够快速算出任何十个相连数字的和，让别人大吃一惊。

六十进制的特性。不知为何，古代巴比伦人的计算体系使用的是六十进制。虽然与巴比伦数字体系无关，但60在费古纳齐数列中起了一定的作用。费古纳齐数列因为要将两个连续数字相加以得到下一个数字而快速地变大。第五个费古纳齐数字是5，而第125个已大到59425114757 512643212 875 125。有趣的是，最后一个数字以60为周期重复（也就是说，每隔60个数字）。例如，第二个是1，第62个是4052 739 537 881（也以1结尾）；第122个是14 02836653 498 915 298 923 761，也以1结尾；第182个也是这样，等等。同样地，第14个数字是377；第74个是1304 969 544 928 657也是7结尾；如此类推。

1.3 东方对数理的认识

数字在中国传统文化中有着重要的作用，“数字”实际上是中国古代哲学思想中的一个重要概念，“术数”观可以说是中国人一种基本宇宙观和世界观。人们认为宇宙万物都在时间与空间中运动，人、天、地即宇宙万物的运动无一不受着一种“数”的制约，为了解释宇宙及人事的生灭规则，推测社会与人事的变化和发展趋向，即所谓预卜世事的气数和命运，我们的祖先巧用数字创造了术的数学，这里的数已经超越了语言文字和数学范畴，而成为了一种哲学观或者是宇宙观。所以，数在中国文化中绝不只是一个表示序列先后的数词，而是一种哲学。

数字一

在中国文化里“一”绝不仅仅只是一个数字的起始，“一”是世界的本源，是世界的起点。宇宙在最早期时就是一个不分天和地的混沌的“一”，一切都是从“一”当中产生的。因此，“一”是世界的起源，是世界的本源。

一切源于“一”，一切又最终归于“一”。老子说：“万物得一以生”。“一”在人们心目中成了最根本、最重要的东西。中国的气功讲“摄三归一”，中国伊斯兰教讲“三一”，佛教讲九九归一，都是把“一”看作是生命的源头、世界的本体、现象的归宿。无论现象多么纷繁，一切都起源于“一”又归于“一”，“一”实际上就是最全、最满、最好、最高、最本源的意思。

“一”在中国文化中具有上述那样一种特殊的内涵，在人们心中也具有一种特殊的地位，因此人们对它也有一种特殊的情感。对“一”的崇拜使得中国人在很多事情上都不知不觉地总是去求一，求全、求满。因此，中国人常常有一种“求一”的思维模式。这种求一、求全、求满的思想对中国人的思维、政治和文艺等都有很大的影响。

最小、最不起眼的数字“一”，却是一切万有的起源，最小的可以表现出最大的，最小的可以表现出最多的，最有限的可以表现出最无限的，这使中国人特别重视小中见大。老子说：“无，名天地之始”，强调“道生一，一生二”，然后再至于整个世界，所以在老子那里，一切都是从“无”和“一”当中产生的。最简单的能产生出最丰富的东西来，最丰富的看上去最少，最有味的看上去最无味。因此老子强调“大音希声、大象无形，大巧若拙”。反对人工过多雕琢的痕迹，追求一种平淡自然而含义无穷的表达方式。

中国的绘画也是这样，它的表现形式极其简单，以最简练的线条勾画出韵味无穷的世界，中国画中常常“留白”或者干脆只画一角，留下大量的空白让读者自己去想象，比如“马一角”、“夏半边”。这简单的形式甚至简单到无形式。

“一”是最少的、最简单的，因此它才有到达无限多的可能性。“一”就相当于一种“无”或者“空”的大全的状态。正因为“无”或“空”，才有可能从中产生一切万有。

数字二

在中国，天是一，地是二，所以说二是地之数。“二”的

思维方式使中国人具有一种自觉而深刻的辩证思想,因为只有这样,才能更好地真正认识事物,所以中国人是喜欢“二”的,常常希望好事成双,双被认为是吉祥的。

在中国传播的宗教中也有很多与“二”有关的事物,如“二道”,是佛教中的用语,指无碍问道与解脱道,前者为断惑之智,后者为证理之智。净土宗“二道”是指难行道和易行道,在人欲横流的世界,欲修度成佛,此法甚难,这就是难行道,信阿弥陀佛往往生净土以成佛,此法易行,这就是易行道。“二道”还指有漏道与无漏道,漏就是烦恼,见真谛以前,烦恼未断,所有修行都是有漏道,而见真谛以后,烦恼断灭,即为无漏道。“二谛”,也是佛教中用语,就是真的意思,“二谛”就是“世俗谛”和“第一义谛”。“二身”则是指佛的法身与生身。“法身”即法性之身,是代表正确无误至高无上的佛教真理的佛身,生身是佛的肉体之身,托于父母而胎生。法身与生身也叫作真身与应身,真身与真理契合,即是法身;应身是随机应显的世间的身像。

