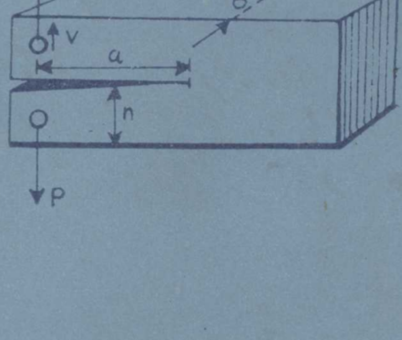
断裂力学习题及解答

曹梦率编



葛洲坝水电工程学院

前　　言

断裂力学是最近二、三十年才迅速发展起来的新兴学科，现有的断裂力学书籍，举例甚少。附有习题的更少，为了适应从事材料力学、断裂力学的师生地教学需要，为了有关中、青年教师、研究生、科技人员，进修学习的需要，我们编写了这本断裂力学习题与解答，总共选编了184题，其中60%是题解，40%可作为练习，在编写过程中，除参考了正式出版和未正式出版的断裂力学书刊、资料外，还从全国断裂力学学术会议论文汇编中，以及湖北省力学学会1981年年会论文中，选编了部分题目，但由于水平所限，对有的题目在安排顺序上，不一定恰当；有的章节选题还嫌少；有的问题分析还不够，至于错误和欠妥之处，恐怕难免，欢迎读者批评指正。

本书封面设计杨昌祖同志，俞建荣同志参加了校对工作。书中插图陈世华同志，我院印刷厂的同志给予了很大帮助，编者对他们表示衷心的感谢。

力学教研室

曹梦率　编

一九八二年六月

目　　录

一、线弹性断裂力学题

（一）基本概念题

1．断裂力学有那三种基本裂纹型式，它们各有什么特点？

2．应力强度因子K_1与断裂韧性K_{1c}有何异同？

3．能量释放率G_1与断裂判据G_{1c}有何异同？

4．由Ⅰ型情况下裂纹尖端的应力场公式计算：

（1）$\theta=0°,45°,90°,180°$处的σ_x，σ_y，τ_{xy}值。

（2）用莫尔园确定$\theta=45°,90°$处的主应力大小和方向。

（3）求正应力最大时的方向（θ角值）。

（4）求八面体剪应力最大时的方向。

5．对于Ⅱ型情况下裂纹尖端的应力场公式，求

（1）$\theta=0°$，$45°$，$90°$，$180°$处的$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$值。

（2）用莫尔园确定$\theta=45°$，$90°$处的主应力大小和方向。

（3）求正应力最大时的方向。

6．从Ⅰ型裂纹尖端应力场公式导出主应力公式，并绘出裂纹尖端附近主应力轨迹。

7．由Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型裂纹顶端应力场σ_x，σ_y和τ_{xy}表达式导出主应力表达式和极坐标表达式。

8．由Ⅰ、Ⅱ型裂纹顶端应力场的主应力导出主剪应力，并描主剪应力轨迹(在塑性断裂力学中称为滑移线场)．

9．设无限大平板．受轴向拉应力σ，在Ⅰ型裂纹顶端附近的应力为

$$\sigma_y = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

问当$\theta = 0°$时，在裂纹顶端和距裂纹顶端很远处，σ_y为多少？与题设条件有无矛盾？如何解释？

10．设有两条Ⅰ型裂纹，其中一条为4a，另一条裂纹长为a．如前者加载到σ，后者加载到2σ．问它们裂纹尖端附近的应力场是否相同？应力强度因子是否相同？

11．为什么裂纹尖端塑性区尺寸，平面应变比平面应力小？当$\theta = 0°$时，它们的塑性区尺寸分别等于多少？

答：平面应力$r_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_s}\right)^2$

平面应变$r_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_s}\right)^2$

12．应力松驰对裂纹尖端塑性区尺寸有何影响？

13．当已知应力强度因子K_1和材料的屈服极限σ时，试绘出裂纹顶端平面应力与平面应变塑性区的轨迹．

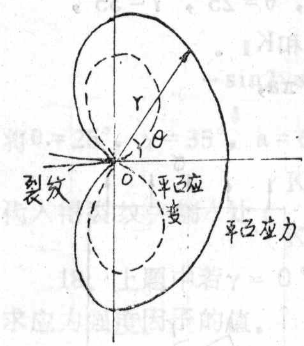
提示：平面应力塑性区的边界方程为：

$$r = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_s^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+3\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

