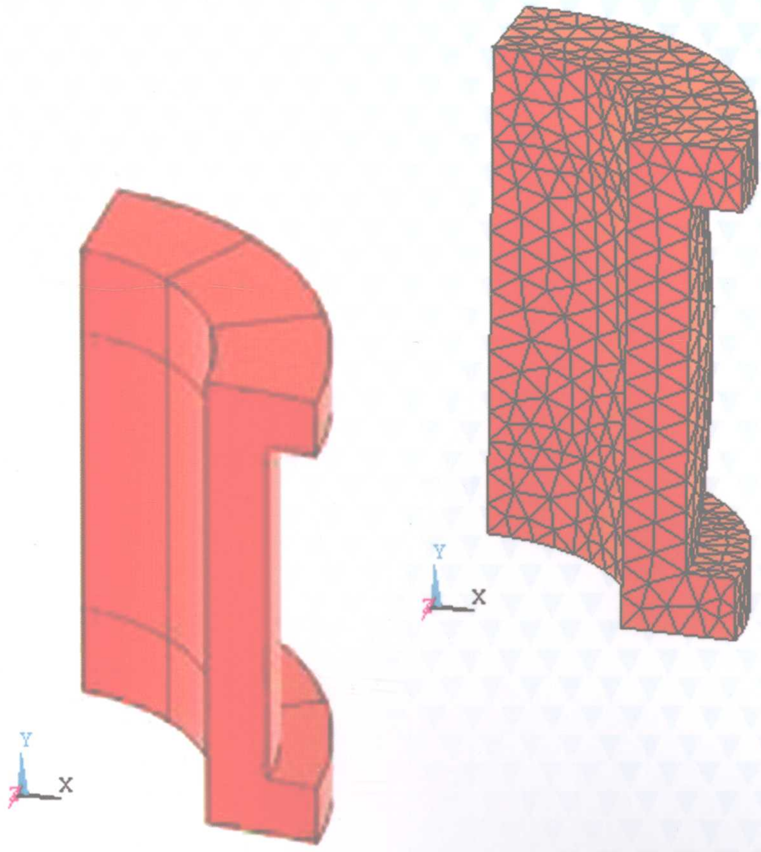
普通高等教育机电类规划教材

现代设计方法基础

孟宪颐　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育机电类规划教材

现代设计方法基础

主编　孟宪颐
参编　高振莉　刘永峰
主审　王长松

机械工业出版社

本书主要介绍常用的现代设计方法的基本原理，特别是有限元法、优化设计和可靠性的基础知识和求解机械工程问题的步骤。

第1章简要介绍了现代设计方法产生和发展的背景及其特点；第2章介绍了有限元方法的基本原理，特别是结合工程机械，着重介绍了平面问题、杆件结构、板壳问题、空间问题以及动态问题的求解原理，并分别结合目前流行的结构分析软件 ANSYS 给出一些求解实例；第3章介绍了优化设计的基本概念和原理，以及几种常用的优化设计方法的原理和求解步骤，对机械优化设计中的一些常见问题的处理也作了简要介绍，举例说明了机械结构和机构两大类型的优化设计数学模型的建立过程；第4章介绍了可靠性工程的基础知识、机械零件的可靠性设计、系统可靠性设计、疲劳强度的可靠性分析及可靠性试验的原理和方法；第5章简要介绍了其他一些常用的现代设计方法。

本书可作为高等学校机械类专业本科生及研究生的教材，也可供有关工程技术人员阅读与参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代设计方法基础/孟宪颐主编. —北京：机械工业出版社，2009.1
普通高等教育机电类规划教材
ISBN 978-7-111-25349-5

Ⅰ. 现…　Ⅱ. 孟…　Ⅲ. 机械设计—高等学校—教材　Ⅳ. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第161756号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：蔡开颖　责任编辑：蔡开颖　章承林
版式设计：霍永明　责任校对：张晓蓉
封面设计：张　静　责任印制：李　妍
北京蓝海印刷有限公司印刷
2009年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 12.75印张 · 314千字
标准书号：ISBN 978-7-111-25349-5
定价：25.00元