数字三

中国人是崇拜“三”的。因为天“一”,地“二”,而三则是“天地人”之道也,也就是说“三”包含着宇宙之全——天、地、人。中国的先哲们认为“数”最终成于三,万物生于三。老子曰:道生一、一生二、二生三、三生万物。一为混沌初始,二是阴阳两分,三则交相辉映,整合统一,协调共生,万物从此繁衍生长。故“三”才是构建世界的基数。《说文解字》又云:

“三,数名,天地人之道也。”所以,三在中国文化的深处有着特别重要的地位。

“六画成卦”是指《易经》的符号体系建立在“三”及其倍数“六”的基础上。八卦中乾和坤是最基本的两个卦象。乾卦象天,天为阳,阳为奇数,书写成“三”,其中“一”表示阳之始,“二”表示阳之昌,“三”表示阳之极;坤卦象地,地为阴,阴为偶数,书写成“三三”,其中“一一”表阴之始,“二二”表阴之昌,“三三”表阴之极。此“一始、二昌、三极”即《老子》“一、二、三”之说。

“三宝”,道教崇奉三件至宝称为三宝,即玉清天宝君、上清灵宝君、太清神宝君。又因道教以学道、行道、修道为本,所以又把这三者称为三宝。佛教把佛、法、身三者称为“三宝”。在中医术语中,人体的精、气、神又被称为“三宝”。“三界”,佛教中指欲界、色界、无色界三种境界。

数字四

当前,港台、日本、韩国等忌讳“四”为“死”,把“四”看成一个不吉祥的数字,这主要是谐音造成的现代迷信的吉凶观所造成的,这与古代人们对“四”的观念是完全不同的。

“四”的观念在产生的时候,具有一种神圣的意义,反映了中国古代的宇宙观。古人的宇宙观就是天地观,信奉天圆地方,认为圆的天和方的地二者周径之间的比例为三比四,因而“三”、“四”便成为天地和圆方的象征数字,“天三地四”即《易·系辞》所云两个真正的“天地系数”,蕴含“天地交泰”、“阴阳合德”,造化宇宙万物之意。《易·系辞》还有“两仪生

四象,四象生八卦”之句,反映了古代汉民族“观物取象”的思维方式。“两仪”指天地或阴阳;“四象”包括占有时间的一年四季及一天中的昼夜朝夕,还包括占有空间的以金、木、水、火为代表的东西南北四方。

尤其在表示空间方面,更离不开“四”这个数或“四方”这个基本空间方位概念。但“四四方方”中的“方”指正方形状,方形由四边构成,化为象形字。“四”字的外围就是一个密封的四方形,加上里边的“八”字,构成了一个完整的“四”字。因而“四”字被看作是一个整体的概念、全面的概念,也即宇宙的概念。从而象征平衡、周全、安定、昌盛等美好的事物。

“四”是“二”的倍数,化为偶数、地数,“四”象征完整、对称、和谐等,在古代是个吉祥的数。中国传统美学以对称、完整等为美,这些都能在四的数量中得到体现,如一个四方形或四合院可透出对称美,“四时”表示完整的一年,“四海”指整个世界,“四世同堂”形容一个家庭兴旺的最高境界,“四通八达”、“四平八稳”中将对称、完整之美综合在一起,从语言内容到文字形式都闪耀着“四”字之美。

数字五

在中国的文化语境中,提到“五”,人们首先想到的恐怕就是“五行”了。它是人们关于整个世界的产生的理论,是中国古典哲学的精粹。五行学说始于周代末期,古代思想家用日常生活中习见的金、木、水、火、土五种物质来解释世界万物的起源及多样性,认为它们充盈天地,无所不在。战国时期,“五行”流行,阴阳学家邹衍等人把五行学说与阴阳学说、日月星辰、四季五色、乾坤八卦等都连成一气,世称“阴阳五行”学说,渗透于天文、立法、医学等各个领域,既是思想方法论,又是世界观,成为我国上古文化的代表。

五行学说最大的特点是它的“相生相胜”的理论。相生,即是这五种物质相互促进:“木生火、火生土、土生金、金生水、水生木”;相胜又称相克:“水克火、火克金、金克木、木克土、土克水”。五行中各种事物相生相克,对立统一,互相依赖,从而共同形成一个和谐的世界,这也有助于人们形成朴素的唯物论和自发的辩证观念。“五”为一个轮回,使人们形成了以“五”为基数的一种推演世界的思维模式。如我国古代发明的先进的十进制制记数法,其中包含“五进数”的观念,中国人计数时说一五一十,十五二十,二十五,三十……这可比西方以六位记数早并要科学、合理、方便、先进得多了。而今天,无论是节日还是祝寿,我国传统都是逢五逢十是大庆。可见,五跟十一样,在中国人的审美心理中都是完整、圆满、吉祥的象征,人们追求十全十美,也向往五谷丰登,五彩缤纷。在中国的数文化中“尚五”可以说是又一大特色。

