普通高等教育规划教材

给水排水计算机应用

王　彤　主　编
高俊发　王宗祥　杨利伟　副主编
高　湘　韩大鹏　主　审




人民交通出版社
China Communications Press

普通高等教育规划教材

Jishui Paishui Jisuanji Yingyong

给水排水计算机应用

王 彤 主 编
高俊发 王宗祥 杨利伟 副主编
高 湘 韩大鹏 主 审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是根据全国高等学校给水排水工程专业指导委员会制定的《城市水工程计算机应用》课程教学的基本要求和长安大学《水工艺计算机应用》课程教学大纲编写的给水排水工程专业本科教材，全书共分9章，主要内容为：给水排水常用计算方法举例、水力学计算程序举例、水泵与水泵站计算程序举例、水文学与水工程经济计算程序举例、给水排水管网系统计算程序举例、建筑给排水设计计算程序举例、水质工程学计算程序举例、停泵水锤算例程序设计、给水排水CAD绘图。

本书除作为给水排水工程和环境工程专业本科教材外，还可作为实用型人才培养的高职高专给排水工程技术专业教学用书，也可供给排水工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

给水排水计算机应用/王彤主编.—北京：人民交通出版社，2009.1

ISBN 978-7-114-07586-5

I.给… II.王… III.给排水系统-计算机辅助设计 IV.TU991.02-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第013244号

书　　名：给水排水计算机应用
著 作 者：王　彤
责任编辑：富砚博
出版发行：人民交通出版社
地　　址：(100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010) 59757969，59757973
总 经 销：北京中交盛世书刊有限公司
经　　销：各地新华书店
印　　刷：廊坊市长虹印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：13
字　　数：322千
版　　次：2009年1月第1版
印　　次：2009年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-07586-5
印　　数：0001~1000册
定　　价：26.00元

前　言

水是人类生存的物质基础。在水的开采、加工、输送、回收与再生回用这一社会循环中，给水排水技术为保证水的良性循环和可持续发展发挥着重要的作用。计算机在给水排水领域的应用极其广泛与深入。

为满足目前给排水专业教学的需要，使学生初步掌握给水排水工程专业应用程序设计的基本理论、基本方法及上机操作的基本技能，具备本专业计算机应用的能力，我们编写了这本宽口径的交叉课程《给水排水计算机应用》教材。本书在内容编排上注意从实际出发，针对教学需要和特点来编写，绝大部分素材直接取之于现行统编教材，与现行给排水专业各门课程中涉及程序设计（电算）的章节相吻合，以提高学生的学习兴趣，与相关专业基础课、专业课教学相辅相成。所有程序全部采用 C 语言编写，难易适中，与学生所学的计算机高级语言一致，并且与计算机等级考试相衔接，突出实用性，培养学生实际编程能力，提高学生在课程学习、课程设计、毕业设计（论文）等教学环节中的计算机应用水平。由于目前各门课程所使用的推荐教材中均有涉及程序设计（电算）的章节，都采用 Fortran、Basic 语言编程，有的只列框图未给出源程序，而学生所学的高级语言是 C，因此看 Fortran、Basic 程序比较费力，对这部分内容的学习会有困难，本教材正好弥补这一不足。

西安建筑科技大学高湘副教授和长安大学韩大鹏副教授分别审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，在此深表谢意。

本教材是编者在多年课程教学积累的基础上编写，并通过校内试用，不断改进最终成书的。编写时尽量采用读者容易理解的体系和叙述方法，比较切合学生实际，易教易学。本书由长安大学资助出版。

本教材编写过程中，得到长安大学环境科学与工程学院、教务处、基建处、培养科及给水排水工程系的领导和老师的支持与帮助，还得到刘海星、胡博、王纲柱、陈秋容、罗洁森等同学的各种帮助。人民交通出版社为本教材的出版付出了辛勤的劳动，在此一并致谢。

计算机在给水排水专业领域中的应用是极其广泛的，作为一门 32 学时课程教材，只能是一本为教学服务的入门书，不能包揽计算机在本专业中所有的具体应用。由于作者水平有限，教材中不当之处，敬请批评指正。

