抽样检查的理论与方法

马海训
王维星 编著

中国农业出版社

序　　言

产品质量检验是国家、社会（广大消费者）或行业主管部门及企业自身对产品质量实施监督，从而促使产品质量符合标准的一种通用的重要技术手段。在科学技术和社会化大生产不断发展的今天，抽样检验已成为世界上质量检验的通用方式。早在20年代的美国贝尔电话研究所（H．F．Dodge和H．Gomig)就对统计抽样检查法进行了研究。到了40年代，美国就发表了MIL—STD—105D《计数抽样检查程序及表》。不久，日本、联邦德国又相继发布了抽样检验标准。1974年，国际标准化组织颁发了ISO2859—74《计数抽样检查程序》国际标准。1981年，我国颁布了GB2828—81《逐批检查计数抽样程序及抽样表》和GB2829—81《周期检查计数抽样程序及抽样表》两项国家标准。到目前为止包括GB10111—88《利用随机数骰子进行随机抽样的方法》在内，先后共颁布了8个这类标准。它们在我国的重要基础标准中，占有重要地位。

在我国现已颁发实行的《标准化法》中明确规定:“处理有关产品是否符合标准的争议，以……检验机构的检验数据为准。”那么，这里所指具有法律属性的“检验数据”就应当是贯彻执行这些抽样检验标准的结果。因此，认真贯彻抽样检验标准，就不单是重要的技术手段，而且是执法之所需。

抽样检验的基本出发点，就是从批量生产的产品中，按规则（抽样标准或有关规定）抽取少量单位产品作为样本，对样本进行逐个检查，以其检查结果，对批量产品的质量做出判断。这种方法是运用概率统计理论的“假设检验”原理，在预先规定质量保证值的情况下进行的一种科学的检验方法。它同任何一个科学

的实用方法一样，是随着科学和生产的发展而产生，也必然要随着科学和生产的发展而完善。特别是自从我国先后颁发几个抽样方法标准之后，这些标准不但指导了我国产品质量检验从抽样方法上走上了科学的轨道，因而获取了明显的社会经济效益。同时，也引起了社会有关方面的重视，在理论和应用等方面做进一步的研究和探讨。对于这些标准的广大执行者、使用部门来说，在其认真贯彻执行的同时，也渴求进一步了解这些抽样方法的理论依据，做到既要会用，又要弄懂，以求“既知其当然，又知其所以然”之快慰。这样，在执行中才能做到运用自如，使理论和实践相得益彰。

我国自发布GB2828—81《逐批检查计数抽样程序及抽样表》等国家标准以来，介绍这些标准的《册子》不少，但能从理论与标准的关系上，做出系统的较完整介绍的著述，还属少见。马海训、王维星两同志编著的《抽样检查的理论与方法》一书，是在他们多年学习、讲授和对实施贯彻标准以来，所遇到实际问题经分析研究的基础上而编就的。理论密切联系实际，由浅入深，介绍7个标准由粗而细，由一般到特殊。使读者阅后能针对具体的抽查任务熟练地确定应采取的抽样程序、步骤、方案和方法。该书是广大技术监督工作者，特别是在企业和事业单位中从事质量检验工作人员不可缺乏的一部学习、工作的良师益友。亦可做为举办《抽样标准讲座》的参考教材。对于从事外贸和商检工作者也不失有一定的参考价值。望能抽暇一读，定会有所裨益。

望这本书能在我国日益发展的技术监督事业中，发挥应有的作用。

汪 海 日

1990年7月23日

编 写 说 明

《抽样检查的理论与方法》一书是在国家标准 GB 6378—86，GB 2828～2829—87，GB 8051～8052～8053～8054—87等发布之后，为了宣传贯彻这些标准而编写的。

抽样检查是针对概率统计特殊的应用问题发展起来的一个学科，其理论基础是概率统计。

概率统计包括概率论和数理统计。概率论研究的是随机现象。随机现象又称作随机试验有三个特点：（1）试验在相同条件下，可以重复进行；（2）每次试验前无法确定试验的结果；（3）试验的所有可能结果是已知的。虽然一次随机试验的结果带有偶然性，但可以在相同条件下大量重复的随机试验却往往呈现出明显的数量规律性。概率论就是研究随机现象数量规律性的数学分支。

以概率论为基础的数理统计，内容庞杂，其基本思想之一是统计推断，即由部分（样本）推断整体（总体），并以高概率（如0.95，0.99等）作出判断。抽样检查则是统计推断的具体应用：对一批产品作抽查，以对整批产品作出接收或拒收的判断。

