

初中
数学

与二期课改教材配套

同步

TONGBU
XUEXIYUFUDAO

学习与辅导

奚根荣 王静 编

九年级第一、二学期

上海科技教育出版社





初中数学同步学习与辅导

九年级第一、二学期



上架建议:文化教育

ISBN 978-7-5428-4630-3



9 787542 846303 >

易文网: www.ewen.cc

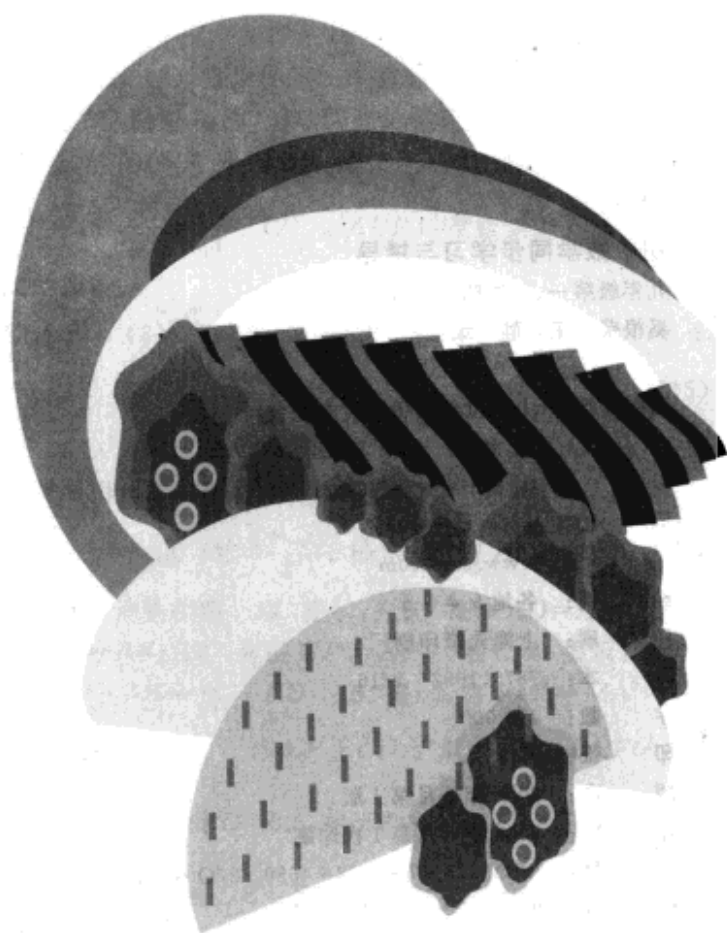
ISBN978-7-5428-4630-3/O·566

定价: 39.50 元

初中数学同步 学习与辅导

奚根荣 王静 编

九年级第一、二学期



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学同步学习与辅导. 九年级. 第一、二学期/奚根荣, 王静编. —上海: 上海科技教育出版社, 2008. 8

ISBN 978-7-5428-4630-3

I. 初... II. ①奚... ②王... III. 数学课—初中—
教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 087998 号

初中数学同步学习与辅导

九年级第一、二学期

奚根荣 王 静 编

出版发行: 上海世纪出版股份有限公司

上海科技教育出版社

(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)

网 址: www.ewen.cc

www.sste.com

经 销: 各地新华书店

印 刷: 上海先锋印刷厂

开 本: 787×1092 1/16

字 数: 413 000

印 张: 25.25

版 次: 2008 年 8 月第 1 版

印 次: 2008 年 8 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5428-4630-3/O·566

定 价: 39.50 元

出版者的话

“数学同步学习与辅导”丛书是以练习为主,与教材完全同步的学习辅导用书.自1995年出版以来,因其例题选择具有典型性,解题方法归纳、解题技巧说明及时、完整,且同步练习有层次、有针对性而深受读者欢迎,一版再版,一印再印.受师生家长喜爱的另外一个原因就是本丛书做到真正与教材同步,不断满足在校学生学习的需要,随上海市新教材的铺开而逐年级进行修订.“数学同步学习与辅导”丛书已成为上海教辅市场的一个品牌.

此次为配合上海市二期课改新教材的推广,本丛书在保持原有“重点难点”、“例题讲解”、“同步练习”等栏目的基础上,做了如下调整:

※ 将“学习目标”改为“知识点归纳”,旨在帮助学生及时梳理所学知识.

