

- 合理、完善的知识体系结构
- 内容丰富，重点突出，应用性强
- 免费提供相关程序源代码下载
- 深入、详细剖析 MATLAB 工程应用技术

MATLAB
工程应用书库

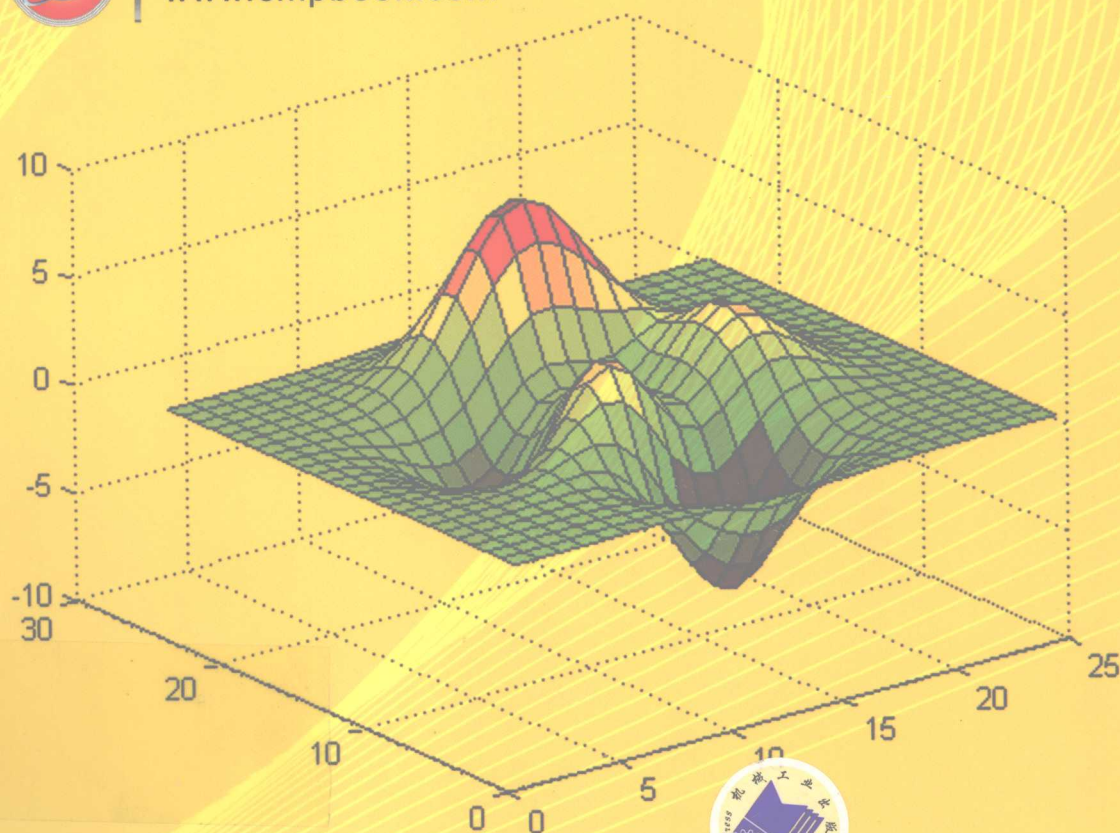
MATLAB

小波分析



网上提供源代码下载
www.cmpbook.com

张德丰 著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

7

TP391.75
57

MATLAB 工程应用书库

MATLAB 小波分析

张德丰 著



机械工业出版社

本书从信号处理的角度阐述小波分析的基本原理及其应用。从信号时-频联合分析引入小波变换,将信号的多分辨率分析及 Mallat 算法作为全书的重点,并在此基础上,进一步阐述了双正交小波多分辨率分析、小波包多分辨率分析、提升小波应用,还讲述了小波分析在奇异性检测、去噪及数据压缩中的应用。为鼓励读者将理论学习与上机实验结合以提高学习效率,书中提供了许多 MATLAB 仿真程序,供读者参考。

本书适用于从事信号处理、图像处理等方面工作的工程技术人员,也可作为理工科各专业高年级本科生、研究生学习小波理论与应用的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 小波分析 / 张德丰著. —北京:机械工业出版社, 2009.1

(MATLAB 工程应用书库)

ISBN 978-7-111-25613-7

I. M… II. 张… III. 计算机辅助计算—软件包, Matlab—应用—小波分析
IV. TP391.75 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 180982 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:丁 诚 吴鸣飞

