21世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学

上册

陈克东 主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪普通高等学校数学系列规划教材

高等数学

上册

陈克东　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材遵循普通高校工科《高等数学课程教学基本要求》，按照新形势下教材改革精神，结合编者长期的教学改革实践编写。

本系列教材以“数学思想方法是数学教学的灵魂”为指导思想，努力突出高等数学的基本思想、基本理论和基本方法，在数学知识、数学能力、数学素质三维空间构建其教学内容体系。同时，注意渗透现代数学的思想、观念、语言、方法和符号，为现代数学初步提供内容展示的“窗口”和延伸发展的“接口”，以利于教与学、理论与应用、课内与课外的结合，以利于提高学生数学素质与创新能力。

本书共13章，分上、下两册出版。上册共7章，内容包括：预备知识，极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，微积分学实验Ⅰ。书末附有几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。下册共6章，内容包括：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程，微积分学实验Ⅱ。书末附有习题答案与提示。

本书针对普通高等学校二、三类本科学生量身定做，适合作为理工科本科各专业（非数学专业）和经济管理类专业的教材，也可供工程技术人员、报考研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册/陈克东主编. 一北京：中国铁道出版社，2008.6

(21世纪普通高等学校数学系列规划教材)

ISBN 978-7-113-08821-7

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第097292号

书　　名：高等数学·上册
作　　者：陈克东　主编

策划编辑：李小军　　**编辑部电话**：(010)83550579
责任编辑：李小军
编辑助理：黄　娟
封面设计：付　巍　　**封面制作**：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街8号)
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
版　　次：2008年7月第1版　　2008年7月第1次印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16　　**印张**：20　　**字数**：384千
印　　数：4000册
书　　号：ISBN 978-7-113-08821-7/O·174
定　　价：28.00元

前　言

数学是科学之王。 **——高斯**

数学是科学大门的钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识。因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的。更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己的这一疏忽，最终将无法寻求任何补救的措施。 **——培根**

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。 **——华罗庚**

人类已经进入21世纪。21世纪是知识经济时代，这个时代最重要的特征是知识和能力将成为主要资源，知识的生产和创新、传播和应用是社会发展的核心，高素质的创新人才是知识经济发展的关键。当今世界，国力的竞争，主要表现为经济实力的竞争；而经济实力的竞争，则主要表现为科技水平、教育水平乃至人才素质的竞争。

数学是一切科学的基础，是开启科学大门的钥匙，是攀登科学高峰的云梯。数学技术是高新技术的本质，数学语言是科学的基本语言，数学计算是科学研究的主要手段之一。数学在当代科学中地位的巨大变化，已经使得人们把数学科学与自然科学、社会科学并列为基础科学的三大领域。数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素质；不仅是一门科学，而且是一种文化。众多有识之士都将能否运用数学观念作为衡量民族科学文化素质的一个标志，将培育数学素质作为提高民族科学文化水平的一个重要途径。难怪权威人士指出："一个国家的科学进步可以用它消耗的数学来度量。"对于当今社会每一位具有一定知识水平的人士而言，不论他从事何种职业，追求何种目标，都需要学习数学，认识数学，应用数学，乃至研究数学。现代社会对数学的这种需求，在21世纪无疑将与日俱增。

本书是21世纪普通高等学校数学系列课程规划教材。高等数学是高等理工科院校和经管类院校一门重要的公共必修基础课程，其教学过程连续时间之长、教学时数之多、教学内容之丰富，在高等教育中是其他任何一门课程都无法比拟的。基于此，高等数学在工程技术人才和经济管理人才培养中的地位和作用，也就不言而喻。

本书遵循教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的总体要求，根据工科本科《高等数学课程教学基本要求》编写而成。在编写过程中，力求体现我们率先提出的**"数学思想方法是数学教学的灵魂"**的改革创新理念，努力突出高等数学的基本思想、基本理论和基本方法，在数学知识、数学能力、数学素质三维空间构建本课程的教学内容体系，使学生从总体上把握高等数学的知识体系、结构框架和思想方法，按照"引入思想，提出问题，剖析方法，研究并解决问题"的逻辑推理思路，使学生在掌握高等数学知识的同时，培育思维能力、应用能力、自学能力和创新能力，提高学生的数学水平。

