

2009

GCT

硕士专业学位研究生入学资格考试(GCT) 复习指南 数学

童武 编写

- 本书面向
- ✓ 工程硕士
 - ✓ 农业推广硕士
 - ✓ 兽医硕士
 - ✓ 风景园林硕士
 - ✓ 翻译硕士
 - ✓ 汉语国际教育硕士
 - ✓ 高校教师、中职教师在职攻读硕士学位
 - ✓ 其他新参加GCT的专业学位

(注意:以上参照的是学位办[2008]33号文件。

考生请随时关注学位办最新文件, 以应情况变化, 延误考试)



 中国人民大学出版社

硕士专业学位研究生入学资格
考试 (GCT) 复习指南

数 学

童 武 编写

中国人民大学出版社

• 北京 •

图书在版编目(CIP)数据

硕士专业学位研究生入学资格考试(GCT)复习指南. 数学/童武编写

北京: 中国人民大学出版社, 2009. 3

ISBN 978-7-300-10312-9

I. 硕…

II. 童…

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. 6643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 020930 号

硕士专业学位研究生入学资格考试(GCT)复习指南

数 学

童 武 编写

出版发行	中国人民大学出版社	邮政编码	100080
社 址	北京中关村大街 31 号		
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511398 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京东君印刷有限公司	版 次	2009 年 4 月第 1 版
规 格	185 mm×230 mm 16 开本	印 次	2009 年 4 月第 1 次印刷
印 张	25.5	定 价	39.00 元
字 数	505 000		

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

编写说明

GCT 试卷由四部分构成：语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。GCT 试卷满分 400 分，每部分占 100 分。考试时间为 3 个小时，每部分为 45 分钟。

数学基础能力的试题以数学基础知识为背景，重点考查考生的基本数学素养、对基本数学概念的理解，考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析解决问题的能力。数学基础能力测试共有五部分：算术、初等代数、几何与三角学、一元函数微积分学、线性代数。考试题目共 25 道，考试时间 45 分钟。

为了帮助广大考生在较短的时间内系统地备考，并顺利通过考试，我们精心编写了本书。

本书是广大专家智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。其中的每一道试题，既反映了 GCT 联考数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解 GCT 联考以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重、难点以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从容应试，获得高分。

不论是数学理论的建立，还是数学运算和逻辑推理，无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。考生应系统掌握大纲规定的基础知识，对大纲规定的内容进行梳理，形成知识网络。考生应在接触一定量的题型之后，头脑中留下的不是纷繁的题目，而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能，以及基本的数学思想和方法。

解题时既要考虑解题的通性通法，又要分析题目的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。考生复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。

参加本书编写的除了主编童武外，还有：郝显纯、刘爽、王德军、赵晓敏、范宏博、王新会、唐淑华、汪华、黄艳、李雪、黄丽平、连庆林等。清华大学和北京大学的部分专家和教授对本书的出版给予了大力的支持，在此一并表示感谢。

由于编写者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，衷心希望广大读者批评指正。

编 写 者

目 录

第一部分 算 术

第一章 算术	3
第一节 数的概念、性质和运算	3
第二节 比和比例	5
第三节 典型例题精解	6
第四节 考前练习与精解	9
练习题	9
参考答案与精解	11

第二部分 初等代数

第二章 数和代数式	17
第一节 实数	17
第二节 复数	18
第三节 代数式及其运算	20
第四节 典型例题精解	24
第五节 考前练习与精解	26
练习题	26
参考答案与精解	27
第三章 代数方程和方程组	30
第一节 基本考点精析	30
第二节 典型例题精解	32

第三节 考前练习与精解	36
练习题	36
参考答案与精解	37
第四章 集合、映射和函数	40
第一节 集合	40
第二节 映射和函数	41
第三节 典型例题精解	44
第四节 考前练习与精解	47
练习题	47
参考答案与精解	48
第五章 不等式	51
第一节 基本考点精析	51
第二节 典型例题精解	54
第三节 考前练习与精解	59
练习题	59
参考答案与精解	60
第六章 数列、数学归纳法	65
第一节 基本考点精析	65
第二节 典型例题精解	67
第三节 考前练习与精解	70
练习题	70
参考答案与精解	72
第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率	75
第一节 排列与组合	75
第二节 二项式定理	76
第三节 古典概率	77
第四节 典型例题精解	82
第五节 考前练习与精解	84
练习题	84
参考答案与精解	86

