广东省成人高等教育系列教材

主　编　郭子君　向子贵
副主编　卢建平

经济数学

(1)辅导

中山大学出版社

广东省成人高等教育系列教材

经济数学（1）辅导

主　编　郭子君　向子贵
副主编　卢建平

中山大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学（1）辅导/郭子君，向子贵主编；卢建平副主编．—广州：中山大学出版社，2008.1

（广东省成人高等教育系列教材）

ISBN 978－7－306－03017－7

Ⅰ．经…　Ⅱ．①郭…　②向…　③卢…　Ⅲ．经济数学—成人教育：高等教育—教学参考资料　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 192351 号

出 版 人：叶侨健
责任编辑：李海东
封面设计：红　枫
责任校对：何　凡
责任技编：黄少伟
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020－84111996，84113349
　　　　　发行部 020－84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传　真：020－84036565
网　　址：http：//www.zsup.com.cn　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：中山大学印刷厂
经 销 者：广东学苑文化发展有限公司
　　　　　电话：（020）37217189，37217733
规　　格：787mm×1092mm　1/16　11.5 印张　280 千字
版次印次：2008 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月修订　2009 年 1 月第 3 次印刷
定　　价：16.00 元

广东省成人高等教育系列教材简介

随着广东省成人高等教育事业的蓬勃发展，成人高等教育教材存在着可选版本较少、内容陈旧等问题. 借用普通高校教材又存在理论性较强、难度较大、脱离成人教育实际基础等问题.

为解决这一矛盾，在广东省成人教育协会支持下，在总结广东省各普通高校成人教育教学及实践经验的基础上，由广东省普通高校成人高等教育专业委员会组织有关高校专家编写了本系列教材. 教材根据成人高等教育学生的实际入学基础编写，力求突出成人业余、实用的特点，以求达到理论与实践相结合，内容和形式更加符合成人学习的目的.

本系列教材是集体智慧的结晶，由广东省26所大学一线教师承担主要编写及审稿工作.

教材编写实行主编负责制，由中山大学出版社于2007年1月起陆续出版，修订版供2009年春季各院校选用，广东学苑文化发展有限公司支持前期资金投入及代理发行工作.

本系列教材编审委员会成员如下：

顾　问：谭泽中　李少白

主　任：陈金华

副主任：（按姓氏笔画排列）

代永华　吴庭万　杜秋虹　杨　松　何勇斌　张建伟
林　兰　段雄春　黄大乾　曾荣青　漆国生　廖仕湖

委　员：（按姓氏笔画排列）

王康华　申玉杰　龙大宏　江　滨　刘幸东　纪望平
汤耀新　许松荣　李旭旦　李卫安　吴　养　陈赵生
张大鹏　罗　辉　姜新发　钟良珍　胡克章　党丽娟
索庆华　黄世扬　梁征宇

总发行：广东学苑文化发展有限公司

总策划：广东省普通高校成人高等教育专业委员会

编写人员

总主编：王全迪（华南理工大学）

主　编：郭子君（华南农业大学）

向子贵（广东商学院）

副主编：卢建平（华南农业大学）

编　者：（以姓氏笔画为序）

王全迪　卢建平　李绍明　杨立洪

郭子君　郭　艾　唐民英　蒋明星

修订前言

本书是在原书的基础上进行修订而成的。关于教材的修订问题，广东省成人高等教育系列教材编审委员会组织专门会议进行了讨论，与会代表们提出了一些有益的建议，希望修订后的教材能够更加适应大多数院校的教学，这也是我们的愿望。

在修订工作中，我们保留了原教材的系统和风格及其结构完整、条理清晰、叙述详细、通俗易懂、易于理解和自学的特点，同时吸收了各位专家的建议，使得修订后的教材能够更加适合成人教育教学的需要。修改较多的部分涉及函数、极限、导数及其应用等内容，修订主要在如下几个方面：为了更好地与中学数学教材相衔接，函数概念部分进行重新了编写；极限的各种定义也进行了改写；函数的最大值与最小值部分作为一个独立部分单独加标题编写，改写了不定积分计算方法的相关内容。统一规范了数学符号的使用以及图表的编排结构。对全书各章节的习题进行了调整并增加了部分习题，特别是增加了部分综合习题的 B 组习题，希望这些习题在检查学习效果及复习总结方面能够发挥一些作用。教材的最后增加了一个附录，主要录入了中学数学教材中的一些常用公式。