※ 将两个“同步练习”合为一个“同步练习”,并将练习题分为三个层次,一是基础题,即基础知识与基本技能训练题;二是提高题,即知识的应用和知识点纵向加深的训练题;三是开放性的综合应用题,即研究型、讨论型、情境等开放题,旨在帮助学生巩固所学知识.

※ 增加“疑难解答”栏目,旨在帮助学生少犯错误,分辨易混淆的概念.

※ 增加“整合与拓展”栏目,旨在帮助学生联系以往所学知识(含其他学科),拓宽学生视野,活跃学生的创造性思维.

另外还安排了期末测试卷,可供学生自测.



目 录

第二十四章 相似三角形	1
一 相似形	1
24.1 放缩与相似形	1
二 比例线段	5
24.2 比例线段	5
24.3 三角形一边的平行线(1)	12
24.3 三角形一边的平行线(2)	22
三 相似三角形	30
24.4 相似三角形的判定	30
24.5 相似三角形的性质	45
四 平面向量的线性运算	58
24.6 实数与向量相乘	58
24.7 平面向量的分解	65
单元复习	72
单元测试卷	75
第一学期期中测试卷	79
第二十五章 锐角的三角比	83
一 锐角的三角比	83
25.1 锐角的三角比的意义	83
25.2 求锐角的三角比的值	91
二 解直角三角形	98
25.3 解直角三角形	98
25.4 解直角三角形的应用	106
单元复习	119
单元测试卷	121
第二十六章 二次函数	124
一 二次函数的概念	124
26.1 二次函数的概念	124





二 二次函数的图像	129
26.2 特殊二次函数的图像	129
26.3 二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像	136
单元复习	154
单元测试卷	157
第一学期期末测试卷	160
第二十七章 圆与正多边形	164
一 圆的基本性质	164
27.1 圆的确定	164
27.2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	171
27.3 垂径定理	178
二 直线与圆、圆与圆的位置关系	188
27.4 直线与圆的位置关系	188
27.5 圆与圆的位置关系	200
三 正多边形与圆	211
27.6 正多边形与圆	211
单元复习	221
单元测试卷	224
第二十八章 统计初步	227
一 统计的意义	227
28.1 数据整理与表示	227
28.2 统计的意义	238
二 基本的统计量	246
28.3 表示一组数据平均水平的量	246
28.4 表示一组数据波动程度的量	258
28.5 表示一组数据分布的量	267
28.6 统计实习	267
单元复习	279
单元测试卷	281
第二学期期中测试卷	285
拓展 II	
第一章 一元二次方程与二次函数	289
一 一元二次方程的根与系数关系	289



1.1 一元二次方程的根与系数关系	289
二 二次函数的解析式	297
1.2 二次函数与一元二次方程	297
1.3 二次函数解析式的确定	306
单元复习	316
单元测试卷	318
第二章 直线和圆	321
一 圆的切线	321
2.1 圆的切线	321
二 与圆有关的角及线段	333
2.2 与圆有关的角	333
2.3 与圆有关的线段	344
三 圆内接四边形	354
2.4 圆内接四边形	354
单元复习	365
单元测试卷	368
参考答案	372





第二十四章 相似三角形

— 相似形

24.1 放缩与相似形



知识点归纳

1. 图形的放缩运动

图形的放大或缩小,称为图形的放缩运动.

2. 相似的图形

形状相同的图形称为相似的图形,也称相似形.相似的图形,它们的大小不一定相同.当它们大小相同时,它们可以重合,这时它们是全等形.

3. 相似多边形的含义

如果两个多边形的边数相同,而且形状也相同,也就是说,这两个多边形的角对应相等,边的长度对应成比例,就说这两个多边形是相似多边形.

4. 相似多边形的性质

如果两个多边形是相似形,那么这两个多边形的对应角相等,对应边的长度成比例.

当两个相似的多边形是全等形时,它们的对应边的长度比值都是 1.



例题讲解

例 1 说明任意两个等腰直角三角形一定是相似形.

解 如图 24-1-1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 是任意的两个等腰直角三角形,且 $\angle B = \angle B_1 = 90^\circ$.

显然, $\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 45^\circ$.