数字六

中国人是喜欢“六”的,因为他们把“六”看成是“顺”的意思,比如良辰吉日选带“六”的日子,电话号码选带“六”的数字,如果店家门牌号码是“666”的话,都要专门用金字招牌在显眼的地方突出出来,以示吉利。这是中国文化的特

殊现象,其实在西方“6”常常被看作是一个不吉利的数字。据说美国前总统里根离任前在贝莱布克劳德大街买了一幢别墅,当他获知别墅的门牌号码是666号时便大惊失色,因为三个连写的“6”在圣经中是魔鬼的代号,而且前总统肯尼迪遇刺身亡时,凶手正是在门楼上向他开的枪,希特勒的名字正好是六个字母,这一想使里根总统感到极为恐惧,便动用自己的权力,更改了门牌号码。所以,认为六是吉祥顺利的象征完全是中国文化的产物。

数字七

从“一”到“十”这十个自然数都充满了神秘性,神秘的数字观念产生于神话时代,某些数字被认为具有能带来祸、福的魔力,这就是所谓的“魔法数字”。“七”恐怕是其中最神秘的一个魔法数字了。“七”的深邃文化蕴涵,不是某一个民族的独创,而可以说是一种跨文化的人类现象。比如古希腊人六天创世、定第七天为安息日的最早传说;犹太历一年有三大节日,每次历时七天,第一和第二个节日相隔七个星期;基督教也认为上帝创造万物是在七天内完成的,圣母玛利亚有七件欢乐事,七件悲伤事,耶稣七天复活,亚当和夏娃在伊甸园正好呆了七个小时;伊斯兰教也十分崇尚“七”,认为天堂有七层,由圣光构成的第七层是最高天堂,天使们在这里齐声颂扬最高的主安拉;每个天使有七万人头,每个头有七万张脸,每张脸有七万张嘴,每张嘴有七万条舌,每条舌讲七万种语言;而且穆斯林每隔七天举行一次聚礼。开斋节念的大赞词传统习惯要念七遍。

佛教传说释迦牟尼面壁七天顿成正果;释迦牟尼及以前的六佛统称“七佛”。佛教认为人生灾难有七种(水、火、鬼、罗刹、刀杖、枷锁、怨贼);中国汉族佛塔多为七级,故有“救人一命,胜造七级浮屠”。

道教也有许多跟七有关的方面:道教对修道者有七种禁忌,要避免“七败之伤”;道家讲七种因果报应,谓之“七报”;道教认为北斗七星能左右乾坤、生克人命,所以道士作法戴七星冠、点七星灯、祭七星以镇魔驱邪;古代中国人认为天上存在着日、月、金、木、水、火、土七颗神圣之星等等,无不表明“七”的神圣与神秘。

为什么“七”会有这样的“待遇”呢?主要是因为“七”被视为造物主的宇宙数,每种宗教都认为自己是宇宙万物的最高主宰,自然要跟“七”吻合一致,或自觉不自觉地借重“七”来象征自己的魔力。远古以来数字“七”的神秘象征功能,正好是宗教观念中崇拜超人力量的一个现成符号和最佳形式。这样数字“七”已由创世造物中至大无比的极数,升华为宗教信仰中至高无上的圣数。古人的数理观认为,宇宙之道的运动是以“七”为时间循环界点的,“七”这个有限数字象征无限时间,故又是个无穷大的宇宙数。这就是为什么中国古籍中常将“七”作为至大的象征数来使用的原因。

现代科学医学研究得出人的细胞周期为7年,7年后的细胞为全新生的细胞。作为“命数”,“七”不仅跟生命规律有奇妙的联系,更被先人用以对人生命运的一种卜兆。数字本

是语言文字的一种名称,是用来区别事物量度的一种符号,跟任何语言符号一样具有任意性。然而由于敬畏和迷信,前人把原本一点也不具有任何神秘超人力量的语言符号之一的数字神秘化。相信某些数字有兆示吉凶褒贬的魔力,为避祸求福,便对不同数字有爱憎亲疏之分。数字“七”既然被视为极数、圣数、命数,自然也是一个大吉大利之数,我国及世界许多民族文化中都不约而同的把一些美好的事物与“七”相连。

数字八

在一般人的眼里,“八”是个再吉祥不过的数字了,因为“八”的谐音就是“发”、“发财”的意思。在广东和香港,以前对“八”字的用法原带贬意,而且,“八”的谐音随意性很大,褒贬悬殊,吉凶相悖,因为“八”同样可以谐音“罚”,“惩罚”的意思。

对“八”的这种喜好倒并不是只有中国人才有的事。德国人也认为“8”是个吉祥的数字,德国人对8的崇拜主要是出于谐形,认为阿拉伯数字8是由两个0连接在一起,是具有稳定和谐的象征意义的神秘符号。