前 言

20世纪中后期以来，在社会经济发展需求的推动下，新的设计理念不断涌现，随着计算机技术的飞速发展，设计方法发生了革命性的变化。其中应用最广的有限元法、优化设计和可靠性、计算机辅助设计等技术是从20世纪50年代开始发展起来的。20世纪70年代末到80年代初，这些方法逐渐在我国推广。目前，现代设计方法的工程应用已经在世界范围内产生了巨大的社会效益和经济效益，现代设计方法也已经发展到几十种之多。由于这些方法的先进性，很快得到了我国研究人员和工程技术人员的重视和科技教育部门的关注。随着在设计和制造单位的推广和应用，这些方法已成为设计人员必不可少的设计技术手段。对高等院校机械工程专业教学也产生了重大影响，现代设计方法课程应运而生。20世纪80年代初期，有限元法、优化设计和可靠性课程首先在我国高校的研究生教学中开设，随后，各个高校纷纷在本科生中开设这些课程。现代设计方法包括了所有新出现的设计方法和分析方法，除了较早的有限元法、优化设计、可靠性、计算机辅助设计、模糊设计外，像稳健设计、虚拟设计、绿色设计、并行工程、智能CAD、机电一体化设计、创新设计、动态设计、神经网络及其在机械工程中的应用、工程遗传算法、智能工程、价值工程、工业艺术造型设计、人机工程模块化设计、相似性设计、反求工程设计、建模与仿真技术、面向X的设计等都属于现代设计方法范畴。但是如何统一称呼这些方法呢？北京建筑工程学院的教师在全国首先推出了“现代设计法”的提法，并从20世纪80年代开始在机械本科生中分别开设有限元法、优化设计和可靠性课程，至今已开设了20余届，取得了很好的效果和经验。在大部分高等院校，逐渐约定俗成地将这些方法统称为“现代设计方法”，并纷纷开设了该课程。可以说，“现代设计方法”这个名称已经得到了广泛的认可。至于开设的课程中，包含了多少种方法，则各取所需。但不管怎样，有限元法、优化设计和可靠性这“老三样”是必不可少的。而计算机辅助设计（CAD）则往往单独开设为一门课程。目前，市场上介绍现代设计方法的同类教材中，适用于应用型大学本科生及研究生的较少。特别是对以工程机械等行业为特色的大学来说，适合培养对象的现代设计方法的教材为数更少。另外在我国的机械工程行业，有为数不少的工程技术人员对采用现代设计方法进行分析和设计还比较陌生。对于他们来说，并不需要了解过多的理论知识，而应主要侧重基本原理的了解，方法和实际应用步骤的掌握。我国在各个领域开展了大规模的基本建设，工程机械得到了大力的发展，急需能够采用先进技术开展工程机械的设计、制造和使用的工程技术人员。因此，编写一本适合应用型大学、特别针对以工程机械为设计分析对象的本科生和研究生的现代设计方法的教材，同时也可作为这些行业的工程技术人员的参考书是非常必要的。本书是编著者依据长期教学经验，并参考了一些书籍编写而成的。本书的主要特色是紧密结合机械工程实际，结合应用型大学人才的培养定位，使学生或不熟悉现代设计方法的读者，以最短的时间掌握现代设计方法的基本原理、实际运用步骤和方

法。书中还结合现代设计方法应用，介绍了目前最为流行的结构分析软件的使用。书中除了介绍现代设计方法的基础知识外，还选编了一部分提高内容，因此在教学使用中，可根据本科生、研究生以及专业的不同要求对书中内容进行取舍。

本书可作为高等院校机械类专业本科生及研究生的教材，也可供有关工程技术人员阅读与参考。

本书的第 1、3、5 章由孟宪颐编写，第 2 章由高振莉编写，第 4 章由刘永峰编写。全书由孟宪颐主编、统稿。全书由王长松教授主审。为了配合学生的双语教学，作为学生的辅助学习材料和内容的补充，特别参考了张维刚、钟志华教授编的《Advanced Design Methods》一书，在此对两位教授表示感谢，同时对本书参考的其他资料的作者也在此一并致谢。由于作者水平有限，书中难免有一些不够周全，甚至错误的地方，希望同行专家和广大读者指正。