责任编辑:丁 诚 李 宁

责任印制:杨 曦

三河市宏达印刷有限公司印刷

2009 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·22.75 印张·558 千字

0001—4000 册

标准书号:ISBN 978-7-111-25613-7

定价:41.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010) 68326294 68993821

购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010) 88379753 88379739

封面无防伪标均为盗版

前言



小波变换的概念是由法国从事石油信号处理的工程师 J.Morlet 在 1974 年首先提出的。与傅里叶变换、窗口傅里叶变换 (Gabor 变换) 相比, 它是一个时间和频率的局域变换, 因而能有效地从信号中提取信息, 通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析, 解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题。小波变换被誉为“数学显微镜”, 它是调和分析发展史上里程碑式的进展。小波理论被认为是傅里叶分析的重大突破, 它已成为从应用数学到信号与图像处理等众多领域的研究热点。

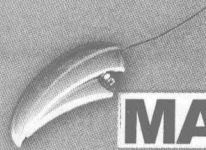
小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。现在, 它已经在科技信息产业领域取得了令人瞩目的成就。现今, 信号处理已经成为当代科学技术工作的重要部分, 信号处理的目的是: 准确的分析、诊断、编码压缩和量化、快速传递或存储、精确地重构 (或恢复)。现在, 对于性质随时间稳定不变的信号, 处理的理想工具仍然是傅里叶分析, 但是在实际应用中的绝大多数信号是非稳定的, 而特别适用于非稳定信号的工具就是小波分析。

在传统的傅里叶分析中, 信号完全是在频域展开的, 不包含任何时域信息。这对于某些应用来说是很恰当的, 因为信号频率的信息对其是非常重要的。但其丢弃的时域信息可能对某些应用同样非常重要, 所以人们对傅里叶分析进行了推广, 提出了很多能表征时域和频域信息的信号分析方法, 如短时傅里叶变换、Gabor 变换、时频分析、小波变换等。其中短时傅里叶变换是在傅里叶分析基础上引入时域信息的最初尝试, 其基本假定在于在一定的时间窗内信号是平稳的, 那么通过分割时间窗, 在每个时间窗内把信号展开到频域就可以获得局部的频域信息, 但是它的时域区分度只能依赖于大小不变的时间窗, 对某些瞬态信号来说还是粒度太大。换言之, 短时傅里叶分析只能在一个分辨率上进行, 所以对很多应用来说不够精确, 存在很大的缺陷。

小波分析克服了短时傅里叶变换在单分辨率上的缺陷, 具有多分辨率分析的特点, 在时域和频域都有表征信号局部信息的能力, 时间窗和频率窗都可以根据信号的具体形态动态调整。在一般情况下, 低频部分 (信号较平稳) 可以采用较低的时间分辨率, 而提高频率的分辨率, 在高频情况下 (频率变化不大) 可以用较低的频率分辨率来换取精确的时间定位。因为这些特点, 小波分析可以探测正常信号中的瞬态, 并展示其频率成分, 被称为“数学显微镜”, 广泛应用于各个时频分析领域。

小波变换适用于信号的主要信息集中在低频域的情况。当感兴趣的频率成分 (如机械振动信号、语音信号等) 位于中高频段时, 由于小波变换在高频段的频谱窗口较宽, 其小波系数中包含的频率成分过多, 无法获取感兴趣的频率信号, 利用小波包技术则可以将小波变换中停止分解的中高频段小波系数继续分解, 使分解序列在整个时频域内都有较高的时频分辨率和相同的带宽。

小波包分解与小波分解相比, 是一种更精细的分解方法, 它不仅对图像的低频部分进行分解, 也对图像的高频部分进行分解。小波包对图像分解作多分辨率分解是在小波函数对图



像的分解基础上发展起来的,通过水平和垂直滤波,小波包变换将原始图像分为 4 个子带:水平和垂直方向上的低频子带,水平和垂直方向上的高频子带。相对于小波变换,小波包变换能够对图像中的高频部分进行分解,具有更强的适应性,因此更加适合于图像的各种处理。小波包分析属于线性时频分析法,它具有良好的时频定位特性以及对信号的自适应能力,因而能够对各种时变信号进行有效的分解。

传统的卷积小波(第一代小波)变换,由于采用卷积运算方法,过程复杂,运算量大,实时性较差,不利于硬件的实现。1995 年 Sweldens 提出了一种不依赖于傅里叶变换的新的构造方法——提升格式(Lifting Scheme),称之为第二代小波变换。这种提升格式不但保持了第一代小波的特性,同时又克服了其平移和伸缩的不变性。许多中外学者对提升格式小波变换进行了广泛研究,取得了丰硕的成果。