编　者

2008 年 10 月于长安大学

目　录

绪论 …… 1
§0.1　计算机在给排水中的应用概述 …… 1
§0.2　算法与误差 …… 2
思考题 …… 8
第1章　给水排水常用计算方法 …… 9
§1.1　解一元方程 …… 9
§1.2　矩阵运算和线性代数方程组求解 …… 14
§1.3　函数插值与曲线拟合 …… 27
§1.4　数值积分 …… 41
§1.5　常微分方程初值问题的数值解 …… 44
§1.6　水锤偏微分方程的数值解 …… 48
思考题 …… 52
第2章　水力学计算程序举例 …… 54
§2.1　无压圆管均匀流水力特性计算 …… 54
§2.2　明渠均匀流水力计算 …… 57
§2.3　明渠非均匀流渐变流水面曲线计算 …… 58
思考题 …… 62
第3章　水泵与水泵站计算程序举例 …… 63
§3.1　离心泵特性曲线拟合 …… 63
§3.2　单泵多塔供水系统工况数解算例 …… 65
§3.3　多泵多塔单节点供水系统工况分析 …… 71
§3.4　多泵多塔多节点供水系统工况分析 …… 73
§3.5　取水泵站调速运行下并联工作的计算 …… 76
思考题 …… 81
第4章　水文学与水工程经济计算程序举例 …… 82
§4.1　频率分析综合程序 …… 82
§4.2　城市暴雨强度公式推求 …… 92
§4.3　投资决策指标的计算 …… 97
思考题 …… 103
第5章　给水排水管网系统计算程序举例 …… 104
§5.1　设计用水量、水塔和清水池调节容积计算电子表格 …… 104
§5.2　单水源给水管网水力计算 …… 107
§5.3　多水源给水管网水力计算 …… 115
§5.4　给水管道造价公式参数估计 …… 121
§5.5　给水管网技术经济计算 …… 126
§5.6　污水主干管水力计算电子表格设计 …… 136

§5.7　雨水干管水力计算程序设计 …………………………………………………… 140
思考题…………………………………………………………………………………… 147
第6章　建筑给排水设计计算程序举例…………………………………………………… 148
§6.1　建筑室内给水管网水力计算表 ………………………………………………… 148
§6.2　自动喷水灭火系统水力计算表 ………………………………………………… 152
§6.3　建筑热水循环管网计算模型 …………………………………………………… 153
§6.4　压力流屋面雨水排水管系水力模型 …………………………………………… 157
思考题…………………………………………………………………………………… 161
第7章　水质工程计算程序设计举例……………………………………………………… 162
§7.1　滤料粒径级配计算 ……………………………………………………………… 162
§7.2　污水处理厂固体物及水量平衡算例 …………………………………………… 164
思考题…………………………………………………………………………………… 170
第8章　停泵水锤算例程序设计…………………………………………………………… 171
§8.1　简单管路暂态流动算例 ………………………………………………………… 171
§8.2　无阀管路停泵水锤算例 ………………………………………………………… 175
§8.3　有防止负压自动进气装置的管路停泵水锤算例 ……………………………… 181
思考题…………………………………………………………………………………… 187
第9章　给水排水 CAD 绘图 ……………………………………………………………… 189
§9.1　二维图形设计基础 ……………………………………………………………… 189
§9.2　给水排水工程图的绘制方法 …………………………………………………… 193
附录……………………………………………………………………………………… 196
附录1　给水排水网上资源 …………………………………………………………… 196
附录2　给排水 CAD 常用图例 ………………………………………………………… 198
参考文献………………………………………………………………………………… 201

绪 论

§0.1 计算机在给排水中的应用概述

计算机在给排水行业中的应用从无到有经历了一个很长的发展过程,近年来有了跨越式的发展,在给排水的科研、教学、设计、工程建设、运营管理中的应用越来越广。

0.1.1 计算机辅助设计(CAD)与计算

计算机辅助设计从20世纪70年代开始发展,经历了30多年的不断进步,已经取得了显著的成绩,无论是在自然科学,还是在工程实际中计算机都以高精度、快速度和高准确度确定了在众多领域里的关键地位。CAD使人们摆脱了对图板和笔的依赖,它可以对二维图形直接进行描述表达,具有图形修改方便、出图灵活、图面质量好的优点。CAD(Computer Aided Design)已经是给排水专业中不可缺少的重要部分,并正在朝着标准化、集成化、网络化和智能化的方向发展。许多CAD二次开发软件如天正、鸿业、理正等给排水软件应运而生。通过Auto Lisp语言编写一些CAD的程序可以大大减少绘图人员的重复工作。运用C、C++、VB、VC等高级语言可以处理许多管网水力计算与工况分析、管道技术经济计算、水锤防护分析等给排水专业上的计算问题。

0.1.2 计算机控制与模拟

计算机自动化在给排水行业已经得到广泛的应用,特别是一些大型设备与自控装置已经密不可分,包括净水厂与污水处理厂在内的生产过程自动化、智能化。如自动投药系统,可以实现最佳投药量,达到以最少的药剂消耗获得最理想的出厂水水质效果,取得良好的经济效益与社会效益。计算机在给排水管网系统建模、优化监测调度、优化扩建改造、供水资料图文信息库、遥测遥信监测系统、数字化管理系统等方面具有不可替代的重要作用。给排水监控系统是智能楼宇建筑的一个重要系统,通过及时地调整系统中水泵的运行台数,可达到供水量和需水量(或来水量和排水量)之间的平衡,高效率、低能耗的优化控制,实现泵房的最佳运行。它在建筑设备监控系统中,水池、水箱的水位监控,水泵的启停,水泵的故障报警、水箱高低水位的报警、消防安全保障、供水、热水系统无人值守自动运行等方面也都被广泛应用。