兄弟院校的同行对本书的修订提出了不少具体意见，修订时我们都作了认真分析和考虑，在此，我们对广东省成人高等教育系列教材编审委员会，以及王全迪教授、万细仔教授、徐秀珍教授等的帮助表示衷心感谢。深圳大学数学与计算科学学院赵延孟教授审阅了全书，提出了许多宝贵意见，在此表示诚挚的谢意。

本书的修订工作主要由卢建平、蒋明星、郭子君、向子贵和李绍明等完成，并由郭子君统稿定稿。新版中存在的问题，欢迎专家，同行和读者批评指正。

编　者

2008 年 12 月 18 日

前 言

在科学技术日新月异的今天，随着我国经济改革的不断深入和发展，经济数学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学的教师、研究人员和实际工作者的重视. 这些对经济管理类专业大学数学课程的教学提出了更高的要求. 同时，以教学内容、教学方法和课程体系为核心的教学改革正在蓬勃开展，高等学校数学教育教学体系的改革也得到了社会各界的广泛重视. 根据广东省成人高校《经济数学》课程教学大纲，我们组织部分具有丰富教学经验的教师反复研讨，精心编写了这套《经济数学》教材.

本教材主要供成人高等学校经济管理类各专业的大学数学课程使用，也可作为自学考试、函授大学和职业技术学院的相关专业的大学数学课程教材，并可供经济工作者参考.

本教材分为两个分册.《经济数学（1）》共七章，内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分初步.《经济数学（2）》共七章，内容包括线性代数、概率论与数理统计两部分. 线性代数部分涵盖了行列式、矩阵和线性方程组的基本内容，概率论与数理统计部分涵盖了随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理的基本内容以及数理统计的基本理论和方法. 根据经济管理类各专业对数学理论与方法的实际需求和成人教育的特点，本教材突出基本概念、基本方法以及实际应用的内容，注重理论与实践相结合；对重点、难点作详细的叙述和分析，每章都讨论经济模型方面的应用例题. 教材的每一节都配有练习，通过这些练习，学生可掌握该节的基本内容，有利于学生自学；每章后有综合习题，旨在加强学生的“三基”训练，并提高综合分析问题的能力.

为了便于学生学习，我们还编写了与教材配套的《经济数学辅导》. 它包括各章的基本要求、重点和难点，并根据编者多年的教学经验，编入了各章的主要解题方法和典型例题，并对教材中的习题编写了习题解答.

本教材是应成人教育教学的需要而组织编写的，在编写过程中得到华南理工大学继续教育学院、华南农业大学继续教育学院、深圳大学和东莞理工学院、广州大学、广东商学院的大力支持，在此一并表示由衷感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，教材中一定还存在缺点和问题. 敬请专家和读者不吝指正.

编 者

2007 年 12 月 10 日

目　　录

第1章　函　　数

一、教学基本要求

1. 理解函数的概念及构成函数的两要素，并以此来判别两个函数是否为相同的函数.
2. 理解分段函数的概念.
3. 掌握函数的几个基本性质.
4. 理解反函数及复合函数概念，掌握构成复合函数的复合过程.
5. 掌握基本初等函数的图形及性质.
6. 会建立简单经济问题的函数关系.

二、重点、难点内容诠释

1. 函数定义的几点说明：

（1）若对于 A 中的每个 x 的取值，y 有唯一的值与之对应，称之为单值函数，否则称之为多值函数. 本书所讨论的函数一般都是指单值函数.

（2）一般函数的对应关系用字母“f”来表示，不同函数的对应关系可以用不同的字母如 g，h，…，来表示.

（3）函数的表示法：公式法、图形法、列表法.

（4）函数的两要素：定义域（A）和对应关系（f），两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应关系相同.

（5）确定用公式法表示函数的定义域时应考虑两种情况，一是确定使该式子有意义的自变量的全体，这样的定义域称为自然定义域；二是对实际问题要根据变量的实际变化范围来确定，定义域一般用区间表示.

2. 讨论函数定义域时应注意如下几点：

（1）分母不能为零；

（2）偶次根号下非负；

（3）对数的底大于零而不等于1，真数大于零；

（4）三角函数和反三角函数要符合其定义；

（5）如果函数的表达式由若干项组合而成，则它的定义域是各项定义域的公共部分.