小波提升方案为第一代小波变换提供了一种新的更快速的实现方法。第一代小波变换都可以通过 Euclidean 算法得到其等效的提升结构。提升方法不但是构造第二代小波的基本工具,还使得第一代小波的构造不再依赖于傅里叶变换构造,大大降低了构造第一代小波的难度,并且已经证明提升可以实现所有的第一代小波变换。利用提升方案可以构造出不同的小波,如 Daubechies 双正交小波和差值双正交小波。提升方法提供了一个有效的构造非线性小波的方法,构造出的非线性小波同传统小波变换相比,计算简单快速,而且适合于自适应、非线性、非奇异采样和整数到整数的变换。双正交小波变换因为具有线性性而被广泛应用于图像压缩领域。目前的研究证明,任何具有 FIR 结构的双正交小波变换都可以由惰性变换经过有限步交替的提升和对偶提升过程得到。

考虑到小波变换域与傅里叶变换域之间存在着一定的转换关系,并且经典小波分析是从傅里叶分析的基础上发展出来的,所以在第 1 章讲解了 Fourier 变换基本理论及其在 MATLAB 中的实现,以便在后续章节,比较小波变换与 Fourier 变换的各自特点和处理问题的不同之处。第 2 章讲解了小波分析用于信号处理方面的知识,主要内容是用一维小波分析来分析信号的特征并进行处理。第 3 章讲解了小波变换在图像处理方面的应用,图像是二维信号,因此本章主要内容是用二维小波变换研究在图像处理方面的应用。第 4 章讲解了小波包分析的应用,小波包分解与小波分解相比,是一种更精细的分解方法。第 5 章讲解了提升小波变换,这种提升小波变换不但保持了第一代小波的特性,同时又克服了其平移和伸缩的不变性。第 6 章讲解了小波分析在工程中的综合应用,是全书的核心内容。

本书力求内容丰富、图文并茂、文字流畅,使之成为一本学习和使用 MATLAB 小波分析解决理论与工程应用问题有价值的参考书。但错误或疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

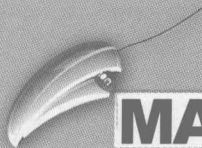
编 者

目 录



前言

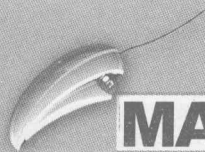
第 1 章 Fourier 变换与 MATLAB 实现	1
1.1 Fourier 级数与 Fourier 变换	1
1.1.1 三角级数	2
1.1.2 以 2π 为周期的函数的 Fourier 级数	2
1.1.3 Fourier 变换	3
1.1.4 傅里叶变换及 MATLAB 实现	4
1.1.5 MATLAB 函数实现傅里叶变换	5
1.1.6 连续时间信号傅里叶变换的数值计算	6
1.1.7 信号的 Fourier 分解与合成 MATLAB 实现	8
1.2 复数形式的 Fourier 级数及其 MATLAB 应用	13
1.2.1 基本理论	13
1.2.2 Fourier 变换的 MATLAB 实现	14
1.2.3 MATLAB 程序实例	15
1.3 Fourier 变换的性质	17
1.3.1 Fourier 变换的线性性	17
1.3.2 Fourier 变换尺度特性	19
1.3.3 Fourier 变换时移特性	20
1.3.4 Fourier 变换频移特性	23
1.3.5 Fourier 变换的对称性	26
1.3.6 偶函数和奇函数与 Fourier 变换后实部和虚部的关系	27
1.3.7 卷积定理	28
1.4 快速 Fourier 变换及其 MATLAB 应用	31
1.4.1 快速 Fourier 变换的用法	31
1.4.2 快速 Fourier 变换应用举例	32
1.5 运用 FFT 进行简单滤波	39
1.6 FFT 在工程分析中的应用	42
1.6.1 在地倾斜数据中的应用	42
1.6.2 MATLAB 分析地震数据中的频率成分	43
1.6.3 利用 FFT 滤波的应用	47
第 2 章 小波分析与信号处理	49
2.1 小波分析的基本理论	49
2.1.1 连续小波变换	50
2.1.2 离散小波变换	50
2.1.3 多分辨率分析及 Mallat 算法	51