佛教中很多地方与“八”也有着不解之缘,且还更带神秘、神圣的色彩。佛祖的生日正好是中国农历的四月初八。而且佛典中还有很多带“八”的教义,如“八风”、“八识”、“八苦”、“八戒”。

道教跟“八”的关系也很紧密,除了为人们所熟悉的“八仙”之外,还有八卦、八难、八石等等。

与“八”相关的最能体现中国文化特色的东西莫过于“八卦”了。八卦是博大精深的中国文化的一个象征。八卦的形成,在道家认为乃无极生太极,太极生两仪,两仪生四象,四象生八卦,八卦再生出八八六十四卦,先人们将它们之间的关系画成一个正八边形的八卦图,每边都有其特殊的符号。即由“一”(阳)和“— —”(阴)两种符号组成的八组符号,这八组符号每组有特定的图形,还有特定的名称,特定的代表意义,由此可以演绎和总结出自然界和人类社会变化的种种关系。

数字九

“九”在中国文化中也是一个吉祥的数字、神圣的数字、极限的数字。“九”代表极多的意思,“九”在中国文化中也源远流长,并深入到了各个领域。

在中国传统文化中,有两个词可以作为帝王的象征或代称,那就是“龙”和“九”,古时称帝王为“九五之尊”。据易学原理,奇数九、五属阳数,其相乘之积四十五为洛书之数,恰好为八卦把阴阳两两相配后其爻数相加之和,故四十五为一神秘数字。“九宫”以九五为基础,就是最大阳数,五为贯通其他八个数的中央核心,独具神秘功能,因而九五这两个至大至奇的阳数结合被视为至高无上的天数,自然也非皇帝莫属了。

“九”在中国传统文化中之重要影响,不仅在于它能体现至高无上的皇权,而且也根植于民俗文化之中,是老百姓心中的吉祥之数。

数字十

中国人的审美心理追求视“十”为完整圆满吉祥的象征,因而从生日祝寿到各种庆典以“十”为大庆成了我国的传统习惯,并成为民族性格的一个重要组成部分,

在中国文化中与“十”连在一起的词也不少。比如人们经常说的“十恶不赦”,这“十恶”是指中国古代规定的十种最大的罪名,佛教中在“八戒”的基础上又有“十戒”的说法。在中国古代的科举考试中有“十科”的说法,“十科”在隋朝的时候是指:孝悌有闻、德行敦厚、节仪可称、操履清洁、强毅正直、执宪不挠、学业优敏、文采美赡、才堪将略、臂力骁壮十种才能。

1.4 造形中的数理节奏

比例可以解释为“整体形式的部分与部分之间,或部分与整体之间的关系”。而比例的形式法则就是指在整体形式中,如何处理其部分与部分之间或部分与整体之间产生一种量度上的美感。更具体地说,整体形式中一切有关数量的条件,如长短、大小、粗细、厚薄、浓淡、强弱、高低、抑扬、和轻重等,在搭配恰当的原则之下即能产生优美的比例效果。平常我们说那个人太瘦了,或太胖了,正意味着那个人的身高与体重不成比例的意思。比例的运用也好像是音乐里不同振幅的二音相和而产生悦耳的效果一般。在构成的条件颇为微妙且复杂,它在组合上含有浓厚的数理意念,必须经过完密的计划与度量,才能找出其适当的比例搭配,以达成恰到好处的完美形态。

构成美的比例很多,就在数学上较有演算根据的几种数列介绍如下:

•等差数列 (Arithmetic Progression)

所谓的等差数列即是以某一个单位为基础,将它的2倍、3倍、4倍、5倍……所求得的数值依次加以排列,如2、4、6、8、10……或5、10、15、20……等。这种前项与后项的差永远维持一样的比例,称为等差数列比。

等差数列所完成的形式富有秩序的结构,通常用于较为单纯且有规律的形式上。如,楼梯、石阶之构筑或低调子的色彩计划等。

•等比数列 (Geometric Progression)

所谓的等比数列即是将前项乘以公比所形成的数列。例如,设公比为2,第一项为1,则所成的等比数列为1, 2, 4, 8, 16, 32, 64……。这种前项与后项都维持固定的倍数所形成的比例,会产生较为强烈的比例效果。

•调和数列 (Harmonic Progression)

以等差数列为分母所得的数列称为调和数列。如 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{x}, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \frac{x}{5}$ 等。这种形态的比例较等差数列富有变化也显得顺畅柔和。