例1　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lg(x-2)}}$ 的定义域.

解　为使函数有意义，应有

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 1+\lg(x-2)>0, \end{cases}$$

从而得
$$\begin{cases} x>2, \\ x-2>\dfrac{1}{10}, \end{cases}$$
即
$$\begin{cases} x>2, \\ x>2\dfrac{1}{10}, \end{cases}$$
所以$\left(2\dfrac{1}{10},\ +\infty\right)$是函数的定义域.

3. 构成函数的两个要素：

(1) 构成函数的要素是定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以构成函数的要素只有两个：定义域与对应关系. 如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，即称这两个函数相等（或为同一函数）.

(2) 两个函数相等当且仅当它们的定义域和对应关系完全一致，而与表示自变量和函数值的字母无关.

比较两个函数是否相同时，应注意定义域和对应关系是两个基本的要素，只有两个函数的定义域和对应关系完全相同时才是同一个函数.

例 2 设$f(e^{x-1})=3x-2$，求$f(x)$.

解法 1 令$u=e^{x-1}$，则$x=\ln u+1$.

所以
$$f(u)=3(\ln u+1)-2=3\ln u+1,$$
因此
$$f(x)=3\ln x+1 \quad (x>0).$$

解法 2 由于$f(e^{x-1})=3x-2$，可得
$$f(e^{x-1})=3(x-1)+1,$$
即
$$f(e^{x-1})=3\ln e^{x-1}+1,$$
因此
$$f(x)=3\ln x+1 \quad (x>0).$$

4. 对分段函数的理解：

(1) 分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数；

(2) 它的定义域是各部分的自变量取值集合的并集；

(3) 求分段函数的函数值时，要根据自变量所在的范围选用相应的解析式，其图形要分段作出.

例 3 函数$f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x-2, & x<0 \end{cases}$的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，但是，当$x>0$时函数表达式是$f(x)=x+2$，当$x<0$时函数表达式是$f(x)=x-2$，当$x=0$时函数值$f(x)=0$.

5. 函数的几个性质：

函数的特性分为四种：奇偶性、单调性、周期性和有界性. 对于基本初等函数的这四种特性我们要准确掌握.

例如，$y=\sin x$ 为奇函数，在$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$区间上单调增加，在$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi\right]$区间上单调减少；函数以$2\pi$为周期；函数是有界函数，因为

$|\sin x| \leqslant 1$.

$y=\cot x$ 为偶函数，在（$k\pi$，$k\pi+\pi$）区间上单调减少；函数以 π 为周期；函数是无界函数.

6. 关于反函数、复合函数的注意事项：

（1）函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域是 R，函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 R，值域是 D. 两个函数互为反函数，原函数的定义域是它的反函数的值域，原函数的值域是它的反函数的定义域. 例如，$x=\dfrac{y}{2}$（$y\in \mathrm{R}$）是函数 $y=2x$（$x\in\mathrm{R}$）的反函数.

（2）$y=f(x)(x\in D)$ 有反函数的条件是 D 与 R 为非空数集，且函数 $y=f(x)$ 是由 D 到 R 的 1－1 对应关系.

（3）从函数图像看，互为反函数的两个函数图像关于直线 $y=x$ 对称.

（4）会将几个简单函数复合成复合函数，并将复合函数分解成几个简单函数.

7. 基本初等函数及其性质.

基本初等函数通常指以下六类函数：常值函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数.

（1）常值函数 $y=C$（C 为常数）. 它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图像是过$(0,C)$与 x 轴平行的一条直线，为偶函数.

（2）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）.

1）幂函数的图像.

例如，作出下列函数的图像（图 1.1）：

（a）$y=x$；

（b）$y=x^{\frac{1}{2}}$；

（c）$y=x^2$；

（d）$y=x^{-1}$；

（e）$y=x^3$.

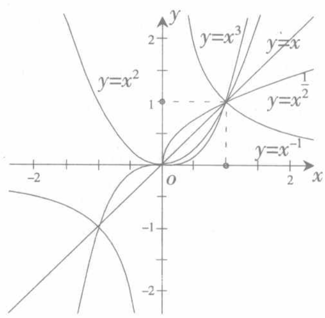

图 1.1

2）幂函数的性质：

（a）所有的幂函数在（0，$+\infty$）都有定义，并且图像都过点（1，1）.