2.1.4 一维正交多分辨率分析及 Mallat 算法	51
2.1.5 紧支撑双正交小波基的构造	57
2.1.6 第二代小波变换	60
2.2 信号分解	65
2.2.1 信号的连续小波分解	65
2.2.2 信号的离散小波分解	72
2.3 信号重构	76
2.3.1 信号小波重构	76
2.3.2 小波函数应用实例	81
2.4 信号压缩	89
2.4.1 信号压缩	89
2.4.2 信号压缩实例	90
2.5 信号去噪	91
2.5.1 信号去噪	91
2.5.2 信号去噪实例	92
2.6 信号分析与检测	97
第 3 章 小波变换在图像处理中的应用	109
3.1 MATLAB 的图像处理	109
3.1.1 MATLAB 图像处理应用举例	109
3.1.2 图像处理基本操作	110
3.1.3 图像处理的高级应用	112
3.2 图像的小波分解和重构算法	115
3.2.1 二维小波变换及相应的快速算法	115
3.2.2 小波分解和重构 MATLAB 实例	120
3.3 小波分析在图像去噪中的应用	123
3.3.1 阈值处理函数选取	123
3.3.2 阈值的选取	123
3.3.3 小波分析的去噪步骤	124
3.3.4 小波分析去噪 MATLAB 实例	124
3.4 基于小波分析的图像压缩	130
3.4.1 图像小波分解的特点	130
3.4.2 小波零树和 3 个方向跨频带矢量的分类	130
3.4.3 基于小波变换的图像局部压缩	131
3.4.4 小波变换用于图像压缩的一般方法	133
3.5 基于小波分析的图像平滑	140
3.5.1 小波图像平滑的基本原理	140
3.5.2 MATLAB 实例分析	140
3.6 基于小波变换的数字图像水印研究	141
3.6.1 数字水印应具有的特点	141



3.6.2 数字水印的基本理论框架	142
3.6.3 数字水印技术需要解决的问题	143
3.6.4 一种基于小波变换的数字水印方法	144
3.6.5 MATLAB 实例分析	145
3.7 小波分析与图像增强	148
3.7.1 小波图像增强的基本方法	148
3.7.2 图像增强 MATLAB 实例	149
3.8 小波分析与图像融合	153
3.8.1 小波图像融合的基本原理	154
3.8.2 MATLAB 实例分析	154
第 4 章 小波包分析的应用	158
4.1 小波包基本理论	158
4.1.1 小波包理论分析	159
4.1.2 小波包的性质	159
4.1.3 小波包的空间分解	160
4.1.4 小波包算法	161
4.2 小波包函数用法	161
4.3 小波包在信号时频分析中的应用	181
4.3.1 小波包变换分析两个信号功率谱	181
4.3.2 调频信号的小波包分析	188
4.3.3 正弦信号的小波包分析	190
4.3.4 δ 信号的小波包分析	192
4.3.5 变频信号的小波包分析	192
4.4 小波包与信号去噪	195
4.4.1 基本原理	195
4.4.2 MATLAB 实例分析	195
4.5 小波包分析用于信号压缩	200
4.5.1 基本原理	200
4.5.2 MATLAB 实例分析	200
4.6 小波包与图像边缘检测	203
4.6.1 基本原理	203
4.6.2 MATLAB 实例分析	203
第 5 章 MATLAB 提升小波变换	206
5.1 提升小波变换的简化实现	206
5.1.1 小波分解与重构的多相位表示	207
5.1.2 Laurent 多项式的 Euclidean 算法	209
5.1.3 改进的 Laurent 多项式 Euclidean 算法	210
5.1.4 多相位矩阵的因子分解	212
5.1.5 小波变换提升实现的传统算法	216