又设 $AB = a$, $A_1B_1 = b$,

那么 $AB = BC = a$, $A_1B_1 = B_1C_1 = b$, $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, $A_1C_1 = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2}b$.

这样,有 $\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 90^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 45^\circ$,

$$\text{且 } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{a}{b}.$$

根据相似形的含义可知, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 是相似形,即任意两个等腰直角三角形一定是相似形.

说明 判定两个多边形是相似形,要抓住以下三点.一是边数相同,二是角对应相等,三是边的长度对应成比例.如果有一条不成立,那么这两个多边形不相似.

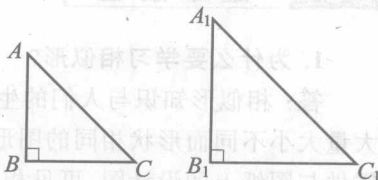


图 24-1-1





例 2 在下列方格中,画出和四边形 $ABCD$ 相似且呈放大的一个相似图形.

解 如图 24-1-2,可算得 $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1A_1}{DA} = 2$,且四个角对应相等,所以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 相似,且 $A_1B_1 > AB$, $B_1C_1 > BC$, $C_1D_1 > CD$, $D_1A_1 > DA$.

说明 画图时要注意保证角对应相等,边的长度对应成比例,且它们的比值大于 1. 本题答案不唯一.

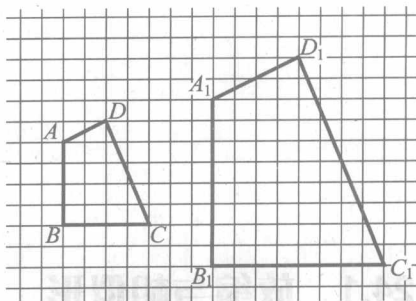


图 24-1-2

例 3 如图 24-1-3,已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,并且点 A 与点 D 、点 B 与点 E 、点 C 与点 F 是对应顶点. 其中 $AB=6$, $BC=8$, $CA=4$, $DF=2$,求 DE 、 EF 的长.

解 因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是相似形,点 A 与点 D 、点 B 与点 E 、点 C 与点 F 分别是对应顶点,所以 $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

由题意,得 $\frac{6}{DE} = \frac{4}{2} = \frac{8}{EF}$,解得 $DE=3$, $EF=4$.

所以 DE 、 EF 的长分别是 3、4.

说明 本题是利用两个相似多边形的对应边的长度成比例性质来解决的. 要注意两个相似多边形顶点的对应关系和边的对应关系,否则容易出错.

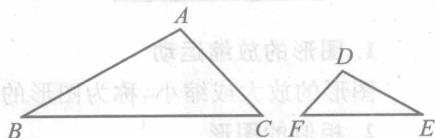


图 24-1-3



疑难解答

1. 为什么要学习相似形?

答: 相似形知识与人们的生产、生活有着密切的联系. 在日常生活中,我们经常会遇见大量大小不同而形状相同的图形,如照片的放大或缩小、同一个城市大小不同的地图、工厂零件与图纸上的设计图. 可见相似形知识有十分广泛的应用.

研究相似形是研究全等形的继续与深化. 它是从研究线段的相等进而发展到研究线段的比,从研究图形的全等进而发展到研究图形的相似. 通过对相似形的研究,我们可得到只变更图形的大小而不变更它的形状的一种研究图形的新方法,加深人们对图形的认识.

2. 两个多边形相似的“要求很高”,能否减少一些?

答: 不能! 两个多边形相似必须满足三个条件,即边数要相同,角要对应相等,边的长度要对应成比例,三者缺一不可. 边数不同,两个多边形肯定不相似;缺少角对应相等也不行,如正方形与一般菱形,虽然边的长度对应成比例,但角不对应相等,它们也不相似;缺少边的长度对应成比例也不行,如正方形与一般矩形,虽然角都是 90° ,但却不相似.