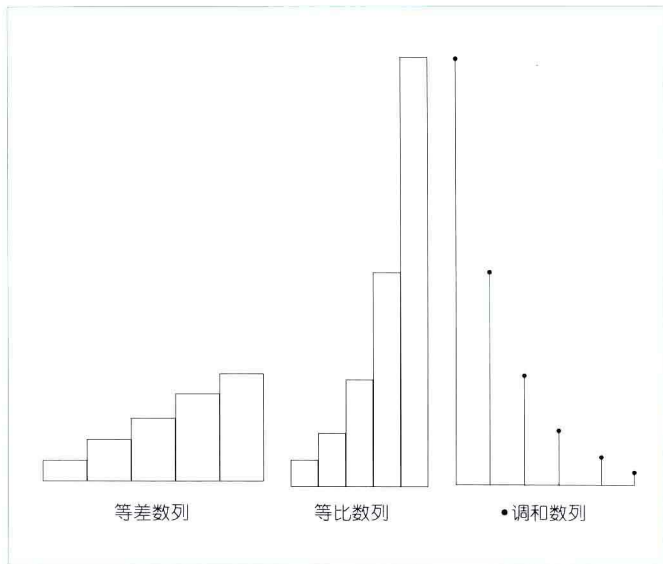


图1-3-1 数列节奏

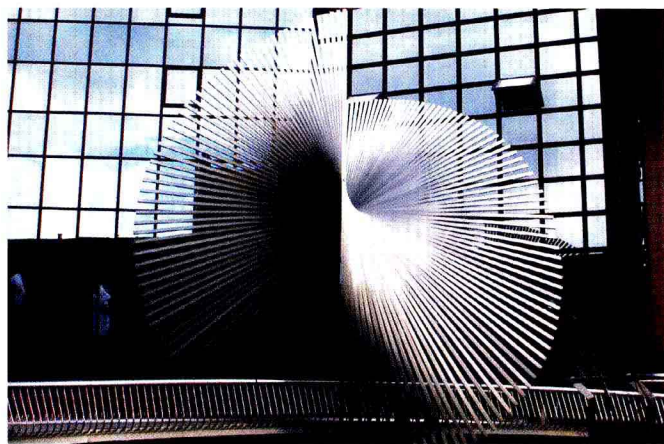


图1-4-1

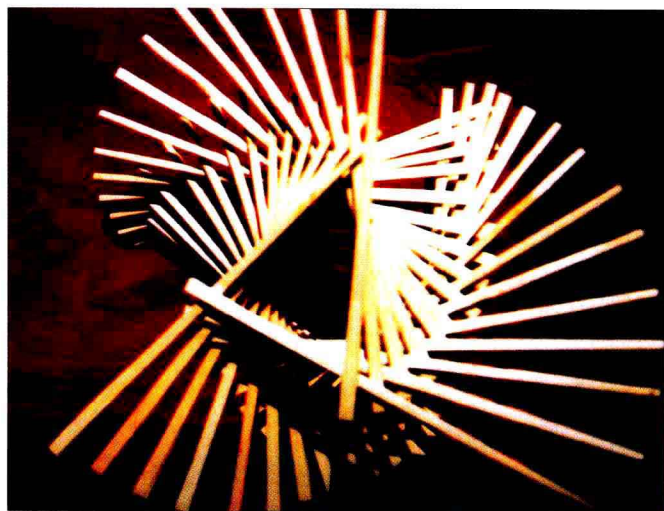


图1-4-2 造形中的数理节奏

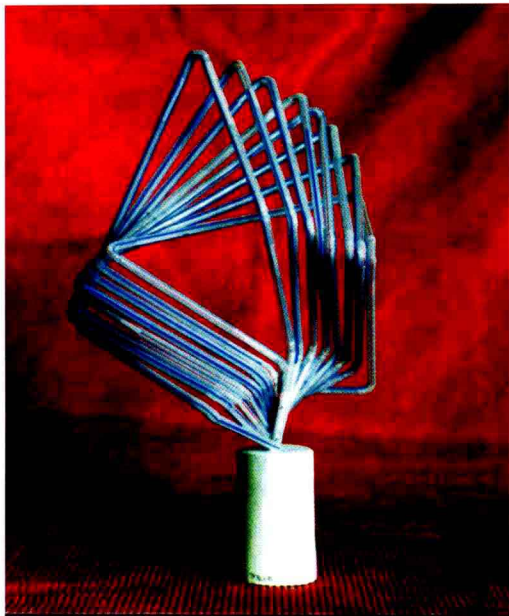


图1-4-3 造型中的数理节奏



图1-4-4 造型中的数理节奏

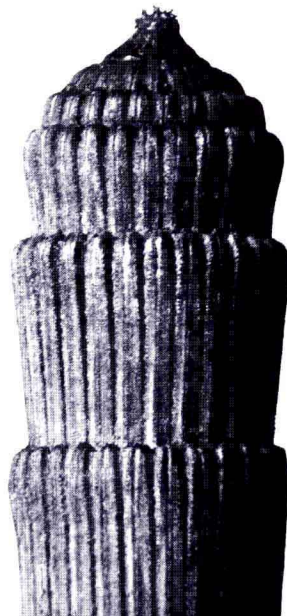


图1-5-1 自发中的数理节奏

• 费古纳齐数列 (Fibonacci Progression)