编　者

目　录

第1章 绪论

1.1 概述

在当今世界，随着科学技术的飞速发展，新的领域不断被开辟，新技术不断涌现，促进了经济的高速发展。同时，也使企业间的竞争日益激烈，而且这种竞争已成为世界范围内技术水平、经济实力的全面竞争。这种竞争必然促进生产力的提高，促进设计方法和手段的改进。现代设计方法就是在这样的社会竞争下发展起来的。

从20世纪50年代开始，随着计算机技术的发展和新的设计思想及理念的出现，一些先进的设计方法得到了发展，并首先在发达国家得到了推广和应用。20世纪70年代后期，随着我国的改革开放，这些方法也逐渐被我国的学术界和工程界所重视。最早得到重视和应用的是有限元法、优化设计、可靠性、CAD等技术，这些方法在工程设计的各个方面都有应用。可以说，20世纪以来是设计方法发生巨大变革的时期，新的设计方法已经或将对工程设计领域产生非常重大和深远的影响。

设计随着时代的变化而发展，通常用“传统设计”与“现代设计”来分别指过去和当前的设计方法。那么，现代设计方法与传统设计方法有什么区别呢？传统设计方法是一种经历了直觉设计、经验设计、半经验半理论设计3个阶段并于20世纪50年代后期形成的，至今仍被广泛采用的设计方法，也称之为经典的设计方法。传统设计方法基本上是凭借直接或间接的经验，通过类比法来确定方案，然后以机械零件的强度和刚度理论对确定的形状和尺寸进行必要的计算和验算，以满足限定的约束条件的。例如，在CAD技术运用之前，传统设计仅依赖于手工的操作，不仅费时，而且限制设计师的思维。传统设计图样以二维形式为工具，很难向工程技术人员展示出设计的结论。这样一来，对设计结论进行计算、判断及改进就困难多了。还有，对一个工程问题，传统设计靠分析方法来解决，并且伴有许多的假设或简化。原因是由于数学工具有限而非工程本身的需要。现代设计方法法则是以设计产品为目标的一个知识群体的总称，运用了系统工程，实行人—机—环境一体化设计，设计思想、设计进程、设计组织更合理化。它采用了动态的分析方法，使问题分析动态化，设计进程和战略、设计方案和数据的选择广义化，计算、绘图甚至分析计算机化。在现代设计方法中最早

得到应用的CAD和CAE技术被认为是对传统设计方法的一种革新。CAD取代了人工绘图，而CAE取代了分析和计算。应用CAD技术以来，大部分设计工作可以由计算机完成，设计者可以从计算结果中迅速得到数据，并且可以更容易地对数据进行复制、修改、存储和更改。更为重要的是，三维计算机图形可直接反映出设计结果，可实现工程物理数据可视化，比如应力场、速度场、温度场等。因此，对工程师来说，可以更方便地对相应的设计实现计算、优化和分析。随着CAE技术的发展，只要计算机有足够的容量，复杂的工程问题就能进行高精度的求解。正因为CAE技术的强大功能，那些以前被认为不能设计的产品，现在也能实现。包括CAD、CAE技术在内，现代设计方法同样包含一些现代设计理念，例如产品的优化、可靠性，产品制造过程的并行工程等。产品的优化是指在某些条件下完成产品的评价指标优化，可靠性工程是研究部件、产品或系统在规定时间、规定条件下完成规定功能而不失效的概率，并行工程则是一种综合工程设计、制造、管理经营的思想、方法和工作模式。

现代设计方法包括了几乎所有新发展的设计和分析方法，除了较早的有限元法、优化设计、可靠性设计、计算机辅助设计、模糊设计外，像稳健设计、虚拟设计、绿色设计、并行工程、智能计算机辅助设计、机电一体化设计、创新设计、动态设计、神经网络及其应用、工程遗传算法、价值工程、工业艺术造型设计、模块化设计、相似性设计、反求工程设计、建模与仿真技术、面向X的设计等都属于现代设计方法。

但是，无论什么样的设计方法的产生都与科技发展的水平有关，与社会和生产力的需求有关，也与人们的设计观念有关。所谓的现代设计方法是在传统设计方法发展的过程中产生的，因此，传统设计方法仍然是现代设计方法的基础，起码在现阶段是如此。