同步练习

基础题

1. 填空:

- (1) 两个相似的图形, 它们的形状_____, 它们的大小_____.
- (2) 两个多边形满足条件_____时, 就说这两个多边形是相似形.
- (3) 当两个相似的多边形是全等形时, 它们的对应边长度的比值等于_____.
- (4) 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是相似形, 点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A_1 、 B_1 、 C_1 . 已知 $AB=7\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, $CA=5\text{cm}$, 且 $A_1B_1=5\text{cm}$, 那么 $B_1C_1=$ _____ cm , $C_1A_1=$ _____ cm .
- (5) 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是相似形, 点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 D 、 E 、 F . 如果 $\angle B=30^\circ$, $\angle C=80^\circ$, 那么 $\angle D=$ _____, $\angle E=$ _____, $\angle F=$ _____.
- (6) 所有的等边三角形_____相似, 四个角都对应相等的两个四边形_____相似 (填“一定”或“不一定”).

2. 选择:

- (1) 下列判断中, 正确的是().
 - (A) 所有的正方形都相似
 - (B) 所有的矩形都相似
 - (C) 所有的菱形都相似
 - (D) 对应边成比例的两个四边形相似
- (2) 两个边数相同的多边形相似的条件是().
 - (A) 角对应相等
 - (B) 边的长度对应成比例
 - (C) 角对应相等且边的长度对应成比例
 - (D) 角对应相等或边的长度对应成比例
- (3) 下列说法中, 一定正确的是().
 - (A) 有一个角对应相等的两个平行四边形相似
 - (B) 有一条边对应相等的两个菱形相似
 - (C) 两个矩形的长与宽对应成比例, 这两个矩形相似
 - (D) 底角是 60° 的两个等腰梯形相似
3. 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是相似形, 且点 A 、 B 、 C 、 D 的对应点分别是点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 . 已知 $AB=6$, $BC=8$, $CD=14$, $DA=12$, $A_1B_1=3$, 求 B_1C_1 、 C_1D_1 、 D_1A_1 的长.

4. 在图 24-1-4 的方格图中, 画出图中图形的一个相似图形.

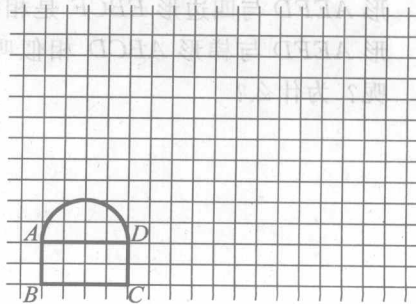


图 24-1-4



5. 如图 24-1-5, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是相似形, 其中点 A 、 B 、 C 的对应点分别是点 A 、 D 、 E . 已知 $AB=9$, $BC=8$, $AC=6$, $AE=2$, 求 AD 、 DE 的长.

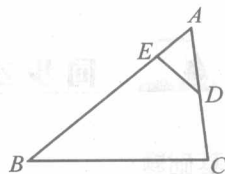
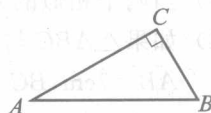


图 24-1-5

6. 请举出日常生活中图形放大或缩小的实例各 2 个.



提高题

7. 如图 24-1-6, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$, 且 $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle A = \angle A_1 = 30^\circ$. 请说明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 一定相似的理由.

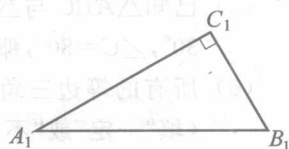


图 24-1-6

8. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 在菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle B_1 = 120^\circ$, 请说明菱形 $ABCD$ 与菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 一定相似的理由.

开放性综合题

9. 如图 24-1-7, 已知梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, EF 是中位线. 试问: 四边形 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 是相似形吗? 请说明理由. 又问: 四边形 $AEFD$ 与梯形 $ABCD$ 相似吗? 四边形 $EBCF$ 与梯形 $ABCD$ 呢? 为什么?

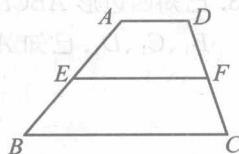


图 24-1-7



整合与拓展

小丽同学编题目

学习了图形的放缩与相似形这一节知识,爱动脑筋的小丽同学自编了两道几何题.她把这两道题交给了罗老师,罗老师看了,称赞小丽同学编得好,在全班同学面前表扬了她,并把这两道题作为课外习题布置给大家去研究.

编制题一:在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别是边 BC 、 CA 、 AB 的中点.求证: $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是相似形.

编制题二:如图 24-1-8,四边形 $ABCD$ 是矩形,且 $BC = \sqrt{2}AB$.将该矩形翻折,使边 DC 与边 AB 重合,得到折痕 EF ,请说明矩形 $BFEA$ 与矩形 $ABCD$ 是相似形的理由.