本书是根据编者在长期从事高等数学课程教学实践中的探索与改革、经验与体会编写的。在编写过程中，认真汲纳编者以往主编的高等数学教材的精华，同时还博采近年来

国内外诸多同类教材的特点，力求在教材中**渗透现代数学思想，追求教材内容体系的整体优化**。注意到与中学数学教学相衔接，精简了初等数学的某些内容，压缩了一些“理科化”的定理证明，适当调整了对解题的某些特殊技巧的要求，简化了一些公式的推导论证，突出了对一些概念“离散化”的描述，增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题。同时，注意渗透现代数学的思想、观念、语言、方法和符号，初步介绍了数学模型的内容和数学建模的方法，对 Mathematica 软件及主要功能作了介绍，提供了若干与微积分内容及其应用紧密结合的数学实验，尝试将高等数学与计算机应用相结合，从而为现代数学初步提供内容展示的“窗口”和延伸发展的“接口”。这一切探索，将有利于教与学、理论与应用、课内与课外的有机结合，有利于调动学生学习高等数学课程的主动性与积极性，进而推进教学思想、教学内容、教学方法以及教学手段的改革与创新。

本书在每一章的开始，都撰写了称为“思想方法与内容提要”的短文，浓缩精粹，提纲挈领，以此提示读者，并期望给读者的学习以指导。

还要指出，掌握高等数学精髓的有效途径之一是**学会运用其思想、理论、方法解决实际问题**。为此，本书对一些重要概念，试图按照数学发展史的原貌，介绍其客观的实际背景。对于一些重要理论的应用实例，其范围也从传统的几何学与物理学的范畴，扩展到工程技术、经济学、生物学等学科领域，以拓宽数学应用的思维空间。

为了适应不同学校、不同专业学生的教学要求，本书在例题和习题的遴选上也做了一些工作。选用了一些颇具吸引力的典型问题作为例题，配置了足够数量且深度、广度较为适宜的各种类型的习题，每章最后还配备了具有一定难度的综合性总习题。这样做的目的，既为了不同水平的各校教师从中选择合适的题目供教学使用，还为了读者选择相关题目进行自我检查，以便对教学效果作出客观、真实的评价。

本书共 13 章，分上、下两册。第 1 章至第 7 章为上册，第 8 章至第 13 章为下册。全书教学的参考时数为 180 学时左右。

本书由陈克东任主编，黄文韬、张楠任副主编。预备知识、第 11 章、第 12 章由陈克东编写，第 1 章、第 2 章、第 7 章、第 13 章由黄文韬编写，第 3 章、第 4 章、第 5 章由曾玲编写，第 6 章、第 8 章由唐生强编写，第 9 章、第 10 章由张楠编写。全书由陈克东统编、修正、定稿。

本书在编写过程中，得到桂林电子科技大学教务处、数学与计算科学学院及中国铁道出版社等单位的大力支持。中国铁道出版社、桂林电子科技大学数学与计算科学学院办公室刘翠玉主任、唐红武、凌琳等给予了热情帮助。对此，编者表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不足之处恐难避免，敬请读者批评指正。

陈克东
于桂林电子科技大学仁和苑
2008 年 4 月 5 日

目　　录

数学就是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们的内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

——帕洛克拉斯

第 0 章

预备知识

§0.1 集合

0.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个最基本的概念，是现代数学的理论基础. 关于“集合”，没有一个严谨的数学定义，只是有一个描述性的说明. 在我国出版的第一本集合论著作 —— 肖文灿的《集合论初步》中，描述了集合论创始人康托尔对集合的刻画：“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素.” 这就是说，数学中把所考察的具有确定性质的对象所组成的总体称为**集合**，集合简称**集**. 组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**，简称**元**.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就称 a 属于 A，记为 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$. 由有限个元素组成的集合称为**有限集**，由无限个元素组成的集合称为**无限集**. 一个无限集，如果其元素可以用自然数编号进行排序，就称之为**可数(可列)无限集**；否则就是**不可数无限集**.

本书对常用的各种集合均采用习惯的记号，即全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$；全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}^{*},\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

全体复数的集合记为 $\mathbf{C}$,即

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}.$$

同样,在某个集合的字母的右上方添加“$*$”,“$+$”,“$-$”等上标,表示该集合的特定子集.以实数集 $\mathbf{R}$ 为例,$\mathbf{R}^{*}$ 表示排除了数 0 的实数集;$\mathbf{R}^{+}$ 表示全体正实数集;$\mathbf{R}^{-}$ 表示全体负实数集.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或称集合 A 包含于集合 B,或称集合 B 包含集合 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

不含有任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.空集在研究集合运算和集合之间的相互关系时,有其逻辑上的意义.例如集合$\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$,就是一个空集.规定空集是任何集合的子集.

集合一般有两种表示法,其一是列举法,即把表示它的全体元素一一列举在一个大括号内,如自然数集 $\mathbf{N}$ 可表示为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.这种表示法仅适用于有限集或可数无限集.其二是描述法,即指出某集合中元素所具有的确定性质,一般形式为

$$X=\{x\mid x \text{ 具有确定性质 } p\}$$

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$,且 $B\subset A$,就称集合 A 与集合 B 是**相等**的,记为 $A=B$.