5.1.6 小波变换提升实现的简化算法	218
5.1.7 提升算法举例	219
5.1.8 整数小波变换	223
5.2 提升算法的 MATLAB 实现	224
5.2.1 MATLAB 实现提升方案的基本步骤	224
5.2.2 MATLAB 小波工具箱函数	225
5.2.3 MATLAB 提升小波函数应用	232
5.3 提升小波变换应用实例	239
5.3.1 MATLAB 一维提升小波变换	239
5.3.2 MATLAB 二维提升小波变换	250
第 6 章 小波分析工程应用	263
6.1 小波分析	263
6.1.1 概述	263
6.1.2 傅里叶变换与小波变换的比较	264
6.1.3 小波分析与多分辨率分析的历史	264
6.2 从傅里叶变换到小波变换	266
6.2.1 傅里叶变换	267
6.2.2 短时傅里叶变换	267
6.2.3 小波变换	268
6.3 基于 MATLAB 的小波快速算法设计	271
6.3.1 小波快速算法设计原理与步骤	271
6.3.2 小波分解算法	272
6.3.3 对称小波分解算法	272
6.3.4 小波重构算法	273
6.3.5 对称小波重构算法	274
6.3.6 MATLAB 程序设计实现	274
6.4 小波变换检测故障信号与小波类型的选择	283
6.4.1 故障信号检测的理论分析	283
6.4.2 实验结果与分析	286
6.4.3 小波类型选择	292
6.5 图像多尺度边缘检测算法研究	292
6.5.1 多尺度边缘检测	293
6.5.2 快速多尺度边缘检测算法	295
6.5.3 实验结果与分析	296
6.6 小波变换在信号特征检测中的算法研究	298
6.6.1 小波信号特征检测的理论分析	298
6.6.2 实验结果与分析	301
6.7 基于小波的信号突变点检测算法研究	307
6.7.1 信号的突变性与小波变换	307

6.7.2 信号的突变点检测原理	308
6.7.3 实验结果与分析	309
6.8 基于小波的信号阈值去噪算法研究	313
6.8.1 阈值去噪方法	313
6.8.2 阈值风险	314
6.8.3 实验结果与分析	315
6.9 基于小波图像压缩技术的算法研究	320
6.9.1 图像的小波分解算法	320
6.9.2 小波变换系数分析	322
6.9.3 实验结果与分析	322
6.10 小波变换图像测试分析	331
6.10.1 概述	331
6.10.2 实例说明	332
6.10.3 输出结果与分析	332
6.10.4 源程序	337
参考文献	349

第1章 Fourier变换与MATLAB实现



在传统的傅里叶分析中,信号完全是在频域展开的,不包含任何时域信息,这对于某些就影来说是很恰当的,因为信号频率的信息对其是非常重要的。但其丢弃的时域信息可能对某些应用同样非常重要,所以人们对傅里叶分析进行了推广,提出了很多能表征时域和频域信息的信号分析方法,如短时傅里叶变换,窗口傅里叶变换(Gabor变换),时频分析,小波变换等。考虑到小波变换域与傅里叶变换域之间存在着一定的转换关系,并且经典小波分析是从傅里叶分析的基础上发展出来的,所以,首先讲解傅里叶(Fourier)变换基本理论及其在MATLAB中的实现,以便在后续中,比较小波变换与傅里叶(Fourier)变换的各自特点和处理问题的不同之处。

1.1 Fourier级数与Fourier变换

在科学试验与工程技术中经常碰到一种周期运动,如单摆在振幅很小时的摆动,交流电的电流、电压等。这种运动被称为简谐运动,可用正弦函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 来描述。若干简谐运动

$$y_k = A_k \sin(k\omega x + \varphi_k), \quad k=1, 2, \dots, n$$

的叠加则可描述更复杂的周期运动,如方波(见图1-1)就可以被看成无穷多个奇次正弦函数的叠加。其MATLAB程序如下:

```
clf, x=-pi:pi/20:pi;
y1=sin(x)+1/3*sin(3*x);
y2=y1+1/5*sin(5*x);
y3=y2+1/7*sin(7*x)+1/9*sin(9*x)+1/11*sin(11*x)+1/13*sin(13*x);
plot(x,y1,x,y2,x,y3,'linewidth',2)
legend('y1','y2','y3')
```

程序运行结果如图1-2所示。

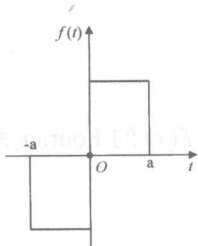


图1-1 方波示意图

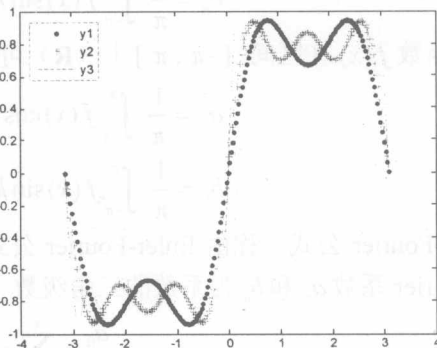


图1-2 多个奇次正弦函数的叠加

形如 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k)$ 的函数被称为三角级数。三角级数的理论在函数概念上产生过很大作用，数学上的许多基本概念也来自三角级数，这一理论是现代数学的一个重要分支。