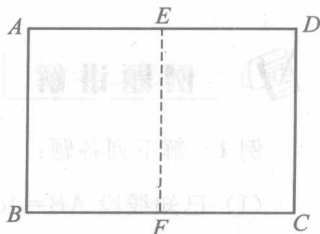


图 24-1-8

同学们,这两道几何题你会证明么?你也能编几道图形放缩和相似形的有关习题吗?动笔、动手、动脑一起来试试看.

二 比例线段

24.2 比例线段



知识点归纳

1. 两条线段的比

两条线段的长度的比叫做两条线段的比.两条线段的比值总是正数.

2. 成比例线段

在四条线段中,如果其中两条线段的比与另两条线段的比相等,那么这四条线段叫做成比例线段,简称比例线段.

如果 a 、 b 、 c 、 d 是成比例线段,即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么称线段 d 是 a 、 b 、 c 的第四比例项.如果

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (即 $b^2 = ac$),那么 b 叫做 a 、 c 的比例中项.

3. 比例线段的性质

(1) 基本性质

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么 $ad = bc$.反之也成立.

(2) 合比性质

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,那么 $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.





(3) 比例的等比性质

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 那么 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

4. 黄金分割

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB ($AP > PB$) 两段, 其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项, 那么称这种分割为黄金分割, 点 P 称为线段 AB 的黄金分割点. AP 与 AB 的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金分割数 (简称黄金数), 它是一个无理数, 在应用时常取它的近似值 0.618.



例题讲解

例 1 解下列各题:

(1) 已知线段 $AB=4\text{cm}$, $CD=80\text{mm}$, 求 $\frac{AB}{CD}$ 的值;

(2) 求长为 4cm 和 9cm 的线段的比例中项;

(3) 已知 $a=3\text{cm}$, $b=5\text{cm}$, $c=7\text{cm}$, 求线段 a 、 b 、 c 的第四比例项.

解 (1) 因为 $AB=4\text{cm}$, $CD=80\text{mm}=8\text{cm}$, 所以 $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{AB}{CD}$ 的值是 $\frac{1}{2}$;

(2) 设长为 4cm 和 9cm 的线段的比例中项是 $x\text{cm}$, 则 $x^2 = 4 \times 9$, 解得 $x = \sqrt{4 \times 9} = 6(\text{cm})$, 即长为 4cm 和 9cm 的线段的比例中项是 6cm ;

(3) 设 a 、 b 、 c 的第四比例项为 $x\text{cm}$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, 由已知得 $\frac{3}{5} = \frac{7}{x}$, 解得 $x = \frac{35}{3}(\text{cm})$, 即线段 a 、 b 、 c 的第四比例项是 $\frac{35}{3}\text{cm}$.

说明 第(1)题中, 两条线段的比是指两条线段的长度的比, 它们的比值总是正实数. 同时要注意, 其长度一定要用“同一长度单位”来度量, 也就是线段长度单位要统一; 第(2)、(3)题中的比例中项、第四比例项本身都是代数概念. 如果题目未说明各项是线段, 那么要注意各项的符号可正可负, 不要随意去掉负值; 如果各项是线段, 那么要保证结果为正.

例 2 已知 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 求证: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

证明 方法一 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (比例变形), $\therefore 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c}$,

即 $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}. \therefore \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (比例变形).

方法二 设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 则 $a=bk, c=dk$.

又 $\because \frac{a}{a-b} = \frac{bk}{bk-b} = \frac{k}{k-1}, \frac{c}{c-d} = \frac{dk}{dk-d} = \frac{k}{k-1}, \therefore \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$.

说明 方法一用了比例性质及等式性质. 方法二因为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 它们的比值相等, 设比值为 k , 则 a 、 c 用含 k 的式子表示. 这种方法也称为“设 k 法”, 在比例线段及相似形的学习中会



经常用到. 总之, 比例中的有关性质在成比例线段中完全适用. 在有关线段成比例的证明或计算中, 要熟悉比例的性质及根据性质进行比例式的各种变换. 另外, “设 k 法”也是很有用的方法. 如 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, 可设 $x = 3k, y = 4k$; $x:y:z = 3:4:5$, 可设 $x = 3k, y = 4k, z = 5k$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 可设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, 得 $a = bk, c = dk$.

