高教自考

高等数学（二）

试卷解答

（1992－2003）

主编 王永葆 赵宝泽
主审 刘俊山

NEUPRESS
东北大学出版社

内 容 提 要

全书共分三个部分，前两部分为线性代数、概率统计的内容要点概述和典型例题分析；第三部分为试题解答．

第一部分为线性代数，有行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、特征值问题与实二次型等五章．

第二部分为概率统计，有概率的基本概念、随机变量及其分布、参数估计、假设检验、回归分析与相关分析等五章．

第三部分为 1992～2003 年上半年全国高等教育自学考试《高等数学(二)》的全部试题．为了保持试题的完整性，将 23 套考试试题按时间顺序编排，并均做了详细解答．

本书可供参加自学考试的学生使用，也可作为财经类大专学生的学习参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)试卷解答/王永葆，赵宝泽．—4 版(修订版)．—沈阳：东北大学出版社，2003.9

ISBN 7-81054-303-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…　②赵…　Ⅲ．线性代数—考试　概率统计—考试　Ⅳ．O13

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　　邮政编码 110004)

电话：(024)83680267(社务室)　　(024)83680265(传　真)

83687331(发行部)　　83687332(出版部)

网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

东北大学印刷厂印刷　　新华书店总店北京发行所发行

开本：850mm×1168mm　1/32　字数：348 千字　印张：13.375

2003 年 9 月第 4 版　　2003 年 9 月第 5 次印刷

责任编辑：刘宗玉　冯淑琴　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　责任出版：秦　力

定价：18.00 元

前言

自我国推行高等教育自学考试以来，广大考生踊跃参加，高等教育自学考试取得了巨大的成绩.全国各地相继建立了许多自学辅导站，同时成立了私立大学，招收了不少有志的青年学生.现在已有大批考生通过自学考试这一途径学到知识和本领，通过各科考试，得到毕业文凭，走向相应的工作岗位，成为有用的人才，正在为祖国的社会主义四化事业贡献力量.

高等数学(二)这一学科已列为不少专业的必考科目。高等数学(二)的内容包括线性代数和概率统计两门课程，内容广泛，理论较深.线性代数这门课程在经济科学、管理科学中有着广泛的应用.著名的投入—产出模型就是以线性代数为基础的.概率统计这门课程是对随机现象的统计规律进行演绎和归纳的科学，能够解决抽样调查、预测、决策这样一类的实际问题.因此，掌握高等数学(二)，学好线性代数和概率统计这两门课程，不仅对后续课程的学习是必不可少的，而且有助于掌握现代经济管理科学中许多理论和方法.

由于高等数学(二)具有较强的理论并具有抽象性，使许多考生仅因此一科通不过，而未拿到毕业文凭.编者在多年的教学实践中认识到，在考前必须给予重点复习，并进行强化训练.只要考生在掌握教材的主要内容的基础上，利用考前的总复习阶段，以历届的考试试题为主要内容带动全面复习，就会激发起学生的学习热情，从而收到意想不到的效果.为此，编者搜集了 1992～2003 年上半年的全国高等教育自学考试中的高等数学(二)全部试题，并做了详尽的解答.为了保持试题的完整性，对于 23 套试题保持原型，所有试题均有详细解答 .

为了使考生在总复习中系统复习并重点掌握教材的内容，本书

各章均按教学大纲的要求做了内容要点的概述及典型例题的分析解答.

由于试题量比较大,题型涉及面较广,考生在考前如能认真地系统读完此书,对于进一步掌握高等数学(二)(线性代数和概率统计)知识,提高考试成绩,一定会有较大的帮助.

全书由王永葆教授、赵宝泽教授编写,由刘俊山教授主审.刘俊山教授仔细地审阅了书稿,并提出了宝贵的意见;在本书编写过程中还得到东北大学出版社的大力支持和鼓励,在此一并表示感谢.

本书自出版以来,深受广大自学考生的欢迎,多次再版.今年又对个别错误之处做了修改,并将最新试题增补进来.

由于水平所限,书中难免存在错误和不妥之处,诚恳地希望广大读者批评指正.

编 者

2003年5月

目　　录

第一部分　线性代数

第二部分　概率统计

第三部分　试题与解答

第一部分　线性代数

第一章　行列式

§1.1　内容要点

1. n 阶行列式的概念与定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的式子，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.

n 阶行列式划去第 i 行、第 j 列，即划去元素 a_{ij}所在的行和列的所有元素，其余元素按原来的顺序所构成的$(n-1)$阶行列式 M_{ij}称为元素 a_{ij}的余子式；称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为 a_{ij}的代数余子式.

n 阶行列式 D_n 的值定义为：$D_n = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$

$D_n = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$ 通常把这定义简称为按第一列展开.

2. 行列式的性质

(1)　行列式与它的转置行列式相等.

(2)　交换行列式的任意两列(行)，行列式仅改变符号.

(3)　行列式的某一列(行)乘以常数 k，等于用常数 k 乘这个行列式.

(4) 若行列式中有两列(行)元素对应成比例,则行列式等于零.