1.2 现代设计方法的特点

1. 多种方法综合运用

现代设计综合运用信息论、优化论、相似论、模糊论、可靠性理论等自然科学理论，同时采用集合、矩阵、图论、数学规划等数学工具和电子计算机技术，提供多种解决设计问题的科学途径。

2. 全寿命周期和多目标优化设计

传统设计仅局限于产品的设计，而现代设计考虑产品的全寿命周期，包含客户需求分析、生产计划、产品制造、测试、维护、价格、可回收等。传统设计中，往往是单目标设计。现代设计中由于计算速度提高和采用先进的设计方法，往往可以同时考虑多个目标，实现多目标的优化设计。

3. 计算机化和可视化

传统设计已经被计算机辅助设计所取代，计算机在设计方面的应用已经从早期的工程分析与计算，发展到现代的优化设计、立体建模、设计过程监测和实现制造的可视化、仿真等。在设计周期被大大缩短的同时，产品质量也得到极大的改善。传统设计中，产品与部件的形状仅仅是制造出来后才能看到，而现代设计中，由于采用了计算机三维立体造型技术、仿真技术及可视化制造技术，一个产品或部件的形状，甚至工作过程可以在制造前就能看到。因此，很容易对设计结果进行改进或优化，避免产品制造完成后，由于修改设计而带来

损失。

4. 分析趋于精确化

在传统设计中，载荷和应力被认为是集中作用和不变的，改进产品可靠性的方法只能通过增加安全系数来实现。但在实际中，载荷和应力通常是随机分布和动态的，增加设计安全系数对改进产品的可靠性并不总是有效的。因此，现代设计更关注载荷与应力的分布特性和动态特性。通过有限元方法这一强大的工具，产品的实际工作状态和最终结果可被准确地模拟和获得，并可根据概率和统计理论预测出产品的可靠性。

5. 环境保护和节约能源

人类环境由于现代工业的发展，日益受到破坏。现今的产品设计必须考虑环境因素，由于设备运行而引起的环境污染应该越来越少，对人体的危害也应降到最低程度。因此，设计中考虑环境应是现代设计的一个发展趋势。绿色设计的方法可以在设计阶段充分评价产品对环境的影响和可回收性。

6. 制造过程的集成化

传统设计中，产品的设计、制造、检测等是独立的工作过程，设计信息在向其他过程的传递当中，由于不同技术人员的理解以及其他原因，可能带来信息的偏差。现代设计采用统一的产品数据模型，保证了产品全寿命过程中数据的统一性，同时，大大提高了各个过程之间数据的转换效率。

1.3 本书内容

本书主要介绍目前发展最为成熟和在工程界应用最为广泛的有限元法、优化设计和可靠性工程，并对其他一些新的方法作了简要的描述，以助于读者从整体上了解现代设计方法的基本原理。本书第2章介绍有限元法的基本原理，特别是结合工程机械设计中经常遇到的工程问题，着重介绍了平面问题、杆件结构、板壳结构、空间结构以及动态问题的求解原理及步骤，并分别结合目前流行的结构分析软件ANSYS给出一些求解实例；第3章介绍了优化设计的基本概念和原理，以及一维搜索方法、无约束和有约束优化中常用方法的原理和求解步骤，对机械优化设计中的一些常见问题的处理，如数学模型的规格化、多目标优化、离散变量优化问题也作了简要介绍，举例说明了机械结构和机构两大类型的优化设计数学模型的建立过程，并对采用ANSYS求解优化问题作了介绍；第4章介绍了可靠性工程的基础知识，以及机械零件的可靠性设计、系统可靠性设计、疲劳强度的可靠性分析及可靠性试验的原理和方法；第5章简要介绍了其他一些近年来发展起来的现代设计方法。

第2章 有限元法基础

2.1 有限元法简介

2.1.1 有限元法的产生及基本思想

在工程技术领域中，对于许多力学问题或场问题，有时可以建立基本方程，即常微分方程或偏微分方程，再加上相应的边界条件，以求出方程的解。但用解析法求精确解往往比较困难，除非方程比较简单，且几何边界相当规则的少数问题，对于大多数工程技术问题则很少有解析解；另有一些工程技术问题微分方程式也难以建立，更无法求解。因此，人们曾提出两种古典的近似求解法，即有限差分法与变分法，以弥补求解方式的不足。