例 3 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{3}{4}$, $\triangle ABC$ 的周长为 15cm, 求 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{3}{4}, \quad \therefore \frac{AB+BC+AC}{A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1} = \frac{3}{4}, \\ & \text{即 } \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \frac{15}{C_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{3}{4}, \text{ 解得 } C_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{4 \times 15}{3} = 20(\text{cm}). \end{aligned}$$

说明 此处用了比例的等比性质. 一般地, 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n} = k$, 那么 $\frac{a+c+e+\dots+m}{b+d+f+\dots+n} = k$. 注意: 此处的 $a, b, c, \dots$ 均为线段. 如果在实数范围内, 要注意式中的分母不能为零, 即 $b+d+f+\dots+n \neq 0$.

例 4 在某市的交通里程图中, 甲地和乙地有笔直的高速公路相通, 图中两地间所标的里程千米数为 30. 在图中用刻度尺量得甲、乙两地间的图距为 6 厘米, 求图距与实际距离之比.

$$\text{解} \quad 30 \text{ 千米} = 30000 \text{ 米} = 3000000 \text{ 厘米}, \text{ 所以 } \frac{6 \text{ 厘米}}{3000000 \text{ 厘米}} = \frac{1}{500000}.$$

答: 图距与实际距离之比为 $\frac{1}{500000}$ (或 $1:500000$).

说明 由于图距与实际距离所用的单位不统一, 因此首先要将两者用统一单位 (此处用厘米) 来表示. 图距与实际距离的比在地理学中叫比例尺, 一般用 $1:m$ 的形式表示, 它的意义是在同一长度单位的情况下, 实际距离是图距的 m 倍. 这也体现线段的比在实践中的应用.

例 5 如图 24-2-1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 且 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. 已知 $S_{\triangle ADE} = 1, S_{\triangle DBC} = 12$, 求 $S_{\triangle ABC}$.

解 设 $S_{\triangle DEC} = x$. 过点 D 作 $DH \perp AC$, 垂足为 H .

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DCE}} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot DH}{\frac{1}{2}EC \cdot DH} = \frac{AE}{EC}. \text{ 同理可得 } \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{AD}{DB}.$$

$$\text{由已知 } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \text{ 得 } \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DCE}} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle DBC}}, \text{ 即 } \frac{1}{x} = \frac{1+x}{12}.$$

解此方程, 得 $x = 3$ ($x = -4$ 不合题意, 舍去), 即 $S_{\triangle DEC} = 3$.

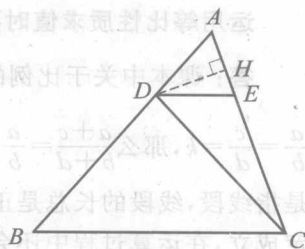


图 24-2-1





$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEC} + S_{\triangle DBC} = 1 + 3 + 12 = 16.$$

说明 要求 $\triangle ABC$ 的面积,关键是求 $\triangle DEC$ 的面积. $\triangle ADE$ 与 $\triangle DEC$ 是分别以 AE 、 EC 为底边的同高三角形,这样,可把三角形的面积比转化为对应底边的比.在设 $S_{\triangle DEC} = x$ 后,结合已知条件,利用上述关系,列出关于 x 的方程,求出 x 的值后,本题也就全部解决了.在这里有一个基本图形(如图 24-2-2),即 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点,联结 AD ,则有 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{CD}$.这也体现了在等高(或等底)条件下,三角形面积

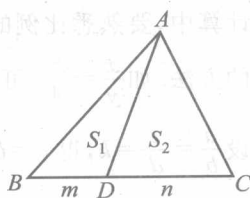


图 24-2-2

与线段比之间的内在联系(图中有 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$).这种内在联系在今后学习中会经常遇到.

例 6 已知线段 AB 的长度为 a .试问:一条线段的黄金分割点有几个?如果只有一个,请说明理由;如果有两个,请求出这两个黄金分割点之间的长度.

解 一条线段的黄金分割点有两个.