第三部分 几何与三角学

第八章 常见几何图形	91
第一节 常见平面几何图形	91
第二节 空间几何体	94
第三节 典型例题精解	95
第四节 考前练习与精解	98
练习题	98
参考答案与精解	100
第九章 三角学	104
第一节 三角函数	104
第二节 两角和与差的三角函数	109
第三节 反三角函数	109
第四节 解简单的三角方程	110
第五节 典型例题精解	111
第六节 考前练习与精解	114
练习题	114
参考答案与精解	116
第十章 平面解析几何	120
第一节 平面向量	120
第二节 直线及其方程	122
第三节 曲线和方程	124
第四节 典型例题精解	129
第五节 考前练习与精解	132
练习题	132
参考答案与精解	133

第四部分 一元函数微积分学

第十一章 极限与连续	141
第一节 函数	141

第二节	极限	144
第三节	函数的连续性	147
第四节	典型例题精解	149
第五节	考前练习与精解	152
	练习题	152
	参考答案与精解	154
第十二章	一元函数微分学	158
第一节	导数的概念	158
第二节	求导公式及运算法则	159
第三节	微分	166
第四节	中值定理与泰勒公式、洛必达法则	168
第五节	函数的增减性、极值和最值	173
第六节	曲线的凸凹、拐点和渐近线	174
第七节	典型例题精解	175
第八节	考前练习与精解	178
	练习题	178
	参考答案与精解	180
第十三章	一元函数积分学	184
第一节	不定积分的概念和简单的计算	184
第二节	定积分的概念及性质	193
第三节	定积分的公式与计算法	196
第四节	定积分的应用	198
第五节	典型例题精解	199
第六节	考前练习与精解	203
	练习题	203
	参考答案与精解	205

第五部分 线性代数

第十四章	行列式	211
第一节	行列式的概念和性质	211
第二节	行列式的计算	215

第三节 典型例题精解	216
第四节 考前练习与精解	219
练习题	219
参考答案与精解	222
第十五章 矩阵	227
第一节 矩阵的概念与运算	227
第二节 可逆矩阵的逆矩阵	231
第三节 矩阵的初等变换和初等矩阵	233
第四节 矩阵的秩	235
第五节 分块矩阵	237
第六节 典型例题精解	237
第七节 考前练习与精解	244
练习题	244
参考答案与精解	251
第十六章 向量	262
第一节 向量的概念与运算	262
第二节 向量的线性相关性	263
第三节 向量组的极大线性无关组和秩	265
第四节 典型例题精解	266
第五节 考前练习与精解	273
练习题	273
参考答案与精解	276
第十七章 线性方程组	282
第一节 线性方程组的基本概念	282
第二节 齐次线性方程组 $Ax=0$	284
第三节 非齐次线性方程组 $Ax=B$	286
第四节 典型例题精解	288
第五节 考前练习与精解	302
练习题	302
参考答案与精解	307

第十八章 矩阵的特征值和特征向量	315
第一节 特征值和特征向量的基本概念	315
第二节 矩阵的相似对角化的问题	317
第三节 重要公式与结论	318
第四节 典型例题精解	319
第五节 考前练习与精解	328
练习题	328
参考答案与精解	330

第六部分 模拟试题与解析

模拟试题(一)	339
模拟试题(一) 参考答案与解析	342
模拟试题(二)	348
模拟试题(二) 参考答案与解析	352

第七部分 真题与解析

2005 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题	361
2005 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	364
2006 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题	370
2006 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	373
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题	381
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	385
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题	390
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析	393