计算机自动控制还可以完成给排水优化调度所需的数据采集、数据处理、数据显示和数据记录等工作,具有趋势分析和控制功能,为城市给排水优化调度、节能降耗提供有力的支持。

0.1.3 计算机网络

因特网是一个覆盖全球范围的计算机互联网络,是当今信息高速公路的主体,给人们的工作、学习和生活带来很大的便利。给排水专业应用的网络服务功能主要有:

(1)电子邮件。

(2)电子商务。最新型的商务模式，不管是设备产品需求，还是技术支持，都可以在网络上实现。

(3)网上图书馆。越来越多的电子图书出现在网络资源当中，期刊、杂志、硕博论文都可以从数字图书馆中下载到。

(4)网上检索。如可利用高校精品课程网、“给排水在线”、“筑龙网”、“网易给排水”等网站，搜集相关专业计算程序、设计实例用于设计计算，掌握获取共享资源的手段。

(5)设备运行状态管理。水处理厂设备及建筑给排水设备运行状态均可利用因特网远程在线监控，设备故障自动检测报警并通过网络把信息传送到设备生产企业(或产品区域售后服务中心)，第一时间作出排除故障的应对措施。

§0.2 算法与误差

在实际计算中，特别是在应用计算机解决工程技术问题时，总是用有限位数的数值来进行计算的。如果参与运算的数的位数是无限的，就必须用它的近似值代替真实值来进行计算，从而必须对可能产生的结果的精度进行分析和评估，而任何一个环节的微小误差都可能对结果产生或大或小的影响，因此要正确估计计算结果，必须对误差进行具体的分析。

0.2.1 误差的来源

在科学计算中影响计算机解题结果的误差，按其来源可分为五类：模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差和初值误差。了解误差的来源和产生误差的原因，能有效地消除或减少误差对计算结果的影响，提高计算精度。

1)模型误差

随着计算机技术的发展，在解决工程技术问题时，经过理论分析和试验研究后，都要用数学语言进行描述，构造一个能与实际问题相适应并反应客观规律的数学模型。为了简化计算，常常还要忽略客观条件中一些次要或偶然的因素，并加以理想化，使建立的数学模型尽量简化。例如：在污水生物处理中，经常用莫诺特(Monod)公式描述混合培养反应器中的有机物降解规律，而莫诺特公式是在纯菌种以及单一基质的培养条件下推导出来的，显然，这个数学模型本身会产生一定的误差。这种数学模型与实际问题之间的误差称为模型误差，亦称描述误差。而某个因素是否可以被认为是次要或偶然因素加以忽略，须根据它被忽略所造成的模型误差对计算结果的影响是否在容许范围之内来定。

大多数的科学计算问题都是数学模型求解或根据数学模型的进一步计算，数学模型是计算机进行数值计算的前提和依据。由模型误差定义可知，误差在上机计算之前已经客观存在，同时这种误差只能在实际的物理模型过程中才能加以检验。因此，应当尽量选择比较符合实际而又精确的数学模型，在建立模型时所做的每一个假设与简化都应当考虑由此带来的误差所造成的影响。

2)观测误差

在所建立的数学模型中，通常有一些参数或变量的值，是通过试验或实验得到的。由于各种原因，观测数据和客观实际数据之间会有一定的差异，这种差异称为观测误差，或数据误差。观测误差根据其来源和特点的不同，又可以分为：

(1)过失误差

它是指由于观测者在观测中的错误所造成的误差。例如:观测错误、记录错误等。实际应用中应当尽量避免这种误差。

(2)系统误差

它是由于系统本身的缺陷(仪器内因、理论错误、个人误差等)所造成的误差,其影响贯穿整个观测过程,所以又称为常差。它又可分为:

①仪器误差:例如仪器的零点未较准或本身具有常差。

②理论误差:例如由于温度、湿度、风速、磁场、压力、浓度等外部确定性条件下的影响所造成的观测值的误差。

③个人误差:例如由于观测者本人的不良习惯或者生理缺陷所造成的观测值的误差。

研究系统误差对实验结果的影响已形成专门的学科及实验科学。

(3)偶然误差

偶然误差是指由于一些暂时无法预测(不可预见)的随机因素所造成的观测值的误差,这种误差通常服从于某些统计规律。

研究偶然误差对实验结果的影响,是误差理论的主要任务之一。

观测误差来源广泛,在给水排水专业的试验研究中也是经常出现的,并且是很难避免的。在实际工程技术中应当从引起误差的多个方面进行严格的控制,尽可能地减少这种误差对实际计算结果的影响。

3)截断误差与方法误差

对数学模型利用计算机解析法求解无法得到精确解时,通常利用近似处理求得近似解。数学模型的精确解与数值方法得到的近似解之间的误差称为方法误差或截断误差。在数值运算中产生的截断误差很多,例如:由 Taylor 公式得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