平面应变塑性区的边界方程：

$$r = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_s^2}\left[\frac{3}{4}\sin^2\theta + (1-2\mu)^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

用极坐标（r,θ）描绘，如题图13所示。



题图13 裂纹顶端附近塑性区形状

14. 当 K_{II}, K_{III} 和 σ_s 已知时，试用Mises屈服准则

$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2$，导出平面应力和平面应变塑性区边界方程，并描绘出Ⅱ型和Ⅲ型塑性区形状图。

15. 试根据Mises判据和Tresca判据，确定平面应力和平面应变下裂纹尖端塑性区的边界方程。并指出两种屈服判据所得的结果是否相同。

（二）求应力强度因子题

16. 计算以下各“无限大”平板中裂纹尖端处的应力强度因子值。

（1）题图16所示，裂纹长 $2a=17.5$mm，$\theta=35°$，$\sigma=640$Mpa，$\tau_1=360$MPa。

解 $K_I=\alpha\sigma\sqrt{\pi a}=\sigma\sqrt{\pi a}\sin^2\theta$

$=640\sqrt{3.14\times0.00875}\times\sin^2 35°$

$=640\times0.166\times(0.58)^2=34.9\text{MPa}\sqrt{m}$

$K_{II}=\beta\sigma\sqrt{\pi a}=\sigma\sqrt{\pi a}\sin35°\cos35°$

$=640\sqrt{3.14\times0.00875}\times0.58\times0.82$

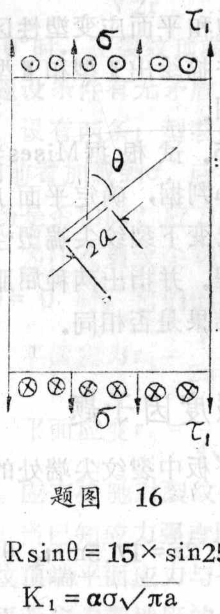
$=49.9\text{MPa}\sqrt{m}$

$$K_{\mathrm{III}} = r\tau_1\sqrt{\pi a} = \tau_1\sqrt{\pi a}\sin 35^\circ$$

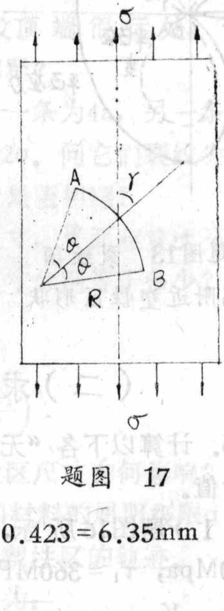
$$= 360\sqrt{3.14\times 0.00875\times 0.58} = 34.2\mathrm{MPa}\sqrt{m}$$

17. 如题图17所示：$R = 15\mathrm{mm}$，$\theta = 25^\circ$，$\gamma = 35^\circ$，$\sigma = 320\mathrm{MPa}$，求裂纹尖端A处的K_{I}和K_{II} .

解：$K_{\mathrm{I}} = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}$，$K_{\mathrm{II}} = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$，



题图 16



题图 17

式中$a = R\sin\theta = 15\times\sin 25^\circ = 15\times 0.423 = 6.35\mathrm{mm}$

$$K_{\mathrm{I}} = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$= \sigma\sqrt{\pi a}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(1-\cos 2\gamma\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}} + \sin 2\gamma\ \sin^3\frac{\theta}{2} + \cos\left(2\gamma-\frac{3\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$=\sigma\sqrt{\pi a}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(1-\cos 2\gamma\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin 2\gamma\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sin(2\gamma-\frac{3\theta}{2})\right]\right\}$$

将$\theta=25°$，$\gamma=35°$，$a=6.35m$

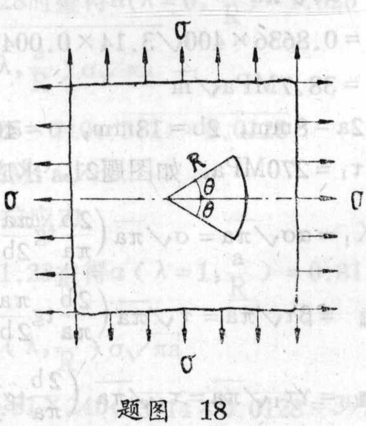
代入得裂纹尖端A处 $\begin{cases} K_{\mathrm{I}}=40\mathrm{MPa}\sqrt{m} \\ K_{\mathrm{II}}=-8.5\mathrm{MPa}\sqrt{m} \end{cases}$