第一部分

算 术

第一章 算 术

第一节 数的概念、性质和运算

1. 自然数和整数

我们在数物体的时候,用来表示物体个数的 $1, 2, 3, \dots$ 叫做自然数。一个物体也没有,用 0 表示。 0 也是自然数,自然数是整数。

2. 分数和百分数

将单位“ 1 ”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数叫做分数。表示其中一份的数是这个分数的单位。分数有真分数、假分数、带分数等。把“ 1 ”平均分成多少份的数,称为分数的分母;表示取了多少份的数,称为分数的分子。

分子比分母小的分数称为真分数。如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

分子比分母大或者分子、分母相等的分数称为假分数。如 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{6}{5}$ 、 $\frac{2}{2}$ 。

一个整数和一个真分数合成的数,称为带分数。如 $2\frac{1}{3}$ 、 $4\frac{2}{5}$ 。

两个自然数相除,它的商可以用分数表示。如 $a/b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 。

两个数的比,也可用分数表示。如 $a:b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 。

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数。百分数也叫百分率或者百分比。百分数通常用“ $\%$ ”来表示。

3. 小数

把整数“ 1 ”平均分成 10 份, 100 份, $1\,000$ 份, $\dots$,这样的一份或几份是十分之几,百分之几,千分之几, $\dots$,它们可以用小数表示,小数分为有限小数、无限小数、循环小数等。小数的末尾添上“ 0 ”或者去掉“ 0 ”,小数的大小不变。循环小数是指一个小数的小数部分

从某一位起,一个数字或者几个数字依次不断地重复出现,这样的依次不断重复出现的数字,称为这个循环小数的循环节。

4. 数的整除

在整数除法中,当整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$,除得的商正好是整数而无余数时,则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a 。当 a 能被 b 整除时,也称 a 是 b 的倍数。 b 是 a 的约数。能被 2 整除的数称为偶数,通常也称为双数。不能被 2 整除的数称为奇数,通常也称为单数。

一个数的约数的个数是有限的,其中最小的约数是 1,最大的约数是它本身;一个数的倍数的个数是无限的,其中最小的倍数是它本身。几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数,所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。几个数公有的约数叫做这几个数的公约数,所有公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数。

一个数只有 1 和它本身两个约数,叫做质数(素数)。一个数,如果除了 1 和它本身,还有其他约数,叫做合数。公约数只有 1 的两个数,叫做互质(素)数。分子与分母互质的分数称为最简分数。

分数的分子和分母都乘以或者都除以相同的数(零除外),分数的大小不变。

5. 数的四则运算

(1) 加法

把两个数合并成一个数的运算称做加法。数的加法运算满足交换律和结合律,即

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \end{aligned}$$

(2) 减法

已知两个数的和与其中的一个加数,求另一个加数的运算,叫做减法,减法是加法的逆运算。

(3) 乘法

求几个相同加数的和的简便运算,叫做乘法。相乘的两个数叫做因数,乘得的数叫做积,数的乘法满足交换律、结合律和分配律,即有

$$\begin{aligned} a \times b &= b \times a, (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \\ (a + b) \times c &= a \times c + b \times c \end{aligned}$$

(4) 除法

已知两个因数的积与其中一个非零因数,求另一个因数的运算,叫做除法。已知的积叫做被除数,已知的一个非零因数叫做除数,求出的未知因数叫做商。

(5) 运算定律

① 加法交换律

$$a + b = b + a$$

② 加法结合律

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

③ 乘法交换律

$$a \times b = b \times a$$

④ 乘法结合律

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

⑤ 乘法分配律

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

(6) 运算性质

① 交换性质

$$a + b - c = a - c + b; a - b - c = a - c - b$$

$$a \times b \div c = a \div c \times b; a \div b \div c = a \div c \div b (b \neq 0, c \neq 0)$$

② 结合性质

$$a + b - c = a + (b - c) = a - (c - b)$$

$$a - b - c = a - (b + c)$$

$$a \times b \div c = a \times (b \div c) (c \neq 0)$$

$$a \div b \times c = a \div (b \div c) (b \neq 0, c \neq 0)$$

$$a \div b \div c = a \div (b \times c) (b \neq 0, c \neq 0)$$

(7) 四则混合运算

在四则运算中,加法和减法叫做第一级运算,乘法和除法叫做第二级运算,在一个没有括号的算式中,如果只含有同一级运算,要从左往右依次计算;如果含有两级运算,要先做第二级运算,后做第一级运算,在一个有括号的算式中,要先算小括号里面的,再算中括号里面的,等等。