有限差分法其实质就是将由物理模型建立的微分方程及其相应的边界条件离散化，建立相应的差分方程组来代替，求得的是近似的数值解，但是当遇到几何形状复杂的边界时，有限差分法解的精度往往受到限制，甚至不可能求出解。

变分法是研究泛函极值问题的一种方法，泛函中的变量是函数，因此泛函是函数的函数。在实际的工程技术问题中，有时直接对微分方程的边值问题求解非常困难，但从变分原理可知，微分方程的边值问题的解，等价于相应泛函极值问题的解，因此将微分方程的边值问题转化为泛函的变分问题来求解反而容易。泛函一般以积分形式表达，而能量一般也以积分形式的泛函表达，因此变分法在此也可称为能量法。

有限元法是变分问题直接法中的一种有效方法。它利用离散化的概念，直接对研究的问题（对象）进行离散化处理，省略了有限差分法中需建立微分方程的中间环节，并使有限元法在利用变分原理时，只要假定求解函数的分段连续就可以了，降低了变分法中函数整体连续的要求，把数值解与解析解结合起来。从整体而言，有限元法是数值解；从分段而言，它又是解析解。

因此，有限元法的基本思想就是把弹性体假想地分割成为有限个单元所组成的集合体，即在计算的图形上划分网格，分成有限个单元，简称离散化。这些单元仅在其顶角处互相连接，这些连接点称为节点。离散化的组合体与真实的弹性体的区别在于组合体中单元与单元

之间的连接除节点外，再无任何关联。但是这种连接必须满足变形协调条件，既不能出现裂缝，也不能允许发生重叠。显然，单元之间只能通过节点传递内力。通过节点传递的内力称为节点力。作用在节点上的载荷称为节点载荷。当弹性体受到外力作用发生变形时，组成它的各个单元也将发生变形，因而各个节点将产生不同程度的位移，这种位移称为节点位移。

2.1.2 有限元法的分析过程

1. 结构离散化

应用有限元法来分析工程问题的第一步是将结构离散化（见图 2-1）。其过程就是将待分析的结构用一些假想的线或面进行切割，使其成为具有选定切割形状的有限个单元体。这些单元体被认为仅仅在单元的一些指定点处相互连接，这些单元上的点则成为单元的节点。这一步的实质也就是用单元的集合体来代替原来的结构。为了便于理论推导和用计算程序进行分析，一般结构离散化的具体步骤是：建立单元和整体坐标系，对单元和节点进行合理的编号，为后续有限元分析准备必需的数据化信息。

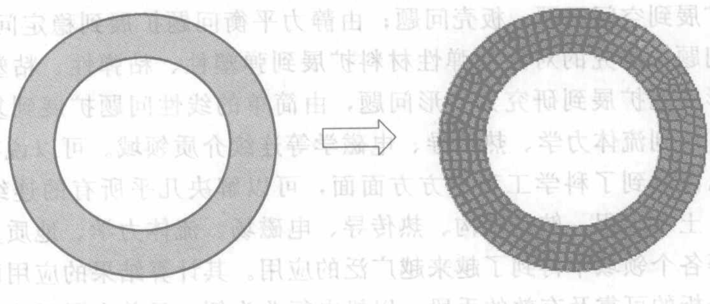


图 2-1 结构的离散

2. 确定单元位移模式

结构离散化后，接下来的工作就是对结构离散化所得的任一典型单元进行所谓单元特征分析。为此，首先必须对该单元中任意一点的位移分布作出假设。即在单元内用只具有有限自由度的简单位移代替真实位移。对单元来说，就是将单元中任意一点的位移近似地表示为该单元节点位移的函数，该位移称为单元的位移模式或位移函数。位移函数的假设合理与否，将直接影响到有限元分析的计算精度、效率和可靠性。目前，比较常用的方法是以多项式作为位移模式。这主要是因为多项式的微积分运算比较简单，而且从泰勒级数展开的意义来说，任何光滑函数都可以用无限项的泰勒级数多项式来展开。位移模式的合理选择，是有限元法的最重要内容之一。所谓创建一种新型的单元，位移模式的确定是其核心内容。本书后续各章将结合具体单元，对其进行较详细的讨论。