18. 上题中若$\gamma=0°$受双向均匀拉应力如题图18所示，求应力强度因子的值。

提示：

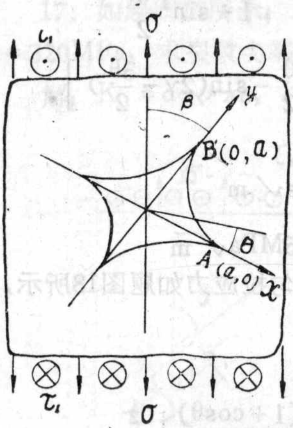
$$K_{\mathrm{I}}=\frac{\sigma\sqrt{\pi R}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$K_{\mathrm{II}}=\frac{\sigma\sqrt{\pi R}}{1+\sin^2\frac{\theta}{2}}\left[\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

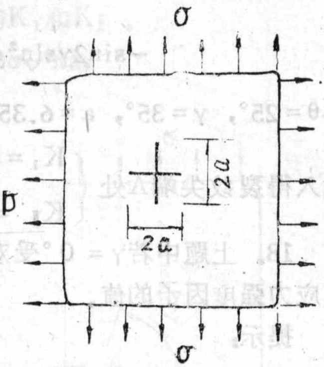


题图 18

19. 已知$a=6.5mm$　$\beta=30°$　$\sigma=320MPa$　$\tau_1=180MPa$ 计算题图19所示裂纹尖端处的K_1、K_{II}及K_{III}。



题图　19



题图　20

20. 已知$2a=8mm$　$\sigma=400MPa$如题图20所示，求应力强度因子？

解：　$K_1=\alpha\sigma\sqrt{\pi a}$

$$=0.8636\times400\sqrt{3.14\times0.004}$$

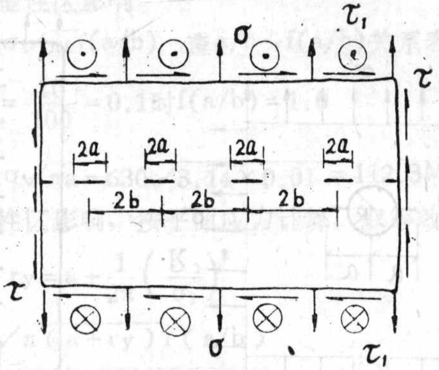
$$=38.7MPa\sqrt{m}$$

21. 已知$2a=8mm$，$2b=18mm$，$\sigma=400MPa$，$\tau=250MPa$，$\tau_1=270MPa$，如图题21，求应力强度 因 子。

提示：　$K_1=\alpha\sigma\sqrt{\pi a}=\sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}tg\frac{\pi a}{2b}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$K_{II}=\beta\tau\sqrt{\pi a}=\tau\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}tg\frac{\pi a}{2b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K_{III}=\gamma\tau_1\sqrt{\pi a}=\tau_1\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}tg\frac{\pi a}{2b}\right)^{\frac{1}{2}}$$



题图 21

22.已知圆孔直径为20mm裂纹(包括圆孔)全长$2a=25.6$ mm，求在单向均匀拉伸应力和双向等值均匀拉伸应力下 裂纹尖处的K_1，设$\sigma=240\text{MPa}$

解：由于 $\frac{a}{R}=\frac{1.28}{10}=1.28$

① 对于单向均匀拉应力

当$\frac{a}{R}=1.28$时查得$\alpha(\lambda=0,\frac{a}{R})=1.025$

$$K_1=\alpha(\lambda,\frac{a}{R})\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$=1.025\times240\sqrt{3.14\times0.0128}$$