这是由意大利数学家费古纳齐 (Fibonacci) 研究仙人掌生长的秩序所发现的数列, 其排列的顺序取前两项的和等于后项所形成的数列, 如0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144……。当我们再仔细换算其后项与前项之比值, 如 $8 \div 5 = 1.6$, $55 \div 34 = 1.619$, $144 \div 89 = 1.6179$ 等, 都与黄金比的值1.618相当近似, 是一种与黄金比例同等理想的数列。

• 贝鲁数列 (Pell's Progression)

贝鲁数列与费波纳奇数有点相似, 其组合的方式是, 从第3项开始, 任一项等于前项数字之2倍与前前项数字的和。如0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169……。其比值为 $29 \div 12 = 2.4166$, $70 \div 29 = 2.41378$, $169 \div 70 = 2.41428$, 与 $1 + \sqrt{2} = 2.41421$ 的比例非常接近。其效果比费波纳奇数列明朗且富活泼的变化。

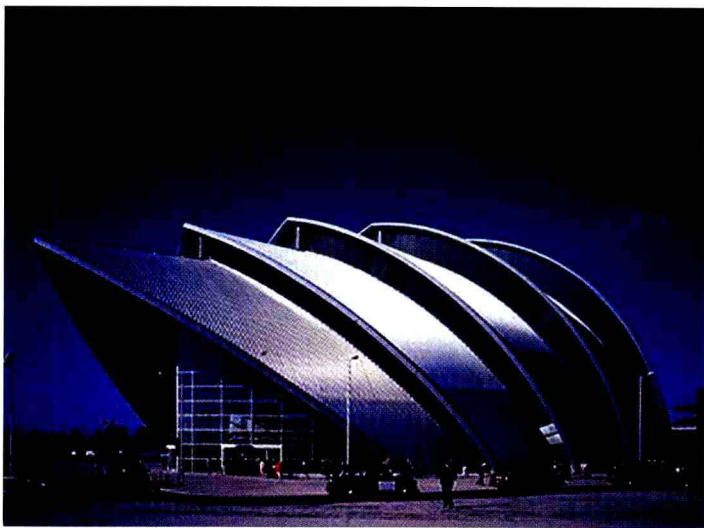


图1-4-5 造型中的数理节奏

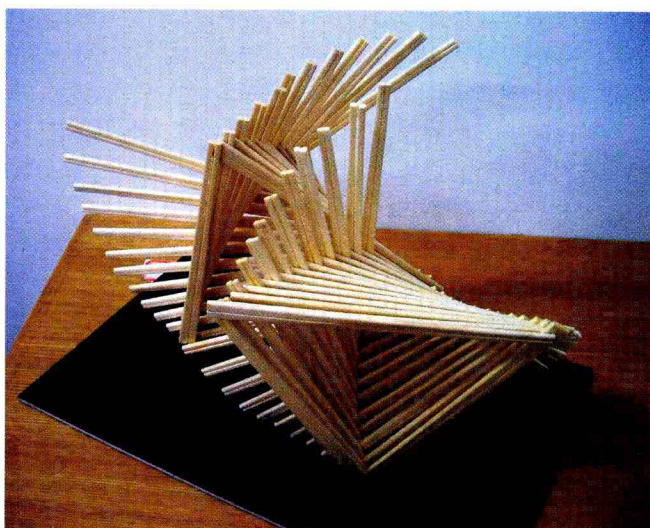


图1-4-6 造型中的数理节奏

1.5 数理形式发展的代表人物

毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派和五角星

毕达哥拉斯约公元前570年出生于爱琴海上的萨摩斯岛(小亚细亚半岛附近),在公元前530年到公元前510年间的某个时间移居到意大利南部多利安殖民地的克罗顿(那时候叫大希腊)。在那里他向埃及僧侣学习了数学、哲学以及宗教内容。当埃及被波斯军队占领后,毕达哥拉斯可能和一些埃及僧侣一起被带到了巴比伦,在那里他可能学习了美索布达米亚的数学知识。然而,埃及人和巴比伦人的数学不能满足毕达哥拉斯的求知欲。对这两个民族来说,数学仅是一种作为计算诀窍的实用工具。而毕达哥拉斯则是最早把数字作为一个独立存在的抽象实体来掌握的人之一。