国家标准GB 6378—86，GB 2828～2829—87和GB 8051～8052～8053～8054—87等都是根据抽样检查的理论制订出来的。

《抽样检查的理论与方法》共有十六章。前四章介绍了概率论的基础知识：随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征和极限定理；第五章到第八章介绍了数理统计中与抽样检查密切相关的内容：抽样分布，参数估计，假设检验和抽

样调查方法；第九章到第十六章介绍了抽样检查的一般理论及七个国家标准的原理和使用方法，是全书的主要内容。

在《抽样检查的理论与方法》的编写上，注意做到有详有略详略结合。概率统计部分侧重介绍基础知识和基本方法，并精选了抽样检查方面的例题，简明概括，通俗易懂。抽样检查的一般理论及国家标准的统计原理和使用方法则进行了较详细的阐述，上述七个国家标准所使用的一些主要公式也都进行了必要的理论推导。

《抽样检查的理论与方法》一书由中国现场统计研究会副理事长、上海工业大学葛广平教授，河北省现场统计研究会常务理事、中国人民解放军军械工程学院昂盛炳副教授和全国统计方法标准化技术委员会抽样检查分委员会副主任委员、华东工学院秦士嘉副教授主审。在编写过程中得到了河北省标准计量局汪海日局长，郝振宇副局长，张树清副总工程师以及河北省标准计量情报研究所、河北经济管理干部学院基础部数学教研室的同志们的大力支持和热心指导，谨此一并致衷心感谢。

由于编者水平有限，时间短促，错误和不当之处在所难免，敬请批评指正。

编者

1990年7月

目　　录

第一章　随机事件及其概率……………………………………（1）
§1.1　随机事件及其概率的统计定义……………………（1）
§1.2　事件之间的关系和运算…………………………（4）
§1.3　古典概型……………………………………………（6）
§1.4　概率公理……………………………………………（8）
§1.5　概率的加法定理……………………………………（9）
§1.6　条件概率及乘法定理……………………………（10）
§1.7　事件的独立性……………………………………（12）
§1.8　全概率公式………………………………………（14）
§1.9　贝叶斯公式………………………………………（16）
第二章　随机变量及其分布…………………………………（18）
§2.1　随机变量及其分布………………………………（18）
§2.2　离散型随机变量…………………………………（21）
§2.3　连续型随机变量…………………………………（28）
§2.4　随机变量函数的分布……………………………（38）
第三章　随机变量的数字特征………………………………（43）
§3.1　随机变量的数学期望……………………………（43）
§3.2　随机变量的方差…………………………………（49）
第四章　极限定理……………………………………………（56）
§4.1　大数定理…………………………………………（56）
§4.2　中心极限定理……………………………………（60）
第五章　抽样分布……………………………………………（63）

§5．1　总体、样本和统计量……………………………（63）
§5．2　几种常见统计量的分布…………………………（66）
第六章　参数估计………………………………………………（76）
§6．1　估计量及其评价问题……………………………（76）
§6．2　最大似然估计………………………………………（79）
§6．3　区间估计……………………………………………（84）
第七章　假设检验………………………………………………（92）
§7．1　一个正态总体的假设检验………………………（93）
§7．2　两个正态总体的假设检验………………………（98）
§7．3　总体分布的假设检验…………………………（106）
第八章　抽样调查方法……………………………………（110）
§8．1　简单随机抽样……………………………………（110）
§8．2　分层随机抽样……………………………………（116）
§8．3　整群随机抽样……………………………………（123）
§8．4　系统抽样…………………………………………（128）
第九章　抽样检查的原理…………………………………（135）
§9．1　概述………………………………………………（135）
§9．2　计数抽样检查的基本原理………………………（140）
§9．3　标准型一次计数抽样方案的制订………………（153）
第十章　国家标准GB2828—87的原理和使用方法……（161）
§10．1　概述GB2828—87 ……………………………（161）
§10．2　GB2828—87的主要特点………………………（167）
§10．3　抽样表的结构和特点……………………………（172）
§10．4　一次抽样方案的制订……………………………（175）
§10．5　二次抽样检查和五次抽样检查…………………（180）
第十一章　国家标准GB2829—87简介……………………（191）
§11.1　引言………………………………………………（191）
§11．2　GB2829—87的主要特点和使用范围 …………（193）
§11．3　不合格质量水平RQL …………………………（195）