1.1.1 三角级数

将 $A_n \sin(n\omega + \varphi_n)$ 展开，并取 $\omega = 1$ ，则三角级数可转化成如下形式

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1-1)$$

我们知道，三维空间向量可表示为

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk \quad (1-2)$$

x, y, z 分别为向量 $\mathbf{r}$ 在三个坐标轴上的（投影）分量。

若式 (1-1) 收敛，并记

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1-3)$$

比较式 (1-3) 与式 (1-2)，可以发现：三角级数其实就是 $f(x)$ 在无穷维（函数）空间的向量表示， a_n, b_n 分别是 $f(x)$ 在坐标轴 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 上的（投影）分量。

我们知道，在三维空间中 i, j, k 是相互正交的，即

$$(i, j) = (i, k) = (j, k) = 0, \quad (i, i) = (j, j) = (k, k) = 1$$

若把三角级数看做一种向量表示，自然也应该具有正交性。

1.1.2 以 2π 为周期的函数的 Fourier 级数

三角级数的系数与其函数具有如下关系。

若在整个数轴上

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

且等式右端的级数一致收敛，则有如下关系式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上 (R) 可积，称公式

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

为 Euler-Fourier 公式。称由 Euler-Fourier 公式得到的 a_n 和 b_n 为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数，并称以 Fourier 系数 a_n 和 b_n 为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

为函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 记为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

【例 1-1】 设 $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$ 。求函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

解 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数 $\Rightarrow a_k = 0$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx dx \right] = \frac{(-1)^{k-1} 2}{k} \end{aligned}$$

因此, $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$ 。

1.1.3 Fourier 变换

Fourier 级数主要表征的是周期信号的性质, 但在工程应用中大量的却是非周期性信号, 因此, 引入了 Fourier 变换对非周期信号进行分析。

经典的 Fourier 变换 (FT) 定义为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-4)$$

当然, 传统的 Fourier 定义中指出, 原信号 $f(t)$ 还必须满足狄里赫里条件。对于大多数工程信号来说, 这个条件是容易满足的。

在式 (1-4) 中, $F(\omega)$ 实际上是对原信号 $f(t)$ 做了频谱分析。对于某一个固定的频率 $\omega = \omega_1$, 变换结果为

$$F(\omega) \Big|_{\omega=\omega_1} = F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (1-5)$$

式 (1-5) 给出了变换 $F(\omega)$ 在 $\omega = \omega_1$ 处频率的大小, 可以理解为原信号中包含频率分量 $e^{j\omega_1}$ 的大小。因此, 对非周期信号 $f(t)$, 通过 Fourier 变换可以方便地分析各个频率分量。需要注意的, $F(\omega)$ 中关于频率 ω 的连续函数, 意味着它表示的频率成分是丰富的, 而不仅限于 k 次谐波, 这与 Fourier 级数是不同的。

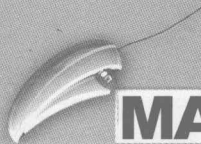
从另外的角度看, Fourier 变换也可以被认为是信号进行了相干累积。根据 Fourier 变换的性质有

$$F(\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (1-6)$$

它既是原信号的零频分量, 也是原信号在零频处的相干累积。

而在某一个固定的频率位置 $\omega = \omega_1$, 乘积 $f'(t) = f(t) e^{-j\omega_1 t}$ 实际上是将信号 $f(t)$ 的频谱左移 ω_1 位置。再通过 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot dt$ 进行相干累积, 结果得到了原信号 $f(t)$ 在频率位置 $\omega = \omega_1$ 处相干累积的大小, 即

$$\text{Coh} = F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_1 t} dt \quad (1-7)$$



因此，此相干累积结果就是 $f(t)$ 在频率 ω_1 处的分量大小。

1.1.4 傅里叶变换及 MATLAB 实现

信号 $f(t)$ 的傅里叶变换定义为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

值得注意的是， $f(t)$ 的傅里叶变换存在的充分条件是 $f(t)$ 在无限区间内绝对可积，即 $f(t)$ 满足下式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1-8)$$

但式 (1-9) 并非 $f(t)$ 存在的必要条件。当引入奇异函数概念后，使一些不满足绝对可积的 $f(t)$ 也能进行傅里叶变换。

傅里叶逆变换定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1-9)$$

MATLAB 的 Symbolic Math Toolbox 提供了能直接求解傅里叶变换及逆变换的函数 `fourier()` 和 `ifourier()`。两者调用格式如下。