用 $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 近似代替 e^x,这时的截断误差为

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

式中:ξ 介于 0 与 x 之间。

4)舍入误差

应用计算机计算时,由于计算机的字长有限,而存放在存储器中的每个数只能存储在有限的字节内,如单精度实数占 2 个字节,双精度实数占 4 个字节,对于无理数或很多位的数,在存储时,往往一些尾数会丢失,对这些尾数尽管采取了四舍五入的方法,但还是避免不了误差。这种对数据进行四舍五入后产生的误差称为舍入误差。舍入误差尽管很小,但有时经过数次运算之后,会使计算的结果与真值之间出现难以接受的差距。

舍入误差与截断误差的差别在于:截断误差主要取决于计算方法的选择;舍入误差主要取决于计算机的存储性能,前者与计算机无必然联系,后者则与计算机的存储性能相关。

5)初值误差

在科学计算中,由于所采用的初始数据不当对计算结果所造成的误差称为初值误差。在数值计算时,考虑初值误差对计算结果精度的影响,称为误差估计问题。

0.2.2 误差值及其计算

误差值的表示方法主要有两大类:绝对误差和相对误差。

1)绝对误差和绝对误差限

绝对误差:一个数的准确值或真值 x 与其近似值或观测值 x^* 的差值,即

$$e^* = x^* - x$$

称为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差。

由上式可知,绝对误差可以是正也可以负的。在一般情况下,由于无法算出准确值 x,因此也就无法算出准确的绝对误差,然而,通常可根据相关领域的知识、经验及测量工具的精度,事先估计出误差绝对值不超过某个正数 ε^*,即 e^* 的上界 $|e^*| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$,$\varepsilon^*$ 这一正数被称为近似值 x^* 的绝对误差限,简称误差限或精度。

由上式有 $x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*$

这表示准确值 x 在区间 $[x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$ 内,有时将准确值 x 写成

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

例如:用卡尺测量一个圆管的外径为 $De = 400$ mm,它是圆管外径的近似值,由卡尺的精度知道这个近似值的误差不会超过半个毫米,则有

$$|De^* - De| = |400 \quad De| \leqslant 0.5\ (\mathrm{mm})$$

于是该圆管的外径为

$$De = 400 \pm 0.5\ (\mathrm{mm})$$

2)相对误差与相对误差限

用 $x = x^* \pm \varepsilon^*$ 表示准确值可以反映它的准确程度,但不能说明近似值的优劣。例如,测量一根 10cm 长的圆钢时发生了 0.5cm 的误差,和测量一根 10m 长的圆钢时发生了 0.5cm 的误差,其绝对误差都是 0.5cm,但是,后者的测量结果显然比前者要准确得多。这说明决定一个量的近似值的优劣,除了要考虑绝对误差的大小,还要考虑准确值本身的大小,这就需要引入相对误差的概念。

定义:近似值的绝对误差 e^* 与准确值 x 之比

$$e_r^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

来衡量误差,才能更加反应实际,称之为近似值 x^* 的相对误差。

由于在一般情况下,无法得到准确值 x,则相对误差可近似地写成

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

来表示相对误差。

由上式可知,相对误差也是可正可负的,根据绝对误差的原理,我们也可以估算出相对误差的一个上限 $|e_r^*| \leqslant \varepsilon_r^*$,称 ε_r^* 为 x^* 的相对误差限 δ。

绝对误差和绝对误差限有量纲,而相对误差和相对误差限没有量纲,通常用百分数来表示。

例如:两个物理量 x, y 的准确值和近似值分别如下,试比较它们的准确程度。

$$x = 0.256 \times 10^{-20}, y = 0.357 \times 10^{20}$$

$$x^* = 0.257 \times 10^{-20}, y^* = 0.358 \times 10^{20}$$

则绝对误差为: $e_x^* = 0.257 \times 10^{-20} - 0.256 \times 10^{-20} = 0.001 \times 10^{-20}$

$$e_y^* = 0.358 \times 10^{20} - 0.357 \times 10^{20} = 0.001 \times 10^{20}$$

相对误差为: $e_{rx}^* = \dfrac{0.001 \times 10^{-20}}{0.256 \times 10^{-20}} = 0.00390625$

$$e_{ry}^{*}=\frac{0.001\times10^{20}}{0.357\times10^{20}}=0.00280111$$

由 $e_{ry}^{*}<e_{rx}^{*}$ 可知，y 的精度比 x 高。

3）有效数字

设 x^{*} 是 x 的近似值，如果 x 的绝对误差限是它的某一位的半个单位，那么称 x^{*} 准确到这一位，并且从这一位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字称为 x^{*} 的有效数字。具体来说，就是先将 x^{*} 写成规范化形式：$x^{*}=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^{m}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是0到9之间的自然数，$a_1\neq0$，m 为整数。如果 x^{*} 的绝对误差限

$$|x^{*}-x|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-l}(1\leqslant l\leqslant n)$$