（b）$\mu>0$ 时，幂函数的图像通过原点，并且在区间［0，$+\infty$）上是增函数.

（c）$\mu<0$ 时，幂函数的图像在区间（0，$+\infty$）上是减函数. 在第一象限内，当 x 从右边趋向原点时，图像在 y 轴右方无限地逼近 y 轴正半轴；当 x 趋于 $+\infty$ 时，图像在 x 轴上方无限地逼近 x 轴正半轴.

（3）指数函数 $y=a^x$（a 为常数，$a>0$，$a\neq1$）.

1）指数函数的图像.

在同一坐标系中画出下列函数的图像（图 1.2）：

（a）$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；

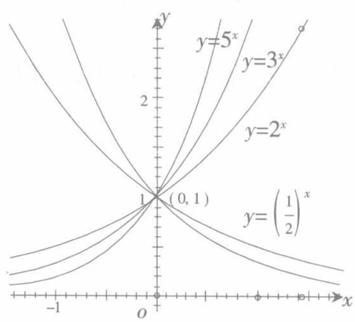

图 1.2

(b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

(c) $y=2^x$;

(d) $y=3^x$;

(e) $y=5^x$.

2）指数函数的性质：

(a) 在 $[a,b]$ 上，$f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域是 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$；

(b) 若 $x\neq 0$，则 $f(x)\neq 1$；$f(x)$ 取所有正数当且仅当 $x\in \mathrm{R}$；

(c) 对于指数函数 $f(x)=a^x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$），总有 $f(1)=a$；

(d) 当 $a>1$ 时，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$.

指数函数的图像特征和性质归纳如表 1.1.

表 1.1　指数函数的图像特征和性质

图像特征		函数性质	
$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
向 x 轴正负方向无限延伸		函数的定义域为 R	
图像关于原点和 y 轴不对称		非奇非偶函数	
函数图像都在 x 轴上方		函数的值域为 R^+	
函数图像都过定点（0，1）		$a^0=1$	
自左向右看，图像逐渐上升	自左向右看，图像逐渐下降	增函数	减函数
在第一象限内的图像纵坐标都大于 1	在第一象限内的图像纵坐标都小于 1	$x>0$，$a^x>1$	$x>0$，$a^x<1$
在第二象限内的图像纵坐标都小于 1	在第二象限内的图像纵坐标都大于 1	$x<0$，$a^x<1$	$x<0$，$a^x>1$
图像上升趋势是越来越陡	图像下降趋势是越来越缓	函数值开始增长较慢，到了某一值后增长速度极快	函数值开始减小极快，到了某一值后减小速度较慢

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ （a 为常数，$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$）.

在同一坐标系中画出下列对数函数的图像（图 1.3）：

(a) $y=\log_2 x$;

(b) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$;

(c) $y=\log_3 x$;

(d) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$;

(e) $y=\log_5 x$.

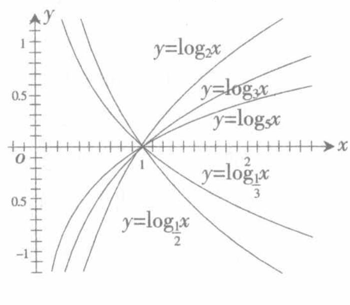

图 1.3

类比指数函数图像和性质的研究，将对数函数的图像特征和性质归纳如表 1.2.

表 1.2　对数函数的图像特征和性质

图像特征		函数性质	
$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
函数图像都在 y 轴右侧		函数的定义域为（0，$+\infty$）	
图像关于原点和 y 轴不对称		非奇非偶函数	
向 y 轴正负方向无限延伸		函数的值域为 R	
函数图像都过定点（1，0）		$1^0=1$	
自左向右看，图像逐渐上升	自左向右看，图像逐渐下降	增函数	减函数
第一象限的图像纵坐标都大于 0	第一象限的图像纵坐标都大于 0	$x>1$，$\log_a x>0$	$0<x<1$，$\log_a x>0$
第四象限的图像纵坐标都小于 0	第四象限的图像纵坐标都小于 0	$0<x<1$，$\log_a x<0$	$x>1$，$\log_a x<0$

（5）三角函数.