有趣的是,毕达哥拉斯正和释迦牟尼、孔子是同时代的人。毕达哥拉斯强调学习高于其他工作的重要性,用他的话说:“大多数男人和女人,天生就缺少获得财富和权力的条件,但是他们都有学习知识的能力。”还有一件著名的事就是,他主张轮回的教义——他认为灵魂是不死的,可以重新投胎到人或动物身上。这一教义导致了素食主义的兴起,因为被杀戮的动物很可能是自己转世的朋友。为了纯洁灵魂,毕达哥拉斯建立了严格的制度,包括禁止吃豆子以及极端重视记忆力的训练。亚里斯多德在他的论文《论毕达哥拉斯学派》中给出了几个他们不吃豆子的可能理由:它们形似生殖器;它们是没有器官的植物,酷似地狱的大门;豆子据说在宇宙产生时和人类同时诞生;豆子在寡头政府中用于选举。

毕达哥拉斯和毕达哥拉斯学派最有名的成就是他们发展了数学应用成为有秩序的概念——不论是音乐的秩序、宇宙的秩序、伦理的秩序。

一般认为是毕达哥拉斯发现了音程、音调和琴弦长度的关系,从而发现了音阶中音符的和谐规律。他注意到用连续的整数划分琴弦会在某种程度上产生和谐悦耳的音程。当两个任意的音符一起发声时,产生的声响通常是刺耳的,只有几种组合才会发出悦耳的声音。毕达哥拉斯发现由相似的琴弦产生的音符能够奏出和音的效果,这些琴弦的长度成比例。当琴弦为相同长度时(1:1),可以得到同音的效果;当琴弦长度为1:2时,可以得到八度音程;2:3时为五重音程;3:4时为四度音程。换句话说,你可以拨一根弦奏出一个音符,而拨一根一半长度相同紧度的弦,你就会精确地听到一个比它高八度的音。同理,C调音符的6/5是A调,它的4/3是G调,3/2是F调,等等。

毕达哥拉斯学派思考的问题是,既然音乐的和声可以用数字表达,为什么整个宇宙不能用数字表达呢?他们因此得出结论说,所有宇宙中的物质都具有数字的属性。例如天文学的观察显示,太空中的运动也是极有规律并符合某种秩序的。这样就产生了美现的“天体和谐理论”——认为在它们的规则运动中,天体也在创造和谐的音乐。

可能是由于音乐中简单的和音比例,毕氏学派对奇数和偶数的差异产生了特殊的兴趣。他们把奇数和男性属性联系在一起,认为它们是光明和善良的;而把偶数和女性的属性联系在一起,认为它们是黑暗和邪恶的。一些对奇数和偶数的偏见持续了几个世纪。

柏拉图与多面体

柏拉图(前428/427-前348/347)是古希腊和西方文明最有影响的思想家之一。据说柏拉图曾经和西兰尼的毕达哥拉斯学派的西奥多勒斯一起研究过数学。柏拉图在《理想国》中提到,数学是所有政治领袖和哲学家必须具备的教育。柏拉图本人当然也对数字的属性和几何图形有着浓厚的兴趣。例如在《法典》中,他建议一个国家公民的最理想的数字是5040。例如,国家的土地可以被分为5040块,每12块为一部分,可分成420部分。国家中的人可以分为4个社会等级:自由公民和他们的妻子儿女、他们的奴隶、常驻的外国人、各种来访的外国人。在议会选举中,所有4种财产等级的人员都可以从各等级中选举90个席位。

另一个经常和柏拉图相关的数字是216。柏拉图在《理想国》中一个非常含糊的段落中提到了这个数字,暗示这个数字等于6的立方,而6是代表婚姻的数字之一(因为它是女性数2和男性数3的乘积)。柏拉图本人是毕达哥拉斯学派人士的学生,当然也知道著名的3—4—5毕达哥拉斯三角形各边的立方数之和等于216。柏拉图和黄金比例的关系主要体现在两大领域:不可通约性和柏拉图立体。在《法典》中,柏拉图对自己较晚了解到不可通约长度和无理数感到惭愧。而且,遗憾的是,许多与他同时代的希腊人仍旧不熟悉这种数字的存在。柏拉图认识到,正如一个偶数可以是两个偶数或两个奇数之和,所以两个无理数之和也可以是无理数或有理数。

柏拉图创立了正多面立体并建立了与之相对应的几何和数学原子论,柏拉图立体具有以下属性:它们都是所有可以被包围在一个球体内(其所有顶点都在球体表面上)。柏拉图立体分别是四面体(有4个三角形平面)、六面体(有6个方形

表面,)、八面体(有8个三角形平面,)、十二面体(有12个五边形表面), 以及二十面体共5个。相对应的原子构成是: 土是一个稳定的六面体; 具有“穿透性”的火是带有顶点而相对简单的四面体; 空气是运动多变的八面体, 水是玲珑剔透的二十面体; 而第五种立体十二面体。柏拉图认为它代表宇宙的整体, 或者用他的话说: “十二面体是上帝用来美化整个宇宙的。”这就是为什么画家萨尔瓦多·达利决定在他的作品《最后的晚餐》中的桌子上方画一个巨大的二十面体。