则称近似值 x^{*} 具有 l 位有效数字。

例题 0-1 设 $x=4.200169$，试确定它的近似值 $x_1^{*}=4.2001$，$x_2^{*}=4.2002$，分别具有几位有效数字？

解：因为 $x_1^{*}=0.42001\times10^{1}$，$m=1$，

$$|x-x_1^{*}|=0.069\times10^{-3}<0.5\times10^{-3}$$

（即 x_1 的误差限 0.000069 不超过 $x_1^{*}=4.2001$ 的小数点后第3位的半个单位，即0.0005），所以 $m-l=-3$，得 $l=4$，故 $x_1^{*}=4.2001$ 具有4位有效数字（即从 $x_1^{*}=4.2001$ 的小数点后第3位数0起直到左边第一个非零数字4为止的4个数字都是有效数字），而最后一位数字1不是有效数字。

因为 $x_2^{*}=0.42002\times10^{1}$，$m=1$

$$|x-x_2^{*}|=0.31\times10^{-4}<0.5\times10^{-4}$$

（即 x_2 的误差限 0.000031 不超过 $x_2^{*}=4.2002$ 的小数点后第4位的半个单位，即0.00005），所以 $m-l=-4$，得 $l=5$，故 $x_2^{*}=4.2002$ 具有5位有效数字（即从 $x_2^{*}=4.2002$ 的小数点后第4位数2起直到左边第一个非零数字4为止的5个数字都是有效数字）。

在例中，$x_1^{*}=4.2001$ 有4位有效数字，而 $x_2^{*}=4.2002$ 则有5位有效数字。

从上面的讨论可以看出，有效数字位数越多，绝对误差限就越小。同样的，有效数字位数越多，相对误差限也就越小。

4）数值计算时的误差估计

各种复杂的函数计算，总是由一系列两数的和、差、积、商等运算构成的。一般情况下，在对数值计算进行误差估计时，可采用 Taylor 级数展开的方法估计误差。

例如：要计算函数值 $y=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$，假设 $x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},\cdots,x_n^{*}$ 分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的近似值，则函数的近似值相应的为：$y=f(x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},\cdots,x_n^{*})$。函数值的绝对误差为：

$$\begin{aligned}e^{*}(y)&=y^{*}-y=f(x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},\cdots,x_n^{*})-f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*},\cdots,x_n^{*})}{\partial x_k}\right)(x_k^{*}-x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{*}\cdot e^{*}(x_k)\end{aligned}$$

函数值 y^{*} 的相对误差为：

$$e_r^*(y)=\frac{e^*(y)}{y^*}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\cdot\frac{x_k^* e_r^*(x_k)}{y^*}$$

0.2.3 和、差、积、商的误差估计

1)和、差的误差估计

设 x、y 的近似值分别为 x^*、y^*,则有:

$$(x\pm y)-(x^*\pm y^*)=(x-x^*)\pm(y-y^*)$$

$$|(x\pm y)-(x^*\pm y^*)|\leqslant|x-x^*|+|y-y^*|$$

即和或差的误差限不超过各项绝对误差之和。这个结论还适用于任意多个数求和的运算。

至于相对误差,和与差有不同的方法需分别讨论。假设 $x^*>0$、$y^*>0$,则和的相对误差估计为:

$$\frac{(x+y)-(x^*+y^*)}{x^*+y^*}=\frac{x-x^*}{x^*}\times\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y-y^*}{y^*}\times\frac{y^*}{x^*+y^*}$$

再假设 x^* 为相加两项中具有较大相对误差的一项,则有:

$$\left|\frac{(x+y)-(x^*+y^*)}{x^*+y^*}\right|\leqslant\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\times\left(\frac{x^*}{x^*+y^*}+\frac{y^*}{x^*+y^*}\right)=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|$$

即和的相对误差不超过相加各项中最不准确一项的相对误差限。这个结论仍旧适用于多个数的求和运算。

差的相对误差估计为:

$$\frac{(x-y)-(x^*-y^*)}{x^*-y^*}=\frac{x-x^*}{x^*}\times\frac{x^*}{x^*-y^*}+\frac{y-y^*}{y^*}\times\frac{y^*}{x^*-y^*}$$

由此可见,当 $x^*\gg y^*$ 时,$\frac{y^*}{x^*-y^*}$ 值很小,上式中右边第二项可以忽略不计,此时有:

$$\left|\frac{(x-y)-(x^*-y^*)}{x^*-y^*}\right|\approx\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|$$

即当被减数和减数相差很大时,其中大数的相对误差对于整个差的相对误差起决定性的作用;当两者相差不大时,(x^*-y^*) 的相对误差可能很大,有效数字的位数就可能大大减少。例如:$15.8746-15.8759=0.0007$,由于减数和被减数的相对误差 $e^r<0.5\times10^{-5}$,但它们之差的相对误差也可能不小于 0.5×10^{-5}。因此在这个小的差数中,有可能没有一位有效数字。应当在建立模型或计算中设法避免两个差数很小的数相减。