(5) 若行列式的某列(行)的各元素是两项之和,则此行列式可表示为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}+a'_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2j}+a'_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}+a'_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a'_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a'_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a'_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 把行列式的某一列(行)的 k 倍加到另一列(行)上去,行列式值不变.

3. 定　理

定理 1 n 阶行列式等于它任一列(行)的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和.

定理 2 n 阶行列式中某一列(行)的每个元素与另一列(行)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

4. 行列式的计算方法

(1) 二阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 三阶行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

(3) n 阶行列式

按任一列(行)展开计算行列式的方法:

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

$$(D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij})$$

5. 克莱姆(Cramer)法则

(1) 非齐次线性方程组

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

若其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1)有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_j = \frac{D_j}{D} \quad j = 1,2,\cdots,n$$

其中 D_j 是将 D 中第 j 列的元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的 n 阶行列式($j=1,2,\cdots,n$).

(2) 齐次线性方程组

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组(2)只有零解.

§1.2 典型例题

例 1 求四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

中元素 a_{32}的余子式和代数余子式.

解 元素 a_{32}的余子式即为划去第三行和第二列后的三阶行列式

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & -4\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

元素 a_{32}的代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ -5 & 3 & -4\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

例 2 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & -4\\ 7 & -1 & 0 & 5\\ -2 & 6 & 1 & 0\\ 8 & 4 & -3 & -5\end{vmatrix}$$

解法 1 由定义

$$D_4=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 5\\ 6 & 1 & 0\\ 4 & -3 & -5\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0 & -4\\ 6 & 1 & 0\\ 4 & -3 & -5\end{vmatrix}$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&0&-4\\-1&0&5\\4&-3&-5\end{vmatrix}+$$

$$8\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&0&-4\\-1&0&5\\6&1&0\end{vmatrix}$$

$$=2\left[(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-3&-5\end{vmatrix}+6(-1)^{2+1}\right.$$

$$\left.\cdot\begin{vmatrix}0&5\\-3&-5\end{vmatrix}+4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&5\\1&0\end{vmatrix}\right]$$

$$-7\left[0+6(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-4\\-3&-5\end{vmatrix}+4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-4\\1&0\end{vmatrix}\right]$$

$$-2\left[0+(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-4\\-3&-5\end{vmatrix}+4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-4\\0&5\end{vmatrix}\right]$$

$$-8\left[0+(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-4\\1&0\end{vmatrix}+6(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-4\\0&5\end{vmatrix}\right]$$

$$=2(5-90-20)-7(0+72+16)-2(0-12+0)-8(0+4+0)$$

$$=-210-616+24-32=-834$$

解法 2 按第一行展开

$$D_4=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&0&5\\6&1&0\\4&-3&-5\end{vmatrix}$$

$$+(-4)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}7&-1&0\\-2&6&1\\8&4&-3\end{vmatrix}$$

$$=2\left[(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\-3&-5\end{vmatrix}+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}\right]$$

$$+4\left[7(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&1\\4&-3\end{vmatrix}(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&1\\8&-3\end{vmatrix}\right]$$

$$=2(5-110)+4(-154-2)=-834$$

解法 3 （利用行列式性质将某行(列)的元素除一个元素不为零外其余元素都化成零，然后再展开）用常数 k 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列)上，记做 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

$$D_4=\begin{vmatrix}2&0&0&-4\\7&-1&0&5\\-2&6&1&0\\8&4&-3&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+3r_3}\begin{vmatrix}2&0&0&-4\\7&-1&0&5\\-2&6&1&0\\2&22&0&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展　开}]{\text{按第 3 列}}\begin{vmatrix}2&0&-4\\7&-1&5\\2&22&-5\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+2c_1}\begin{vmatrix}2&0&0\\7&-1&19\\2&22&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展　开}]{\text{按第 1 行}}2\begin{vmatrix}-1&19\\22&-1\end{vmatrix}=2(1-418)=-834$$

例 3 求

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2-x&1&1\\1&1&3-x&1\\1&1&1&4-x\end{vmatrix}=0$$

的根.

解 由于当 $x=1,2,3$ 时，行列式中有两行相同，所以等于零. 即这 3 个数 1，2，3 都是这个方程的根. 又因为这个行列式展开后是一个关于 x 的 3 次多项式，故 1，2，3 是方程的全部根.

例 4 已知

$$\xlongequal[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)(a-1)^3$$

例 6 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

证

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 + (c_2 + c_3)} \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \cdot 0 = 0$$

例 7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 - ac_2}{c_2 - ac_1} abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ba \\ 1 & c-a & c^2-ca \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} b-a & b^2-ba \\ c-a & c^2-ca \end{vmatrix}$$

$$= abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$= abc(c-a)(c-b)(b-a)$$

例 8 用 n 阶行列式定义计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}$$

解 每次都按第一列展开得

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n-1,2} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}a_{n1}(-1)^{(n-1)+1}a_{n-1,2}\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n-2,3} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}a_{n1}(-1)^{(n-1)+1}a_{n-1,2}\cdots(-1)^{2+1}a_{2,n-1}a_{1n}$$

$$= a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

例 9 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$