§11．4　判别水平……………………………………………(198)
§11．5　判定数组……………………………………………(199)
§11．6　GB2829—87抽样方案的检索…………………(201)
§11．7　周期检查后的处置……………………………(205)
§11．8　周期检查的例题………………………………(206)
第十二章　国家标准GB8051—87的原理和使用方法……(209)
§12．1　序贯抽样检查的原理…………………………(209)
§12．2　序贯抽样方案的制订和实施方法……………(221)
第十三章　国家标准GB8052—87的原理和使用方法……(234)
§13．1　概述GB8052—87……………………………(234)
§13．2　CSP—1方案的数学原理和使用方法　……(236)
§13．3　CSP—2方案…………………………………(246)
§13．4　CSP—T方案…………………………………(250)
第十四章　国家标准GB8054—87的原理和使用方法……(253)
§14．1　概述计量抽样检查……………………………(253)
§14．2　GB8054—87的原理…………………………(259)
§14．3　GB8054—87抽样检查的实施………………(280)
第十五章　国家标准GB8053—87的原理和使用方法……(286)
§15．1　GB8053—87的原理…………………………(286)
§15．2　GB8053—87抽样检查的实施………………(304)
第十六章　国家标准GB6378—86简介……………………(311)
§16．1　GB6378—86抽样方案制订的基本原理……(311)
§16．2　GB6378—86的图解法………………………(315)
§16．3　抽样方案组的选取……………………………(323)
§16．4　抽样方案的检索和判断………………………(329)
附录………………………………………………………(344)
附录1　概率论与数理统计附表……………………(344)
附录2　GB2828—87附表…………………………(358)
附录3　GB2829—87附表…………………………(373)

附录 4　GB8051—87附表……………………………………(385)
附录 5　GB8052—87附表……………………………………(392)
附录 6　GB8054—87附表……………………………………(397)
附录 7　GB8053—87附表……………………………………(399)
附录 8　GB6378—86附表……………………………………(401)
参考文献……………………………………………………………(406)

第一章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会中，存在着大量的随机现象。为了研究随机现象，本章给出随机事件和随机事件概率的概念及随机事件概率的计算方法。

§1．1　随机事件及其概率的统计定义

所谓事件，通俗地讲就是一件事情。不难发现，事件可分为三类：

（1）必然事件　在一组条件下必然发生的事件，称为必然事件。比如，从一批不合格品率为0的产品中任取一件是合格品的事件是必然事件。

（2）不可能事件　在一组条件下必然不发生的事件称为不可能事件。比如不改变上面例子中的条件，将事件改为任取一件是不合格品则为不可能事件。

必然事件和不可能事件统称为确定性事件。在一组条件下，某个事件是必然事件，那么在同样条件下这个事件的“反面”就是不可能事件；反过来也一样。

（3）随机事件　首先看这样的例子：抛掷一枚硬币，假设此硬币是均匀的，问“正面向上”这个事件是否发生？我们发现在抛掷之前是没有办法知道这个事件是否发生的，只有在抛掷之后，才能知道这个事件是否发生了。通常把这种在一组条件下可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。随机事件的例子很多，比

如：

从十件产品中（其中八件合格品，两件不合格品），任意抽取一件恰为合格品的事件是随机事件；从批量为N的一批产品中任意抽取n个产品，不合格品的个数d 小于预先给定的判定数c的事件是一个随机事件。

为了研究问题方便，用大写拉丁字母A、B、C……表示随机事件，并约定必然事件用U表示，不可能事件用V表示。

在一组条件下，一个随机事件发生的可能性有多大？有没有规律？人们经过长期实践发现，虽然在一次随机试验中发生某个事件是带有偶然性的，但那些可以在同一组条件下大量重复的随机试验却往往呈现出明显的数量规律性。比如多次抛掷一枚均匀的硬币发现正面向上和正面向下发生的次数相差不多，或者说二者发生的频率都接近50％。历史上蒲丰和皮尔逊等人做过大量的试验（见表1·1）从中发现，随着试验次数的增多，频率越来越清楚地呈现出稳定性来，而且不论是谁去进行这种试验，只要试验是在同一组条件下进行的，这种频率的稳定性就不会改变。这说明随机事件发生的可能性的大小，是随机事件本身所固有的不随人们主观意愿而改变的一种属性。