2)积、商的误差估计

假设 x、y 的近似值 x^*、y^* 均是正数,则任意一个数的绝对误差可记为:$dx^*=x-x^*$,$dy^*=y-y^*$;相对误差可记为 $\frac{x-x^*}{x^*}=\frac{dx^*}{x}=d(\ln x^*)$,$\frac{y-y^*}{y^*}=\frac{dy*}{y}=d(\ln y^*)$,则有积与商的绝对误差为:

$$d(x^*y^*)=x^*dy^*+y^*dx^*$$

$$d\left(\frac{x^*}{y^*}\right)=\frac{y^*dx^*-x^*dy^*}{y^{*2}}$$

积与商的相对误差分别为:

$$d(\ln(x^* y^*)) = d(\ln x^* + \ln y^*) = \frac{dx^*}{x^*} + \frac{dy^*}{y^*}$$

$$d(\ln(\frac{x^*}{y^*})) = d(\ln x^* - \ln y^*) = \frac{dx^*}{x^*} - \frac{dy^*}{y^*}$$

由此可得出结论:积与商的相对误差限不超过参与运算的两数的相对误差之和。

注意当 y^* 很小时,商的相对误差就会很大,在计算中应当尽量避免这种情况出现。以上所述的和、差、积、商的误差估计计算是从最坏的情况推出的因而比较麻烦,因此在实际计算中,为了保证结果的精确度,避免这种情况的出现,须采用多取几位有效数字的方法进行运算。然而,这种方法并不能代替对误差进行必要的估计。

0.2.4 数值计算中减少误差的若干原则

在进行数值计算的程中,虽然各种误差难以完全避免,但是我们可以采用各种方法尽可能减少误差的影响,把误差限制在可以容许的精度范围之内,使计算结果的准确度提高。实际上,数值计算中的误差分析是一项非常重要且十分复杂的问题。在应用中除了进行一些必要的误差分析之外,为了尽可能减少误差,改善算法的稳定性,应当首先注意到易产生误差的一些共性的原因。因此,我们着重讨论减少误差的若干原则。

1)使用数值稳定的计算方法或数学模型,设法控制误差的传播

由于数值稳定的算法受初始数据误差的影响和计算中产生的舍入误差的影响较小,但是这些误差在计算过程中会累积和传播。为了避免误差在运算过程中的累积增大,在构造算法和建立数学模型时,就要考虑算法和数学模型的稳定性。尽量选择稳定的算法或数学模型进行计算,尽量避免使用不稳定的算法和数学模型。

2)要防止大数吃掉小数

在数值计算中,参加运算的数的数量级有时相差很大,而计算机的字长又是有限的,因此,如果不注意运算次序,那么就可能出现小数被大数“吃掉”的现象。这种现象在有些情况下是允许的,但在有些情况下,这些小数很重要,若它们被“吃掉”,就会造成计算结果的失真,影响计算结果的可靠性。

例如:在4位浮点数字计算上作下列运算:

$$\begin{aligned} & 0.2578 \times 10^3 + 0.4125 \times 10^{-3} \\ = & 0.2578 \times 10^3 + 0.000 \times 10^3 \quad \text{(对阶)} \\ = & 0.2578 \times 10^3 \quad \text{(规格化)} \end{aligned}$$

其结果是大数“吃掉”了小数。当遇到这种情况时,应适当的改变运算秩序。

[注] 需要说明的是:大数吃小数在有些情况下是允许的,但在有些情况下却会造成失真。再如,已知 $x = 4 \times 10^{12}$, $y = 8$, $z = -4 \times 10^{12}$,求 $x + y + z$ 时如果按 $x + y + z$ 的次序来编程序,x 会“吃掉”y,而 x 与 z 互相抵消,其结果为零。若按 $(x+z)+y$ 的次序来编程序,其结果为8。由此可见,如果事先大致估计一下计算方案中各数的数量级,编制程序时加以合理的安排,则重要的小数就可以避免被“吃掉”。

3)避免两个相近的数相减

在数值计算中两个相近的数相减会造成有效数字的严重损失,从而导致误差增大,影响计算结果的精度。

例题 0-2 当 $x = 10004$ 时,试计算 $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ 的近似值。

解:若使用6位十进制浮点运算,运算时取6位有效数字,结果:

$$\sqrt{10004}-\sqrt{10003}=100.020-100.015=0.005$$

由6位有效数字降为1位有效数字,损失了5位有效数字,使得绝对误差和相对误差都变得很大,影响计算结果的精度。遇到这种情况,若变换一下公式可得:

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{10004}+\sqrt{10003}}=0.00499913$$

其结果就有6位有效数字,与精确值0.0049991252311 7984…非常接近。

4)简化算法步骤,减少运算次数

简化算法步骤十分重要,对于同一个问题,如果能尽可能减少运算次数,不仅可以节约计算机运行时间,还能减少舍入误差的累积,得到较为准确的计算结果。例如:要计算 $y=x^{63}$ 的值,最简单的方法是把 x 连乘63次。但是这样会增加运算时间,可以将计算式改为下式:

$$y=x\times(x^2)\times(x^2)^2\times(x^4)^2\times(x^8)^2\times(x^{16})^2$$

又如:$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 共有 $n+1$ 项,按常理需作 n 次加法运算和 $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+1=n(n+1)/2$ 次乘法运算。但若把公式改为下式:

$p_n(x)=x(x\cdots(x(a_nx+a_{x-1})+a_{n-2})+\cdots+a_1)+a_0$ 则只要 n 次乘法和 n 次加法。不仅加快了运算速度,而且避免了不必要的舍入误差。

误差分析与估计,是一个非常重要而又十分困难的课题。本节只作一些简单的介绍,有兴趣的读者可参阅相关专业书籍,作进一步的了解。

思考题

1. 什么是误差?数值计算中误差的来源及计算中减少误差的若干原则有哪些?
2. 在水力计算中有公式 $H=\dfrac{v^2}{2g}$,其中 H 为动扬程(m)、v 为流速(m/s),要使 H 的相对误差为1%,问检测水的流速 v 时允许的相对误差限是多少?
3. 计算 $t=\sqrt{10}-\pi$ 的值精确到6位有效数字。
4. 学习生活中遇到的常差有哪些?试简要说明。
5. 用计算机解决工程技术问题的一般方法和模式是什么?
6. 举例说明计算机在水工业技术进步中所发挥的作用。

第 1 章　给水排水常用计算方法

所谓算法，是指为解决一个数学问题而采用的方法和步骤。由于对同一个问题，可以有不同的解题方法和步骤。因此通常会希望采用方法简单、运算步骤少，既要确保算法正确，还要考虑算法的质量完成。

一个给排水计算问题包括设计算法和实现算法两个部分。计算方法是数学模型与计算机程序之间的纽带，是一种把数学模型的求解运算，变换成为数字计算可以接受的、有限位数的算术运算或逻辑运算的方法。许多难以用解析方法求解的数学问题，常常可以采用数值方法求解。

一个算法应具有的特性是：有穷性（操作步骤不超过合理的限度）、确定性（算法的含义是唯一的，不会产生“歧异性”）、有零个或多个输入、有一个或多个输出、有效性（算法中的每一个步骤都能有效地执行并取得确定的结果）。评价一个算法的优劣可以从算法的收敛性、稳定性、误差估计等方面考虑。用高级语言解题一般可分为以下 4 个步骤：

（1）构造模型：从具体问题抽象出物理模型，再归纳出数学模型，即数学方程，确认方程有无解和解的唯一性。

（2）选择计算方法：用适当的公式或近似公式求解数学模型，选择计算量小、精度高的算法。

（3）框图（计算流程图）设计：由若干个框和箭头组成，能直观反映计算步骤的执行过程，思路清楚，层次分明，便于识读，减少编程中的失误。

（4）编写源程序：依据计算框图采用计算机高级语言编写出源程序。编程的基本原则是先易后难、先简后繁，先通过语法检查，调通程序后逐步改进和提高程序质量，由简单到复杂。

目前，各种数值运算都有比较成熟的算法和程序可供用户选用和调用，使用起来非常方便，选择适当的计算方法是利用计算机解决给排水工程技术问题的重要步骤。本章主要介绍给排水工程常用计算机数值运算算法。

§1.1　解一元方程

求一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ 的两个实根。当 $b^2 - 4ac \geqslant 0$ 时，存在两个实根，计算公式为：

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

根据这个公式可以设计计算机算法如下：

S1：输入 a，b，c；

S2：判断：如果 $b^2 - 4ac \geqslant 0$，则转 S4，否则执行 S3；

S3：输出无实根标志，转 S6；

S4：按公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 计算 x_1 与 x_2；

S5：输出 x_1 与 x_2；

S6：结束。

算法也可用程序框图（或称程序流程图）来表示。框图是一种图形化了的算法，用框图表示的算法更直观、清晰。上述算法的框图如图 1-1 所示。

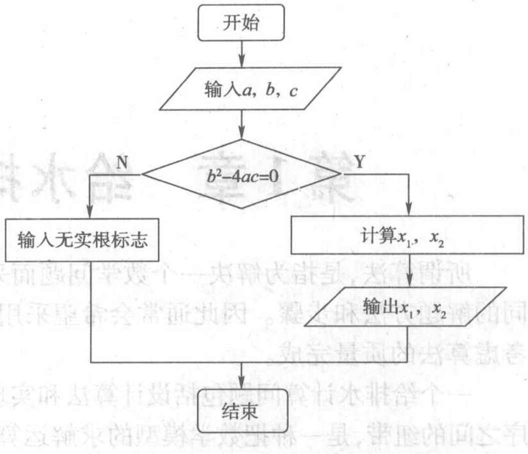

图 1-1　解一元二次方程的算法框图

低于 3 次的非线性代数方程，有通用的求解公式，而求解 4 次或 4 次以上的非线性代数方程则困难得多，而用数值方法比较容易求解。常用的数值方法有迭代法、二分法、牛顿迭代法等。