第二节 比和比例

1. 比

两个数 a 与 b 相除称为 a 与 b 的比, 记为 $a:b$ 。 $a:b = \frac{a}{b}$, a 为比的前项, b 为比的后项, $\frac{a}{b}$ 为比值。

2. 比的性质

$$(1) a:b = k \Leftrightarrow a = kb$$

$$(2) a:b = ma:mb (m \neq 0)$$

3. 比例

两个相等的比称为比例, 记为 $a:b = c:d$, a, d 称为比例的外项, b, c 称为比例的内项, 也记为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

4. 比例的基本性质

$$(1) a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc$$

$$(2) a:b = c:d \Leftrightarrow d:b = c:a \Leftrightarrow a:c = b:d$$

$$(3) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$(4) \text{若 } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}, \text{ 即 } a:b:c = a_1:b_1:c_1, \text{ 则}$$

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

5. 正比例与反比例

若 $y = kx$ ($k \neq 0$, k 为常数), 则称 y 与 x 成正比, k 为比例系数。

若 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, k 为常数), 则称 y 与 x 成反比, k 为比例系数。

第三节 典型例题精解

例 1 a, b 都是质数, 且 $c = a \times b$, 则 c 一定是 ()。

(A) 质数 (B) 奇数 (C) 偶数 (D) 合数

答案: (D)

分析: a, b 都是质数, 所以 a, b 都不会是 1, 又因为 $c = a \times b$, 因此 c 至少有 3 个约数 1, a, c , 故 c 必为合数。

$$\text{例 2 计算 } 2\frac{2}{15} + 2.5 + 1\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12}$$

$$\text{分析: 原式} = 2\frac{2}{15} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12}$$

$$= 2 \frac{16}{120} + 2 \frac{60}{120} + 1 \frac{45}{120} - 1 \frac{50}{120} = 4 \frac{71}{120}.$$

例3 设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$, 则使 $x + y + z = 74$ 成立的 y 值为 ().

(A) 24

(B) 22

(C) 20

(D) 18

答案: (A)

分析: 由于 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$, 因此设 $\frac{1}{x} = 4t$, $\frac{1}{y} = 5t$, $\frac{1}{z} = 6t$, 则 $x = \frac{1}{4t}$, $y = \frac{1}{5t}$, $z = \frac{1}{6t}$, 代入 $x + y + z = 74$, 得

$$\frac{1}{4t} + \frac{1}{5t} + \frac{1}{6t} = 74, \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{t} = 74$$

$$\text{解得 } \frac{1}{t} = 120, y = \frac{1}{5t} = \frac{120}{5} = 24$$

故正确答案为 (A)。

例4 已知 a, b, c 是三个正整数, 且 $a > b > c$, 若 a, b, c 的算术平均值为 $\frac{14}{3}$, 几何平均值是 4, 且 b, c 之积恰为 a , 则 a, b, c 的值依次为 ().

(A) 8, 4, 2

(B) 6, 5, 3

(C) 12, 6, 2

(D) 4, 2, 8

答案: (A)

分析: 根据已知条件求解下列方程组

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} = \frac{14}{3} \\ \sqrt[3]{abc} = 4 \\ a = bc \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

但因已知 $a > b > c$, 故舍去后一组, 故正确答案为 (A)。

例5 把 $\frac{2}{5}$ 的分子加上 4, 要使分数大小不变, 分母则应变为 ().

(A) 5

(B) 9

(C) 10

(D) 15

答案: (D)

分析: 题中分数 $\frac{2}{5}$, 分子加上 4 后, 相当于分子变成原来的 3 倍, 根据分数的性质, 只有当分母也变成原来的 3 倍时, 原分数的大小才不会改变, 所以分母应为 15, 故选 (D)。

例6 一种货币贬值 15%, 一年后又增值百分之几才能保持原币值 ().

(A) 15.25%

(B) 16.78%

(C) 17.17%

(D) 17.65%