表1·1

实验者	抛掷次数	正面向上次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

正因为随机事件具有这种属性，经过多次抽象，人们用一个非负实数来刻划随机事件发生可能性的大小，这个实数称作这个随机事件的概率。

定义 一个随机事件发生的频率稳定于某一个常数，这个常数称为这个随机事件的概率，记作：$\mathbf{P}(\mathbf{A})$。

这个定义一般称作随机事件概率的统计定义。

由于频率总在 0，1 之间，因此概率具有如下性质：

$$0 \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq 1$$

为了研究问题方便，约定：

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}) = 1, \qquad \mathbf{P}(\mathbf{V}) = 0$$

这样，必然事件可以看作是概率为 1 的随机事件，不可能事件可以看作是概率为 0 的随机事件。因此，所有的事件都可以看作是随机事件。以后，随机事件简称事件。

由定义可知，若 $\mathbf{A}$ 表示抛掷一枚均匀硬币“正面向上”这一事件，则 $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}$。

因为频率的大小，是说明随机事件发生可能性的大小的，而概率又是频率稳定于的常数，所以概率大小反映了随机事件发生可能性的大小。

对于概率的统计定义，要特别注意“稳定于”三个字，它是说随着试验次数的增多，频率有越来越接近某一常数的趋势，但这并不排斥个别的使随机事件发生的频率远离这个常数的情形。在历史上曾有人错误地把概率定义为频率的极限，我们在学习中要避免产生这种错误的理解。

概率的统计定义具有普遍性，对任何随机事件，都可以用做试验的方法确定其概率。但必须做大量的试验，而且即使做了大量的试验，往往也很难把这个常数（概率）确定下来。这正是概率的统计定义的不足之处。

§1．2　事件之间的关系和运算

以后会经常遇到这样的情形：在一组条件下，有许多个事件，而且这些事件间又有一定的联系。因此，有必要研究一下事件之间的关系，进而找到它们的概率之间的关系。事件之间的关系和运算，与集合论中集合之间的关系和运算完全相似。不过应该注意，要用概率论的语言来叙述和解释这些关系和运算。

(1)事件的包含与相等

设有事件**A**和**B**，如果**A**发生，**B**必发生，则称事件**B**包含事件**A**，并记作：

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad 或 \quad \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$$

如图 1·1 所示，

如果事件**A**包含事件**B**，同时事件**B**包含事件**A**，则称事件**A**与**B**相等，记作：

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

如图 1·2 所示。

（2）事件的和

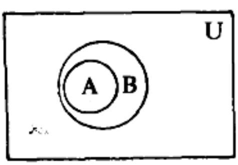

图1.1

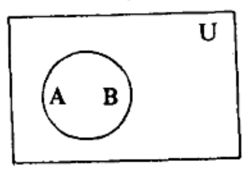

图1.2

定义　事件**A**与事件**B**至少有一个发生的事件，称做事件**A**与事件**B**的和，记作：

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

如图1.3 所示。

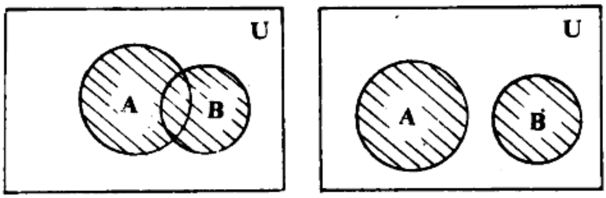

图1.3

例 1　从批量为100 的一批产品中任意抽取10件产品，其中不合格品个数 $d \leqslant 1$ 的事件是 $d = 0$ 的事件与 $d = 1$ 的事件的和。

（3）事件的积

定义　事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称做事件 A 与事件 B 的积，记作：

$$A \cdot B$$

如图1.4 所示

（4）对立事件

定义　如果 $A + B = U$，且 $A \cdot B = V$，则称 A 是 B 的对立事件，记作：$A = \bar{B}$。此时 B 也是 A 的对立事件，即 $B = \bar{A}$。如图1.5 所示