1.1.1　迭代法

迭代法是一种逐次近似的试算法。用迭代法求一元方程 $f(x)=0$ 的根方法如下：

（1）将 $f(x)=0$ 改写成求 x 的式子：$x=\varphi(x)$；后者称为前者的迭代公式。

（2）对迭代公式右边的 x 给一个初值 x_0，将其带入上式等号的右边，求出 x 的第一个近似值 x_1。

（3）再把 x_1 赋值给 $\varphi(x)$ 得 x_2，这样一次一次地将求出的新值又作为下一次的初值带入 $\varphi(x)$。即：

$$x_0 \to \varphi(x_0) \to x_1 \to \varphi(x_1) \to x_2 \to \varphi(x_2) \to x_3 \to \varphi(x_3) \to x_4 \to \varphi(x_4) \to x_5 \to \cdots$$

直到前后两次求出的 x 值很接近，符合给定的计算精度的要求为止，即 $|x_{n+1}-x_n| \leqslant \varepsilon$。$\varepsilon$ 是一个给定的很小的正数。这时 x_{n+1} 就是所求的近似值。

例题 1-1　用迭代法求解 $f(x)=x^3+x-1=0$ 的根。

解：将求解方程写成等价的迭代公式 $x=\varphi(x)$，可得到：$x=\dfrac{1}{x^2+1}$，计算步骤见图 1-2。

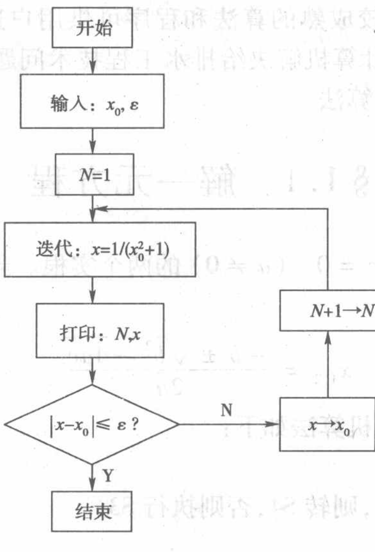

图 1-2　计算步骤图

其 C 语言计算程序如下：

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
main()
{ double x,x0=0.5,ep=1e-6;
  int n=1;
a: x=1.0/(x0* x0+1.0); printf("n=% d, x=% f\n",n,x);
   if(fabs(x-x0)>=ep) { x0=x; n=n+1; goto a;} }
```

取初值 $x_0 = 0.5$ 及计算精度 $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$，运行上述程序，则运算结果如下：

```
n=1,x=0.800000
n=2,x=0.609756
n=3,x=0.728968
n=4,x=0.653000
n=5,x=0.701061
n=6,x=0.670472
n=7,x=0.689878
n=8,x=0.677538
n=9,x=0.685374
……
```

即通过 29 次迭代得到满足精度要求的解 $x = 0.682328$ 。

下面讨论迭代过程的收敛性问题：

对于方程 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$，如果要求达到计算精度 $\varepsilon \leqslant 10^{-7}$，仍取 x 的初值为 $x_0 = 0.5$ 时，则要迭代 38 次才能得到满足精度要求的解 $x = 0.6823278$；如果采用迭代公式 $x = \sqrt[3]{1-x}$，则要经过 52 次迭代才能得到满足精度要求的解；但采用迭代公式 $x = 1 - x^3$，则无法获得方程的解。在迭代过程中，迭代值能逐次接近于方程的解时，称迭代过程收敛；否则，称迭代过程发散。迭代过程收敛越快，其收敛性越好。

一个迭代过程是否收敛，和迭代公式中迭代函数 $\varphi(x)$ 的特性有关。如果 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内可导，且存在正数 $L<1$，使对任意 $x \in [a,b]$ 有 $|\varphi'(x) \leqslant L|$，则迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0 \in [a,b]$ 均收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 x^*，并有误差估计式：

$$\left| x_k - x^* \right| \leqslant \frac{L^k}{1-L} \left| x_1 - x_0 \right| \tag{1-1}$$

实际工程中需要求解的方程往往比较复杂，判断迭代过程是否收敛，需要对迭代函数求导，有时甚至难以找到一个合适的迭代公式，此时可以采用二分法进行求解。

1.1.2 二分法

二分法又称对分法，它克服了迭代法有可能不收敛的缺陷，当已判明在区间 $[x_1,x_2]$ 内有实根时，迭代过程一定收敛，而且其收敛速度也很快。

如图 1-3 所示，有一非线性方程

$$f(x) = 0, x \in [x_1,x_2]$$

当 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上单调连续，且 $f(x)$ 在其区间 $[x_1,x_2]$ 的两个端点处的值异号、即 $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ 时，则方程在 $[x_1,x_2]$ 内有根，且只有一个根 x^* 。

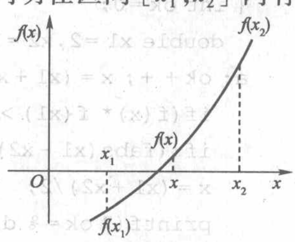

图 1-3　二分法搜索