0.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$,即

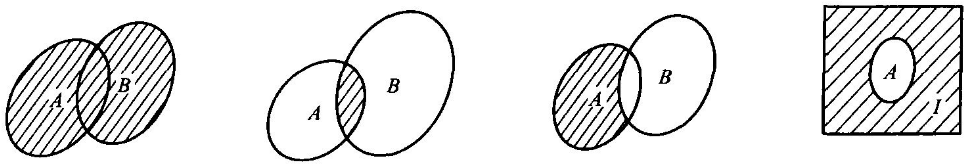
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

本书把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,记为 I.特别地,把 $I\backslash A$ 称为 A 的**补集**或**余集**,记为 A^{c}.

集合的运算,可用文氏图(见图 0-1)形象地表示.



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A\backslash B$　　A^c

图 0-1

集合的并、交、余运算具有以下性质：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 等幂律：$A\cup A=A, A\cap A=A$；

(5) 互补律：$A\cup A^c=I, A\cap A^c=\varnothing$；

(6) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$；

(7) 对偶律：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

上述运算性质根据集合相等的定义容易予以验证.

0.1.3　集族、直积

以集合为元素的集合称为**集族**.特别地，由非空集合 A 的所有子集为元素组成的集合是一个集族，称为 A 的**幂集**，记为 $P(A)$ 或 2^A.易知非空集合 A，其幂集 $P(A)$ 有 2^n 个不同的元素.例如，若集 $A=\{a,b,c\}$，则其幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

显然，它的元素是 $2^3=8$ 个.

设有两个非空集合 A,B.若 $a\in A, b\in B$，则由 a,b 组成的一个有序数对(简称为**序偶**，记为 (a,b))，称为 A、B 的**笛卡儿积**，或称为**直积**.它是由序偶组成的集合，其定义为

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

特别地，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，在几何上，它表示 xOy 平面上所有点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 可简记为 $\mathbf{R}^2$.

类似地，有限个非空集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

0.1.4　区间和邻域

区间和邻域是常用的两类实数集.

设 a,b 都是实数，且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b).即 $(a,b)=$

$\{x \mid a < x < b\}$. a,b 称为区间的**端点**，它们均不属于(a,b). 类似地，可定义 a,b 为端点的闭区间、半开(闭) 区间等. 它们的记号和定义是

闭区间：$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，

半开区间：$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，

半开区间：$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.

上述这些区间都称为**有限区间**. 类似地，可定义**无限区间**. 它们的记号和定义是

$$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\} = \{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid -\infty < x < b = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

邻域是微积分学中常用的一种集合. 设 a、δ 是实数，且 $\delta > 0$. 点 a 的 δ 邻域记为 $U(a,\delta)$，它就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$. 这里，点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**(见图 0-2(a)). 记号 $\mathring{U}(a,\delta)$ 称为点 a 的**去心 δ 邻域**，它就是开区间$(a-\delta,a)$ 与$(a,a+\delta)$ 的并集(见图 0-2(b)). 本书把$(a-\delta,a)$ 与$(a,a+\delta)$ 分别称为 a 的**去心左 δ 邻域**与 a 的**去心右 δ 邻域**.

图 0-2

§0.2 实数系

微积分学是在实数系即实数集 $\mathbf{R}$ 中研究问题的，因此，本书将对实数系作一些必要的介绍.

为了叙述与应用的方便，引入两个常用的逻辑运算符号：符号“$\exists$”，称为存在量词，表示“存在”或“找到”或“至少存在一个”；符号“$\forall$”，称为全称量词，表示“对任意的”或“对所有的”或“对每一个”.

诚然，还有其他一些逻辑运算符号，如“$\wedge$”，“$\vee$”，“$\rightarrow$”等等，这里就不一一介绍了.

0.2.1 实数系的完备性

微积分学中的许多基本概念和理论与实数系的完备性是密切联系的. 回顾数学发展的历史，不难发现，推动数系扩展的一个原因是数系运算. 自然数集 $\mathbf{N}$ 对加法和乘法两类运算是封闭的，就是说两个自然数相加或相乘仍然是自然数；但对减法 —— 加法的逆运算却不是封闭的，如 $3+x=1$ 在自然数系中则是无解的. 为此，就将自然数系 $\mathbf{N}$ 扩充为整数系 $\mathbf{Z}$. 完全类似，整数系 $\mathbf{Z}$ 对除法 —— 乘法的逆运算又不是封闭的，如 $5x=3$ 在整数系中是无解的. 为此，又将整数系 $\mathbf{Z}$ 扩充为有理数系 $\mathbf{Q}$. 同样，有理数系 $\mathbf{Q}$ 对开方 —— 乘方的逆运算又