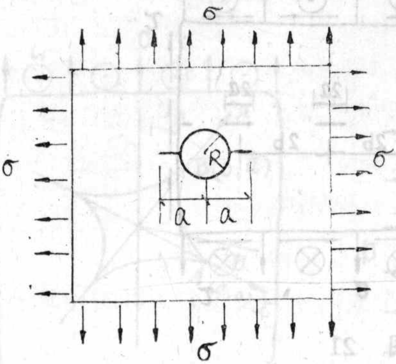
$$=49.5\text{MPa}\sqrt{m}$$

② 对双向拉应力

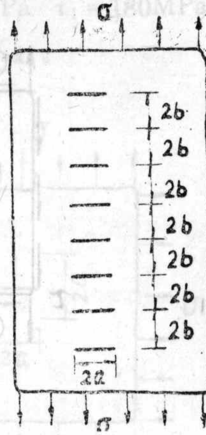
由$\frac{a}{R}=1.28$查得$\alpha(\lambda=1,\frac{a}{R})=0.81$

$$K_1=\alpha(\lambda,\frac{a}{R})\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$=0.81\times240\sqrt{3.14\times0.0128}=39.1\text{MPa}\sqrt{m}$$



题图 22



题图 23

23．已知$\sigma=450\mathrm{MPa}$，$2a=16\mathrm{mm}$；$2b=24\mathrm{mm}$，求裂纹数分别为$N=3$、$N=5$、$N=7$时中间裂纹尖端处的K_1值，如题图23所示。

解：$K_1 = a(N, \frac{a}{R})\sigma\sqrt{\pi a}$

式中$\alpha(N, a/b)$的值查$\alpha \sim a/b$关系曲线得

$N=3$时 $\alpha=0.78$ $N=5$时 $\alpha=0.76$ $N=7$时 $\alpha=0.72$

当$N=3$时，$K_1=0.78\times450\sqrt{3.14\times0.008}=56.7\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

$N=5$时，$K_1=0.76\times450\sqrt{3.14\times0.008}=54.1\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

$N=7$时，$K_1=0.72\times450\sqrt{3.14\times0.008}=52.9\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

24．题图24所示板宽$2b=200\mathrm{mm}$，厚度$t=10\mathrm{mm}$，具有中心贯穿裂纹，裂纹长$2a=20\mathrm{mm}$。板端总拉力$P=1.26\mathrm{MN}$，求应力强度因子K_1，若考虑塑性区影响，K_1增为多大？已知材料的$\sigma_s=1120\mathrm{MPa}$

解：如题图24，$\sigma=\frac{P}{F}=\frac{1.26}{0.2\times0.01}=630\mathrm{MPa}$

不考虑塑性区影响

$K_1=\sigma\sqrt{\pi a}f(a/b)$ 查a/b～f(a/b)关系表

当$\frac{a}{b}=\frac{10}{100}=0.1$时$f(a/b)=1.0$

$\therefore K_1=\sigma\sqrt{\pi a}=630\sqrt{3.14\times0.01}=112.3\text{MPa}\sqrt{m}$

考虑塑性区影响，按平面应力计算，取等效裂纹长为：

$$a+ry=a+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_s}\right)^2$$

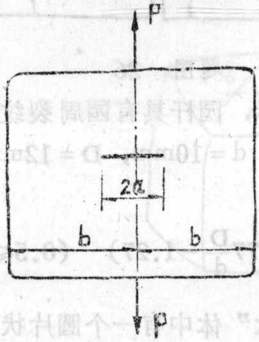
则 $K_1=\sigma\sqrt{\pi(a+ry)}f(a/b)$

$$=\sigma\sqrt{\pi\left[a+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_s}\right)^2\right]}f(a/b)$$

$\because f(a/b)=1.0$ 解得：

$$K_1=\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2}}=\frac{630\times\sqrt{\pi\times0.01}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(\frac{630}{1120}\right)^2}}$$

$$=\frac{630\times0.177}{0.92}=122.6\text{MPa}$$



题图 24

25. 计算资料同上题，若用应力强度因子

公式 $K_1 = f(\xi)\sigma\sqrt{\pi a}$， $\xi = 2a/W$

$$f(\xi) = (1-0.5\xi+0.37\xi^2-0.044\xi^3)/\sqrt{1-\xi}$$

计算裂纹顶端K_1值，当考虑裂纹尖端小范围屈服条件下，作塑性区修正时，K_1将增大多少？

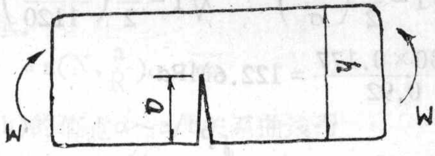
26. 题图26所示矩形截面梁高度$h=90\text{mm}$，$M=300\text{KN}\cdot\text{m/m}$，裂纹深度$a=50\text{mm}$，求$K_1$值。