3. 单元特性分析

确定了单元位移模式后，就可以对单元做如下 3 个方面的工作。

1）利用应变和位移之间的关系即几何方程，将单元中任意一点的应变用待定的单元节点位移来表示。

2）利用应力和应变之间的关系即物理方程，推导出用单元节点位移表示的单元中任意一点应力的矩阵方程。

3）利用虚位移原理或最小势能原理（对其他类型的一些有限元将应用其他对应的变分

原理）建立单元刚度方程。

4. 整体分析

在确定了每个单元的单元刚度方程之后，可以将各单元集合成整体结构进行分析，建立起表示整个结构节点平衡的方程组，即整体刚度方程。然后引入结构的边界条件，对方程组进行求解，得出节点位移，并进而求出各单元的内力和变形。

5. 输出结果分析

在得出节点位移，并进而求出各单元的内力和变形后，可对数据结果进行整理分析。分析的主要内容有：应力场、应变场、位移场、速度场、温度场等。目前商用有限元软件已很发达，计算机可按照指令完成人们下达的任务，并以图形、数字、场等多种形式表达出来，满足用户的需求。

2.1.3 有限元法在工程中的应用

经过 60 多年的发展，有限元法的应用范围经历了由杆状构件问题发展到弹性力学平面问题，并进一步扩展到空间问题、板壳问题；由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题、波动问题、接触问题。研究的对象从弹性材料扩展到弹塑性、粘弹性、粘塑性复合材料问题。由研究小变形问题扩展到研究大变形问题，由简单的线性问题扩展到复杂的非线性问题，由固体力学扩展到流体力学、热传导、电磁学等连续介质领域。可以说有限元法作为一种数值计算方法已渗透到了科学工程的方方面面，可以解决几乎所有的连续介质和场的问题，在机械工程、土木工程、航空结构、热传导、电磁场、流体力学、地质力学、原子工程和生物医学工程等各个领域中得到了越来越广泛的应用。其计算结果的应用已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠及有效的手段。以机电行业为例，目前有限元法可用来分析：

1）结构线性静力分析。主要有各类机械零件（如连杆、齿轮、带轮、轴、轴承座等零件）的受力分析，压力容器的受力分析，悬臂梁的受力分析等。

2）动力学分析。主要有圆柱齿轮的模态分析、电动机系统谐响应分析、汽车碰撞模拟分析。

3）非线性分析。材料成形模拟分析、圆柱壳的屈曲分析等。

4）流体力学分析、热传导分析等。研究流体的势流、流体的粘性流动；在电磁学、热传导领域用来研究固体和流体中的稳态温度分布、瞬态热流问题，以及进行二维、三维时变、高频电磁场分析等。

本章以弹性平面问题为首例，逐步对平面单元、梁单元、板单元、空间问题及动力问题进行分析，以实例求解过程来展示有限元法在机械工程领域的应用。

2.2 弹性力学基础知识

材料力学主要研究杆、梁、柱，结构力学主要研究杆系（或梁系），弹性力学主要研究实体和板的受力与变形。工程中的许多构件是由实体或板构成，而且有限元法所能解决的问题有许多是属于弹性力学范畴，因此要解决工程问题和学好有限元法必须掌握弹性力学知识。弹性力学假设所研究的物体是连续的、完全弹性的、均匀的、各向同性的、微小变形的和无初应力的，并在这 6 条假设的基础上研究受力物体一点上的应力、应变、变形和平衡关

系。为了简单起见，下面以弹性力学平面问题为例。

2.2.1 弹性力学平面问题

工程中许多构件形状与受力状态使它们可以简化为弹性平面问题处理，平面问题有两大类：平面应力问题与平面应变问题。

1. 平面应力问题

如图 2-2 所示，一个矩形板受到外力作用。如果板的厚度远小于板的长度，外力平行作用于 xOy 平面，且沿 z 轴方向均匀分布，这类问题就称为平面应力问题。此时的应力、应变状态为：$\sigma_z=0$，$\varepsilon_z\neq0$，$\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$。很多机器零部件的应力状态均可看做平面应力状态，例如发动机的连杆。