(1) 傅里叶变换

`F=fourier(f)`

`F=fourier(f,v)`

`F=fourier(f,u,v)`

说明如下：

`F=fourier(f)` 是符号函数 f 的傅里叶变换，默认返回是关于 ω 的函数。如果 $f = f(\omega)$ ，则 `fourier` 函数返回关于 t 的函数；

`F=fourier(f,v)` 是返回函数 F 关于符号对象 v 的函数，而不是默认的 ω ，即

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jvt} dt$$

`F=fourier(f,u,v)` 是对关于 u 的函数 f 进行变换，返回函数 F 关于 v 的函数，即

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-jvt} dt$$

(2) 傅里叶逆变换

`f=ifourier(F)`

`f=ifourier(F,u)`

`f=ifourier(F,v,u)`

说明如下：

`f=ifourier(F)` 是函数 F 的傅里叶逆变换。默认的独立变量为 ω ，默认返回是关于 x 的函数。如果 $F = F(x)$ ，则 `ifourier` 函数返回关于 t 的函数；

`f=ifourier(F,u)` 返回函数 f 是 u 的函数，而不是默认的 x 的函数；

$f = \text{ifourier}(F, v, u)$ 是对关于 v 的函数 F 进行逆变换，返回关于 u 的函数。

注意：在调用 $\text{fourier}()$ 和 $\text{ifourier}()$ 之前，要用 syms 命令对所有用到的变量（如 t , u , v , ω 等）进行说明，即要将这些变量说明成符号变量。对 $\text{fourier}()$ 中的函数 f 及 $\text{ifourier}()$ 中的函数 F 也要用符号定义符 syms 将 f 和 F 说明为符号表达式；若 f 和 F 是 MATLAB 中的通用函数表达式，则不必用 syms 加以说明。

1.1.5 MATLAB 函数实现傅里叶变换

【例 1-2】 求 $f(t) = e^{-2|t|}$ 的傅里叶变换。

解 利用如下 MATLAB 命令实现：

```
syms t;
fourier(exp(-2*abs(t)))

ans =
4/(4+w^2)
```

若希望傅里叶变换的结果变量是 v ，则可执行如下命令：

```
syms t v;
fourier(exp(-2*abs(t)),t,v)

ans =
4/(4+v^2)
```

【例 1-3】 求 $F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$ 的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。

解 利用如下 MATLAB 命令实现：

```
syms t w;
ifourier(1/(1+w^2),t)

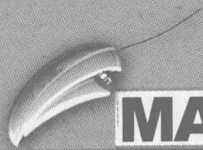
ans =
1/2*exp(-t)*Heaviside(t)+1/2*exp(t)*Heaviside(-t)
```

其中， $\text{Heaviside}(t)$ 即为单位阶跃函数 $u(t)$ 。

【例 1-4】 设 $f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$ ，试画出 $f(t)$ 及其幅频图。

解 MATLAB 命令如下：

```
syms t v w x;
x=1/2*exp(-2*t)*sym('Heaviside(t)');
F=fourier(x);
subplot(2,1,1);
```



```
ezplot(x);  
subplot(2,1,2);  
ezplot(abs(F));
```

程序运行结果如图 1-3 所示。

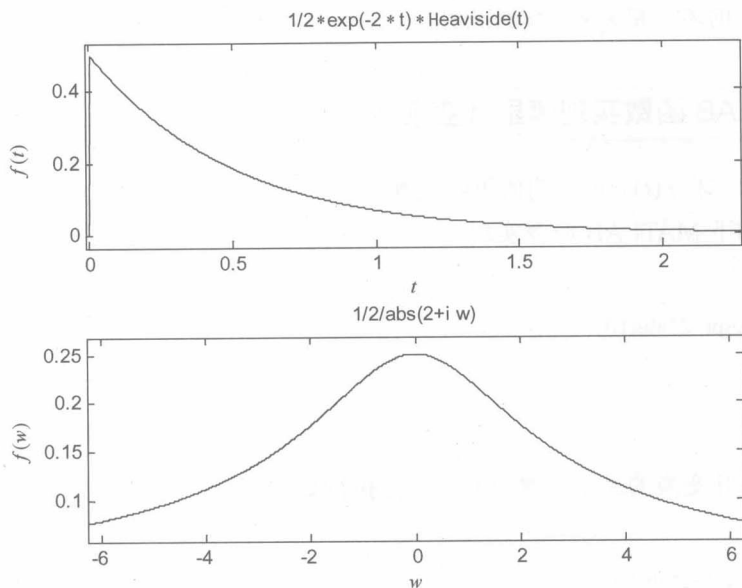


图 1-3 例 1-4 程序运行结果

程序中的 $\text{Heaviside}(t)$ 是调用了 Symbolic Math Toolbox 的 Heaviside.m 文件，内容为

```
function f = Heaviside(t);  
f = (t > 0);
```