三角函数的相关内容见本书的附录.

（6）反三角函数.

$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

如果 $\sin y=x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则将 y 表示为 $\arcsin x$，称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数，$y=\arcsin x$的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

如果 $\cos y=x$ $(0\leqslant y\leqslant\pi)$，则将 y 表示为 $\arccos x$，称 $y=\arccos x$ 为反余弦函数，$y=\arccos x$的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

如果 $\tan y=x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$，则将 y 表示为 $\arctan x$，称 $y=\arctan x$ 为反正切函数，$y=\arctan x$的定义域为 $-\infty<x<+\infty$.

如果 $\cot y=x$ $(0<y<\pi)$，则将 y 表示为 $\operatorname{arccot} x$，称 $y=\operatorname{arccot} x$ 为反余切函数，$y=\operatorname{arccot} x$的定义域为 $-\infty<x<+\infty$.

反三角函数是三角函数的反函数，它们的图像关于 $y=x$ 对称. 因此，我们可通过研究三角函数得到反三角函数的性质.

例如，$y=\arctan x$ 的图形如图 1.4 所示.

三角函数的和差化积公式：

$$\sin x+\sin y=2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

反三角函数的关系：

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

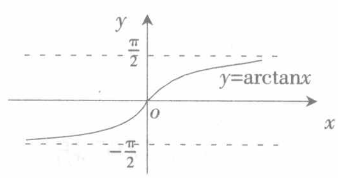

图 1.4

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}.$$

8．在经济学中常见的函数.

用数学方法解决经济问题，通常要建立经济问题的函数关系，简称建模.

（1）需求函数. 需求量 Q 可以看成价格 P 的函数，称为需求函数，记为 $Q=Q(P)$.

（2）供给函数. 一种商品的市场供给量 S 与该商品价格 P 有密切的关系. 供给量 S 可以看成价格 P 的函数，称为供给函数，记为 $S=S(P)$.

（3）成本函数. 一般来说，成本 C 与产品的销售量或产量 q 有密切的关系，可以把它看成产量的函数，记为 $C(q)$.

总成本由固定成本与变动成本构成，所以成本函数的一般表达式为

$$C(q)=C_0+C_1(q).$$

其中 C_0 为常数，称为固定成本；$C_1(q)$ 随 q 的变化而变化，称为变动成本.

常见的成本函数有平均成本：

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_0}{q}+\frac{C_1(q)}{q}.$$

（4）收益（销售收入）函数与利润函数.

收益函数. 商品的收益 R 依赖于商品的价格 P 和销售量 q ，其函数模型为

$$R=Pq.$$

利润函数. 根据“利润 = 收益 - 总成本”，可得到利润函数模型为

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

（5）指数函数模型. 指数函数模型的一般形式可表示为：

$$y=f(x)=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加，它常被用作复利计算和人口增长计算模型.

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，它常被用来建立由终值求现值和设备贬值计算的模型.

（6）复利模型. 所谓复利计息，就是将每期利息于每期之末加入该期本金，并以此为新本金再计算下期利息. 例如，某人在银行存现金 p 元，年利率 r，每年结算一次，利息仍留在存款中，n 年之后，其本利和为 $p(1+r)^n$.

（7）贴现模型. 某人有在 n 年之后到期的面值 p 元的票据到银行贴现，设贴现年利率 r，则这张票据的现值为 $\dfrac{1}{(1+r)^n}p$.

三、典型例题解析

例 1 设 $y=f(x)=2x^2-x+1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(x_0)$.

解 $y|_{x=0}=f(0)=2\times0^2-0+1=1$,

$y|_{x=1}=f(1)=2\times1^2-1+1=2$,

$y|_{x=x_0}=f(x_0)=2\times x_0^2-x_0+1=2x_0^2-x_0+1$.

例2 设$f(x+1)=x^2-3x$,求$f(x)$.

解 令$x+1=t$,则$x=t-1$,所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4,$$

即

$$f(x)=x^2-5x+4.$$

例3 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(4) $y=\lg(1-x^2)+\sqrt{x}$.

解 (1) 要使函数有意义,必须使$1-x\neq0$,即$x\neq1$. 因此,函数的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使$\sqrt{1-x^2}$有意义,必须使$1-x^2\geqslant0$,即$|x|\leqslant1$. 因此,函数的定义域是$[-1,1]$.