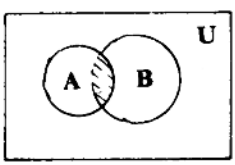

图1.4

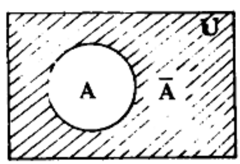

图1.5

由对立事件定义，不难看出：$\bar{\bar{A}} = A$

例 2 对于任意事件A和B都有

（1） $A+B=A+B\overline{A}$

（2） $B=AB+B\overline{A}$

例 3 从批量为100 的一批产品中任意抽取10件产品，其中不合格品的个数“$d\leqslant 2$”的事件A与“$d>2$”的事件B是对立事件。

（5）互不相容事件

定义 若$A\cdot B=V$，则称A与B为互不相容事件。显然A与$\overline{A}$为互不相容事件。

例 4 从批量为100 的一批产品中任意抽取10件产品，其中不合格品个数恰为1的事件A与不合格品个数恰为2的事件B是互不相容事件，但A与B不是对立事件。

（6）完备事件组

事件A_1，A_2，…，A_n，构成完备事件组，是指：

① $A_iA_j=V \quad (i\neq j)$

② $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$

事件的运算还满足类似于集合运算的定律，诸如交换律、结合律、分配律等，限于篇幅此处从略。

§1.3　古典概型

在§1.1 中由随机事件的频率的稳定性引出了概率的统计定义。它同时又提供了计算概率的一般方法。但按照这个定义，求概率就得做大量试验，而且还很难把频率稳定于的常数，即概率确定下来。在长期实践中人们发现其中有些随机事件，具有自己的特殊性，完全可以把它归结成一些模型，然后利用模型本身所具有的特点，直接计算出事件的概率。本节将介绍一类最简单又最常见的模型—— 等可能模型又称古典概型。

为了研究古典概型，有必要对随机事件做进一步的探讨。在许许多多的随机事件中，我们发现它们并不完全一样，其中有的“简单”，有的“复杂”。比如，§1．2例1事件$d=0$和事件$d=1$比较“简单”，而事件$d\leqslant 1$比较“复杂”。因为事件$d\leqslant 1$还能进行“分割”，它能“分割”成不能再“分割”的事件$d=0$和事件$d=1$。像事件$d=0$和事件$d=1$这样的不能再“分割”的事件叫做基本事件。一般的，把随机试验的每一可能结果叫做基本事件。例如，4件产品其中两件正品（记作正$_1$，正$_2$），两件次品（记作次$_1$，次$_2$），任意抽取2件，显然共有$C_4^2=6$种可能的结果，即6个基本事件。它们是

正$_1$正$_2$，　正$_1$次$_1$，　正$_1$次$_2$

正$_2$次$_1$，　正$_2$次$_2$，　次$_1$次$_2$

弄清了基本事件的含义，就可以讨论古典概型了。这种概型的特点是：

（1）随机试验中所有基本事件的总数是有限的；

（2）每个基本事件发生的可能性是相等的。

例如，投掷一枚均匀硬币的试验符合古典概型的特点。因为基本事件只有2个：A（表示“正面向上”的事件）和B（表示“正面向下”的事件）；由于硬币均匀，因而A和B发生的可能性相等。在§1．1已讨论过$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$。

又如，在前面例子中的试验也符合古典概型的特点。基本事件的总数共6个；而且由于是任意抽取的，因而每个基本事件发生的可能性相等。如果仍用A表示次品的个数$\leqslant 1$的事件。现在要问$P(A)=$？我们会脱口而出：$P(A)=\frac{5}{6}$。不难看出，分子中的5恰好是事件A包含的基本事件的个数，而分母中的6恰好是这个试验中基本事件的总数。一般地：

定义　设某一随机试验的所有基本事件的总数是有限的，并且每个基本事件发生的可能性相等；若事件A所包含的基本事件

的个数为M，基本事件的总数为N，则事件A的概率为

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

这个定义在1812年首先由法国数学家拉普拉斯给出。现在通常称为概率的古典定义。

例　有10件产品（其中8件合格品，2件不合格品）任意抽取2件产品，A表示抽取的2件产品中恰有1件不合格品的事件。试求P（A）。

解　由题设基本事件的总数为C_{10}^2，又事件A包含基本事件的个数为：$C_8^1C_2^1$，因此：

$$P(A)=\frac{C_8^1\ C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

由这个例子，不难推广到一般情形，即：

有N件产品，其中有M件不合格品（N－M件合格品），从中任取n件产品恰有k件不合格品的概率为：

$$p=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

§1．4　概率公理

概率的统计定义，把频率稳定于的常数叫做这个事件的概率。求概率就要做很多试验，而且试验应该多到什么样的程度，所谓的“稳定于”又怎样理解都没有确切的解释。而古典概率的定义，又仅仅对古典概型才适用，具有很大的局限性。为了克服这些缺点，并使概率论成为严谨的数学分支，经过概率论发展的漫长的历史，到1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率论的公理化