注意：采用 $\text{fourier}()$ 和 $\text{ifourier}()$ 得到的返回函数，仍然是符号表达式。若需对返回函数作图，则应用 $\text{ezplot}()$ 绘图命令而不能用 $\text{plot}()$ 命令。如果返回函数中有诸如狄拉克函数 $\delta(\omega)$ 等项，则用 $\text{ezplot}()$ 也无法作图。用 $\text{fourier}()$ 对某些信号求变换时，其返回函数可能会包含一些不能直接表达的式子，甚至可能会出现一些屏幕提示“未被定义的函数或变量”的项，更不用说对此返回函数作图了。这是 $\text{fourier}()$ 的一个局限。另一个局限是，在很多场合，原信号 $f(t)$ 尽管是连续的，但却不可能表示成符号表达式，而更多的实际测量现场获得的信号是多组离散的数值量 $f(k)$ ，此时也不可能应用 $\text{fourier}()$ 对 $f(k)$ 进行处理，而只能用下面介绍的数值计算方法求解。

1.1.6 连续时间信号傅里叶变换的数值计算

为了更好地体会 MATLAB 的数值计算功能，特别是强大的矩阵运算能力，这里给出连续时间信号傅里叶变换的数值计算方法。方法的理论依据为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)e^{-j\omega n\tau} \quad (1-10)$$

对于一大类信号, 当取 τ 足够小时, 上式的近似情况可以满足实际需要。若信号 $f(t)$ 是时限的, 或当 $|t|$ 大于某个给定值时, $f(t)$ 的值已经衰减得很厉害, 可以近似地看成时限信号, 则式 (1-10) 中 n 的取值就是有限的, 设为 N , 故有

$$F(k) = \tau \sum_{n=-\infty}^{N-1} f(n\tau)e^{-j\omega_k n\tau}, 0 \leq k \leq N-1 \quad (1-11)$$

式 (1-11) 是对式 (1-10) 中的频率 ω 进行取样, 通常

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N\tau} k \quad (1-12)$$

采用 MATLAB 实现式 (1-11) 时, 其要点是要正确生成 $f(t)$ 的 N 个样本 $f(n\tau)$ 的向量 f 及向量 $e^{-j\omega_k n\tau}$, 两向量的内积 (即两矩阵相乘) 的结果即完成式 (1-12) 的计算。

此外, 还要注意取样间隔 τ 的确定。其依据是 τ 需小于奈奎斯特取样间隔。如果对于某个信号 $f(t)$, 它不是严格的带限信号, 则可根据实际计算的精度要求来确定一个适当的频率 ω_0 为信号的带宽。

【例 1-5】 已知门信号 $f(t) = G_2(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$, 求其傅里叶变换 $F(\omega)$ 。

解 由信号分析可知, 该信号的频谱为 $F(\omega) = 2Sa(\omega)$, 其第一个过零点频率为 π , 一般将此频率认为信号 $f(t)$ 的带宽。考虑到 $F(\omega)$ 的形状, 将精度提高到该值的 50 倍, 即 $\omega_0 = 50\pi$, 据此确定取样间隔:

$$\tau < \frac{1}{2f_0} = \frac{1}{2 \times \frac{\omega_0}{2\pi}} = 0.02$$

实现该过程的 MATLAB 程序如下:

```
R=0.02;t=-2:R:2;
f=Heaviside(t+1)-Heaviside(t-1);
W1=2*pi*5;
N=500;k=0:N;W=k*W1/N;
F=f*exp(-j*t'*W)*R;
F=real(F);
W=[fliplr(W),W(2:501)];
F=[fliplr(F),F(2:501)];
subplot(2,1,1);plot(t,f);
xlabel('t');ylabel('f(t)');
title('f(t)=u(t+1)-u(t-1)');
subplot(2,1,2);plot(W,F);
xlabel('w');ylabel('F(w)');
title('f(t)的傅里叶变换 F(w)');
```

程序运行结果如图 1-4 所示。