(3) 这是两个函数之和的定义域问题,先分别求出每个函数的定义域,然后求其公共部分即可. 使函数$\dfrac{1}{4-x^2}$有意义,必须满足$4-x^2\neq0$,即$x\neq\pm2$;使函数$\sqrt{x+2}$有意义,必须满足$x+2\geqslant0$,即$x\geqslant-2$. 因此,函数的定义域是$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(4) $\lg(1-x^2)$的定义域必须满足不等式$1-x^2>0$,解得$-1<x<1$;$\sqrt{x}$的定义域是$x\geqslant0$. 因此,函数的定义域是$[0,1)$.

例4 函数$y=x+1$与函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$是否为同一个函数?

解 函数$y=x+1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域为$x\neq1$,由于它们的定义域不同,所以这两个函数不是同一个函数.

关于函数的对应关系要注意:函数表达式$y=f(x)$中把x对应到$f(x)$,x可以是数值,也可以是变量,甚至是函数. 当x为函数$u(x)$时,$f[u(x)]$称为复合表达式.

例5 函数$f(x)=x^2$,当$x=2$时,$f(2)=2^2=4$;

当$x=w$时,$f(w)=w^2$;

当$x=3w^2+1$时,$f(3w^2+1)=(3w^2+1)^2$;

当$x=u(t)$时,$f[u(t)]=[u(t)]^2$.

例6 已知函数$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,求$f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}}=-\dfrac{1}{x}$.

例 7 判断函数 $y=2^x+1$ 的奇偶性.

解 $D=(-\infty,+\infty)$. 令 $f(x)=2^x+1$，则

$$f(-x)=2^{-x}+1\neq f(x),\quad f(-x)=2^{-x}+1\neq -f(x).$$

所以 $y=2^x+1$ 既非奇函数也非偶函数.

例 8 判断函数 $y=\log_2 x$ 的奇偶性.

解 $D=(0,+\infty)$，定义域非原点对称，所以该函数既非奇函数也非偶函数.

例 9 研究函数 $y=x^3$ 及 $y=-x^3$ 的单调性.

解 令 $f(x)=x^3$，对任意 x_1，x_2，如果 $x_1<x_2$，那么有 $x_1^3<x_2^3$，因此 $f(x_1)<f(x_2)$. 所以函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

令 $f(x)=-x^3$，对任意 x_1，x_2，如果 $x_1<x_2$，那么有 $-x_1^3>-x_2^3$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $f(x)=-x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

例 10 研究函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 令 $f(x)=x^2$.

对任意 x_1，x_2，如果 $0<x_1<x_2$，那么有 $x_1^2<x_2^2$，因此 $f(x_1)<f(x_2)$；所以函数 $y=x^2$ 在 $(0+\infty)$ 内单调增加；

对任意 x_1，x_2，如果 $x_1<x_2\leqslant 0$，那么有 $x_1^2>x_2^2$，因此 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少.

例 11 求函数 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x<0)$ 的反函数.

解 因为 $-1\leqslant x<0$，所以

$$0\leqslant\sqrt{1-x^2}<1,\quad 0<y\leqslant 1.$$

由 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ 解得： $x=-\sqrt{2y-y^2}$，

所以 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x<0)$ 的反函数是

$$y=-\sqrt{2x-x^2}\quad(0<x\leqslant 1).$$

例 12 某产品的总成本 y 万元与产量 x 台之间的函数关系式是

$$y=3000+20x-0.1x^2\quad(x\in[0,240]).$$

若每台产品的售价为 25 万元，则生产者不亏本的最低产量为多少？

解 生产者不亏本，即利润

$$L(q)=R(q)-C(q)\geqslant 0,$$

即 $R(q)\geqslant C(q)$，即

$$25x\geqslant 3000+20x-0.1x^2,$$
$$x^2+50x-30000\geqslant 0,$$

可解出 $x\geqslant 150$（$x\leqslant -200$ 舍去），即最低产量为 150 台.

例 13 某人在银行存现金 p 元，年利率 r，每年结算一次，利息仍留在存款中，问在 n 年之后，本利和是多少？

解 第一年后的本利和为 $p(1+r)$，