2. 平面应变问题

如图 2-3 所示，一个水坝受到沿 z 轴方向均匀分布的外力作用。取截面 xOy 为研究对象，则沿 z 轴上的应变为零，这类问题称为平面应变问题。此时的应力、应变状态为：$\varepsilon_z=0$，$\sigma_z\neq0$，$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$。在机械零件中滚动轴承可看做为平面应变问题。

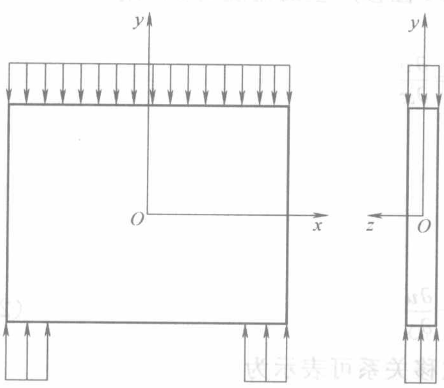


图 2-2 矩形薄板受力分布

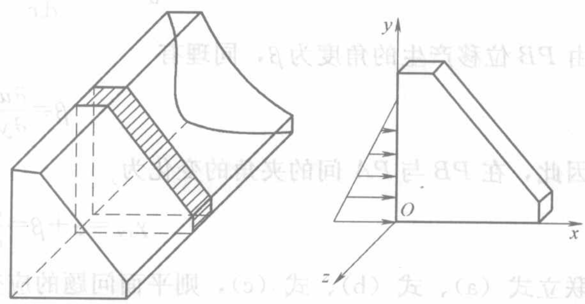


图 2-3 水坝受力模型

2.2.2 弹性力学基本方程

1. 应变-位移关系

可以用两种方法描述物体的变形。一种方法是给出 x 方向的位移，用 u 表示；y 方向的位移，用 v 表示。另一种方法是给出应变的无穷小量，如图 2-4 所示，给出了在 xOy 平面上的各应变分量。应变分量的定义描述如下：

在一个弹性体上任取一点 P，考虑到沿 x 轴、y 轴方向存在无穷小的线段 PA、PB。由外力作用产生变形，P、A、B 三点相应地移到新的位置，即 P'、A'、B'。令 P 点在 x、y 方向的位移用 u、v 表示，则 A 点在 x 方向的位移分量为 $u+(\partial u/\partial x)\mathrm{d}x$。那么，在 x 方向上，应变分量可由以下形式表示，即

$$\varepsilon_x=\frac{u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{a}$$

同理，y 方向的应变分量可表示为

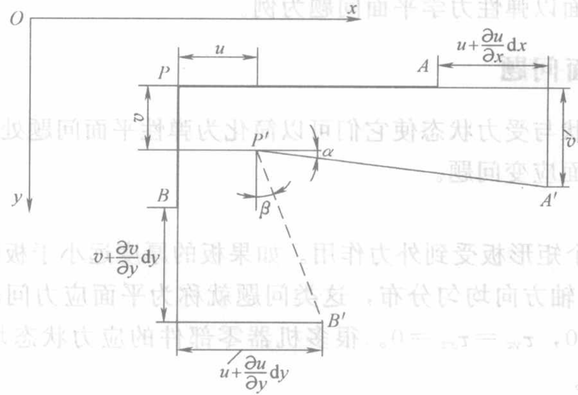


图 2-4 微小单元应变

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{b}$$

在 PA 与 PB 之间夹角的改变定义为切应变。由于 PA 位移产生的角度为 α，则

$$\alpha=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x-v}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{c}$$

由 PB 位移产生的角度为 β，同理有

$$\beta=\frac{\partial u}{\partial y}$$

因此，在 PB 与 PA 间的夹角的变化为

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2-1}$$

联立式（a）、式（b）、式（c），则平面问题的应变位移关系可表示为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2-2}$$

从式（2-2）中可以看出，只要给出位移分量，就能确定应变分量。另一方面，给定应变分量，并不能唯一确定位移分量。这是因为：如果一个物体内存在相同的应变分布，那么在不同的边界条件下，物体可能有不同的刚体运动。