解：$K_1 = \dfrac{6M}{(h-a)^{3/2}}g\left(\dfrac{a}{h}\right)$

式中：当$\dfrac{a}{h}=\dfrac{50}{90}=0.556$时，查得$g\left(\dfrac{a}{h}\right)=0.726$

$$K_1 = \frac{6\times300}{(0.09-0.05)^{3/2}}\times0.726 = \frac{1800}{0.008}\times0.726$$

$$=163000\text{KPa}\sqrt{m} = 163\text{MPa}\sqrt{m}$$



题图 26

27. 题图27所示，园杆具有园周裂纹，受轴向拉力作用，已知$P=10\text{KN}$，$d=10\text{mm}$，$D=12\text{mm}$，求应力强度因子。

答：$K_1 = \dfrac{P}{D^{3/2}}\left(1.77\dfrac{D}{d}-1.27\right)$ $\left(0.5\leqslant\dfrac{D}{d}\leqslant0.9\right)$

28. 在“无限大”体中有一个圆片状裂纹，直径为25 mm，$\sigma=236\text{MPa}$，$\tau=185\text{MPa}$，取$\mu=0.3$，求裂纹边缘处最大的K_{I}，K_{II}及K_{III}的值，并注明它们的位置。

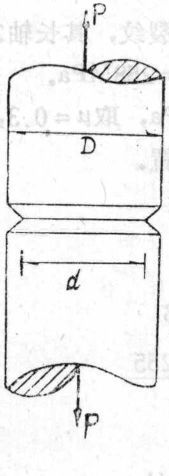
解：(1)在均匀拉应力σ作用下题图28(a)

$$K_{\mathrm{I}}=\alpha\sigma\sqrt{\pi a}=\frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}=\frac{2}{3.14}\times236\sqrt{3.14\times0.0125}$$

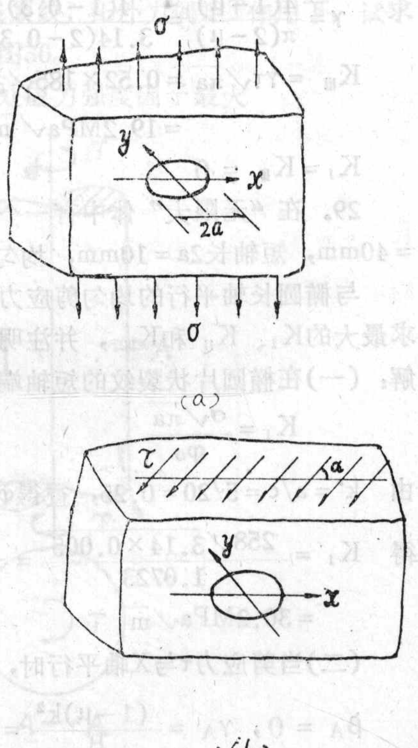
$$=\frac{472}{3.14}\times0.198=29.8\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$$

$$K_{\mathrm{II}}=K_{\mathrm{III}}=0$$

(2)在均匀剪应力τ作用下题图28(b)与τ方向平行的直径两端处



题图　27



题图　28

$$\beta = \frac{4}{\pi(2-\mu)} = \frac{4}{3.14(2-0.3)} = 0.746$$

$\gamma = 0$

$$K_{II} = \beta\tau\sqrt{\pi a} = 0.745 \times 185\sqrt{3.14 \times 0.0125}$$

$$= 27.5\text{MPa}\sqrt{m}$$

$K_I = K_{II} = 0$

与τ方向垂直的直径两端点处

$$\gamma = \frac{4(1-\mu)}{\pi(2-\mu)} = \frac{4(1-0.3)}{3.14(2-0.3)} = \frac{2.8}{5.55} = 0.52$$

$$K_{III} = \gamma\tau\sqrt{\pi a} = 0.52 \times 185\sqrt{3.14 \times 0.0125}$$

$$= 19.2\text{MPa}\sqrt{m}$$

$K_1 = K_{II} = 0$

29. 在"无限大"体中有一个椭圆片状裂纹，其长轴$2c = 40\text{mm}$，短轴长$2a = 10\text{mm}$，均匀拉应力$\sigma = 258\text{MPa}$。