如图 24-2-3,点 P_1 在线段 AB 上($AP_1 > P_1B$),当 $AP_1^2 = P_1B \cdot AB$ 时, P_1 是 AB 的一个黄金分割点,此时, $AP_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

图 24-2-3

同样,点 P_2 在线段 AB 上($AP_2 < P_2B$),当 $BP_2^2 = AP_2 \cdot AB$ 时, P_2 也是 AB 的一个黄金分割点,此时, $BP_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$.

因此, $P_1P_2 = (AP_1 + BP_2) - AB = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right) - a = (\sqrt{5}-2)a$,即线段 AB 上的两个黄金分割点之间的长度是 $(\sqrt{5}-2)a$.

说明 黄金分割是几何中的一个重要概念,在实践中也有广泛的应用.黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是指黄金分割中较长线段与全线段的比值,它也等于较短线段与较长线段的比值.一般地,一条线段的黄金分割点有两个,这一点需注意.



疑难解答

运用等比性质求值时要注意什么?

答: 课本中关于比例的等比性质是这样叙述的:已知线段 a 、 b 、 c 、 d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$,那么 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.这个结论叫比例的等比性质.请注意,这里的 a 、 b 、 c 、 d 是指线段,线段的长总是正值.如果在实数范围内,必须加条件 $b+d \neq 0$,否则这一结论不一定成立,在运算过程中还会发生漏解.

例 已知 a 、 b 、 c 是实数,且 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k$,求 k 的值.

解 当 $a+b+c \neq 0$ 时,由等比性质得 $k = \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$;



当 $a+b+c=0$ 时, 有 $a+b=-c$, 所以 $k=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$.

综上, k 的值是 2 或 -1.

可见, 在几何运算中, 由于线段长都是正值, 等比性质总成立; 在代数运算中, 如本题, 要运用等比性质, 需有条件 $a+b+c \neq 0$, 但还需考虑 $a+b+c=0$ 的情况, 否则要漏解. 这也体现了分类讨论的数学思想.



同步练习

基础题

1. 填空:

(1) 在比例尺为 1:1000 的地图上, 图距是 25cm, 则实际距离是 _____ m; 若实际距离是 500m, 其图距是 _____ cm.

(2) 已知 h 是 e, f, g 的第四比例项, 则比例式是 _____.

(3) 已知两条线段的长为 $2a$ 和 $4a$, 它们的比例中项为 x , 那么 x 的长为 _____.

(4) 若 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 则 $\frac{a-b}{b} =$ _____.

(5) 在比例式 $(5+x):5=7:2$ 中, $x=$ _____.

(6) 已知 $3(x-y)-2x=0$, 则 $\frac{x}{y} =$ _____.

(7) 如图 24-2-4, 已知 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$, 则 $\frac{AB}{DB} =$ _____, $\frac{EC}{AE} =$ _____, $\frac{AB}{AD} =$ _____, $\frac{EC}{AC} =$ _____.

图 24-2-4

(8) 在等边 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的高, 则 $\frac{AD}{AC} =$ _____.

(9) 如图 24-2-5, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上一点, 联结 AD . 若 $S_{\triangle ABD} = 5$, $S_{\triangle ACD} = 4$, 则 $DC:BC =$ _____.

(10) 点 P 将线段 AB 黄金分割, 且 $PA > PB$, 那么 $\frac{PA}{AB} =$ _____
= _____ $\approx$ _____ (第二、三个空格内填数值).

(11) 如图 24-2-6, 若 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 36cm, 则 $\triangle ADE$ 的周长是 _____ cm.

(12) 已知直线 l 上顺次有四点 A, B, C, D , 且 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = 3$, 那么

$$\frac{BC}{AD} = \text{_____}, \frac{AB}{CD} = \text{_____}.$$

2. 选择:

(1) 线段 m, n, p 的第四比例项是 ().

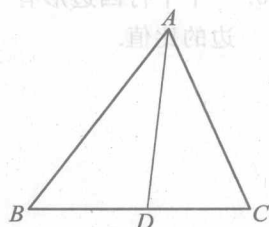
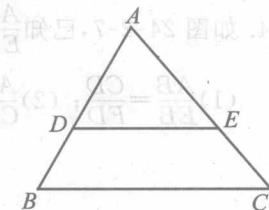


图 24-2-5

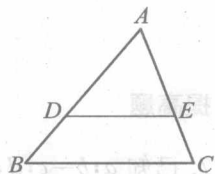


图 24-2-6