2. 应变-应力关系

（1）三维问题中的应变-应力关系　研究三维问题时，先假定一个如图 2-5 所示的正六面体。在正六面体中，有 3 对平面，两两相同。在每个平面上，都有 3 个应力分量，一个正应力，两个切应力。每个应力分量均平行于 3 个坐标轴中的一个。正应力分量用 σ 表示，用 x、y、z 为下标表示对应分量分别平行于 x、y、z 轴。切应力用 τ 表示，下标由两个字母来表示，前一个字母表明作用面垂直于该字母表示的坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着该字母表示的坐标轴，如切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上，沿 y 轴方向。

应力分量的符号被定义为：如果一个面的外法线矢量与坐标轴的正向一致，那么该截面就称为正表面，该截面上与坐标轴一致的应力方向也是正的。反之，应力分量的方向为负。若截面的外法线矢量与坐标轴的正向相反，那么该截面称为负表面，该截面上与坐标轴一致

的应力分量为负。反之，应力分量为正。如图 2-5 所示，由以上符号的描述可以看出，所有的应力分量均为正。

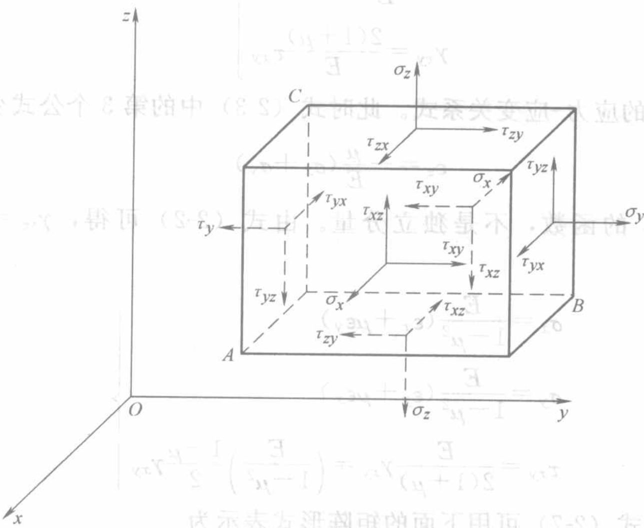


图 2-5 六面体单元应力分量

由图 2-5 看出，正六面体一共有 9 个应力分量，3 个正应力，6 个切应力。这 6 个切应力中，仅有 3 个是独立的且存在以下关系，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}, \quad \tau_{yz}=\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

所以，共有 6 个应力独立分量。相应地，有 6 个应变独立分量。由胡克定律，应力与应变的关系可表示为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_x+\sigma_z)]\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}, \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz}, \gamma_{xz}=\frac{1}{G}\tau_{zx}$$

式中，E 为弹性模量，G 为切变模量，μ 为泊松比。

E、G 之间的关系为

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2-4}$$

对于各向同性材料的线性弹性体，以上所述的分量均不随应变应力或坐标的变化而改变，也不随坐标轴的方位而改变。

（2）平面应力问题中的应力-应变关系　对于平面应力问题，有 $\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$，由式（2-3）、式（2-4）可得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{2-5}$$

以上为平面应力问题的应力-应变关系式。此时式（2-3）中的第 3 个公式变为

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\tag{2-6}$$

这表明：ε_z 为 σ_x、σ_y 的函数，不是独立分量。由式（2-2）可得，$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$，根据式(2-5)应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}=\left(\frac{E}{1-\mu^2}\right)\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{2-7}$$

为讨论更方便，式（2-7）可用下面的矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D\varepsilon}\tag{2-8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\ \mu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\tag{2-9}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 称为平面弹性问题的弹性矩阵。弹性矩阵是对称的，其元素仅为弹性常数的函数。

（3）平面应变问题中的应变-应力关系式　对于平面应变问题，有 $\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$，由式（2-3）可得

$$\begin{aligned}\tau_{yz}&=0,\ \tau_{zx}=0\\ \sigma_z&=\mu(\sigma_x+\sigma_y)\end{aligned}\tag{2-10}$$

从式（2-10）可看出，σ_z 是 σ_x、σ_y 的函数，σ_x、σ_y 是独立变量。因此，共有 3 个独立应力分量 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}。将式（2-10）代入式（2-3）得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\\ \varepsilon_y&=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}=\frac{2\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\right)}{\frac{E}{1-\mu^2}}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{2-11}$$

式（2-11）是用应力－应变关系表示的平面应变问题，该式也可用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D\varepsilon}$$