与椭圆长轴平行的均匀剪应力$\tau = 212\text{MPa}$，取$\mu = 0.3$，求最大的K_1、K_{II}和K_{III}，并注明它们的位置。

解：(一)在椭圆片状裂纹的短轴端K_1为最大

$$K_1 = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\varphi_0}$$

由 $k' = a/c = 5/20 = 0.25$，查得$\varphi_0 = 1.0723$

得 $$K_1 = \frac{258\sqrt{3.14 \times 0.005}}{1.0723} = \frac{258 \times 0.1255}{1.0723}$$

$$= 30.2\text{MPa}\sqrt{m}$$

(二)当剪应力τ与X轴平行时，短轴端点处

$$\beta_A = 0, \quad \gamma_A = \frac{(1-\mu)k^2}{B} = \frac{(1-0.3) \times 0.937}{0.74} = 0.89$$

$$K_{III} = \gamma_A \tau\sqrt{\pi a} = 0.89 \times 212\sqrt{3.14 \times 0.005}$$

$$= 0.89 \times 212 \times 0.1255 = 23.7\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$$

长轴端点处

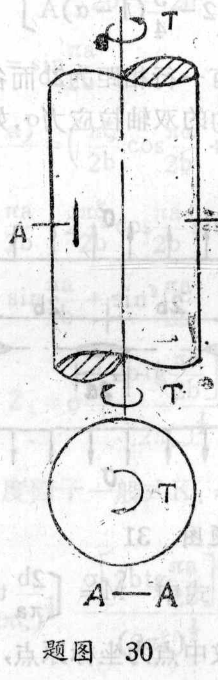
$$\beta_B = \frac{k^2\sqrt{k'}}{B} = \frac{0.937\sqrt{0.25}}{0.733} = 0.635$$

$$K_{II} = \beta_B \tau \sqrt{\pi a}$$

$$= 0.635 \times 212\sqrt{3.14 \times 0.005} \approx 16\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$$

30。有一个直径为$d = 2r$的扭转圆轴，在其表面有一个深度为a长度为2c的轴向浅裂纹，在外力偶矩T作用下，试求此裂纹的强度因子，如题图30。

解：在裂纹最深尖端处应力强度因子最大



题图 30

$$K_{Ⅲ}=\gamma\frac{T}{a^3}\sqrt{\pi a}$$

式中 $\gamma=\dfrac{(1-\alpha)^3(1+\alpha)^{3/2}\{2(1-\alpha)+\sqrt{\alpha}(mJ_0+J_1)\}}{\alpha^2\{2\pi^2-[2(1-\alpha)^2A^2+\alpha(A+B)^2]\}}$

式中 $\alpha=(1-\dfrac{a}{r}),\ m=\dfrac{1}{2}(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})$

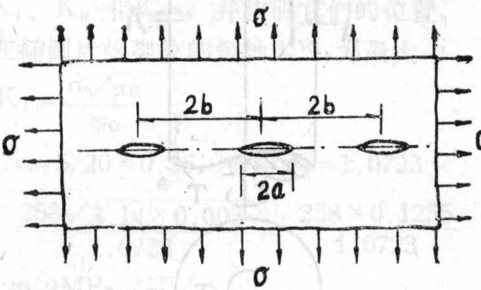
$$J_0=4\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\alpha},$$

$$J_1=\left[\frac{-(1-\alpha)}{4\alpha}\right]\left[4\sqrt{\alpha}-(1-\alpha)J_0\right]$$

$$A=1/\alpha[(1+\alpha)^2(\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{a})/\sqrt{\alpha}-(1-\alpha)]$$

$$B=\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]\left[2-\frac{3}{4}(1-\alpha)A\right]$$

31. 无限大板具有一行相距为2b而各长为2a的共线裂纹，在无限远处受均匀的双轴拉应力σ，如题图31所示，试证应力强度因子为：



题图 31

$K_1=M\sigma\sqrt{\pi\alpha}$ 式中 $M=\left[\dfrac{2b}{\pi a}\mathrm{tg}\dfrac{\pi a}{2b}\right]^{\frac{1}{2}}$

解：取任意一裂纹中点为坐标原点，则应力函数为：