欧几里德与他的《几何原本》

公元前336年, 马其顿20岁的亚历山大(大帝)继任了王位。经过一系列出色的胜利, 他征服了小亚细亚、叙利亚、埃及和巴比伦, 成为波斯帝国的统治者。在他33岁去世前的几年, 他在尼罗河口建造了后来成为他最伟大的纪念碑的城市——亚历山大城。亚历山大城位于三大文明——埃及、希腊和犹太文明的交界处。后来它成为一个著名的知识中心, 持续了很长时间。

亚历山大死后, 托勒密一世于公元前306年统治了埃及和非洲。他的第一个措施就是在亚历山大建立一所相当于大学(当时也称为博物馆)的机构, 这个机构内包括图书馆, 该馆以收集大量图书而闻名, 最多时拥有70万册书。亚历山大学院的第一批教师就有数学历史名著《几何原本》的作者欧几里德。虽然欧几里德是一位“畅销书作家”(20世纪之前只有《圣经》的销量超过《几何原本》), 但是他的生活却不为人所知, 连他的出生地我们都不知道。根据《几何原本》的内容, 欧几里德很有可能和柏拉图的学生一起在雅典研究数学。《几何原本》是一本有关几何和数字理论的13卷著作, 它涉猎的范围是如此之广, 以至于我们有时会忘记欧几里德还有十几本其他著作, 内容覆盖了从音乐、力学到光学的众多领域。这些论著中只有4本保存至今: 《图形的分割》、《光学》、《现象学》和《已知数》。其中《光学》包括了一些对透视的早期研究。

《几何原本》给人的印象是: 作者是一个有良知的、尊重传统的人, 而且非常谦虚。欧几里德没有试图把他人之功据为己有, 事实上他并没有标榜独创——尽管他发明了许多新的证法, 并把其他人的成就进行重新整理, 从而编成了这部著作。欧几里德的谨慎、公正和谦虚使他获得了亚历山大的帕坡斯的景仰。后者在公元340年编撰了名为《集成》的八卷本著作, 为希腊数学的许多方面提供了宝贵的记录。

在《几何原本》中, 欧几里德试图包含同时代的大多数

数学知识。丛书第一卷到第六卷是我们在学校学到过的以欧几里德命名的平面几何(欧几里德几何学)。其中, 第一、二、四、六卷讨论线和平面图形, 第三卷阐述与圆有关的定理, 第五卷详细介绍了由克尼杜斯的欧多克斯(约公元前408—前355)提出的比例问题。第七卷到第十卷讲解数字理论和算术的基础知识, 特别在第十卷介绍了无理数, 其内容多数来自泰特图斯的成果, 第十一卷介绍立体几何的基础知识, 第十二卷(多数是欧多克斯的成果)证明了圆面积的定理, 第十三卷介绍了柏拉图五大立体的构成。《几何原本》中有几处出现了黄金比例。黄金比例“极限中间比”的首次描述和面积有关, 间接地在第二卷中提到; 第二次清晰的描述是和比例有关, 出现在第六卷; 此后欧几里德开始运用黄金比例, 特别是在五边形的构成(第四卷)以及十二面体和二十面体的构成(第八卷)部分。

欧几里德在他的《几何原本》中对黄金比例进行定义时, 主要是对黄金比例的几何学意义以及它如何构成五边形和柏拉图立体感兴趣。跟随他的脚步, 后一个世纪的希腊数学家们又发现了几个新的有关黄金比例的几何学结论。例如, 在《几何原本》的“补编”(第14卷)中有一条关于球体中的十二面体和二十面体的重要定理。“补编”的作者是亚历山大的希坡克里斯, 他大约生活在公元前2世纪。这期间还有坡加的阿波罗尼斯(约公元前262—前190)发现的定理, 他是希腊数学黄金时代的三位主要人物之一(另两位是欧几里德和阿基米德)。此后黄金比例的发展日益减缓, 相关的主要人物是希罗(1世纪)、托勒密(2世纪)和帕坡斯(4世纪)。希罗在他的《度量衡》中提出了五边形和十边形面积以及十二面体和二十面体体积的近似值。

欧几里德可能不是历史上最伟大的数学家, 但是他绝对是最伟大的数学导师。他写的教科书两千年来一直原封不动地被使用, 直到19世纪中叶。

丢勒与黄金比

文艺复兴时期的主要人物是德国画家丢勒。他对艺术和数学都感兴趣, 并将两者完美结合在一起。很多人都认为丢勒是文艺复兴时期德国最伟大的艺术家。他于1471年5月21日出生在帝国自由城邦——纽伦堡, 一个勤劳的珠宝商家庭。在19岁的时候, 他就显示出画家和木刻家的天资和能力, 并超过了他的老师——沃尔格穆特(纽伦堡当时绘画和书本插图画的领导人)。而后, 他开始了为期四年的旅行。在此期间, 他确信数学是最具有逻辑性、最能体现绘画结构特性的