线性几何讲义

杨文茂 编

武汉大学数学系

1985.4.

目　　录

85—1111

引　　言

所谓某一种几何学(M, G)是指研究底空间M中的图形$C(\subset M)$在作用于M的变换群G下不变几何性质的学科。图形C是M中点构成的集合，变换$\varphi \in G$是作用于M上的点变换

$$\varphi: M \to M;\quad M \ni m \longmapsto m' = \varphi(m) \in M.$$

经典的几何学，如欧氏几何E^n，仿射几何A^n或射影几何P^n，$n=1, 2, 3$，所讨论的内容多与线性概念联系在一起，主要有如下几方面：

（1） 底空间M常与某个线性空间有关，如欧氏空间E^n与仿射空间A^n可以从n维实线性空间R^n通过定位向量确定点，引入欧氏度量等而得到。而射影空间P^n可以从$n+1$维实线性空间R^{n+1}通过等价关系给出，即$P^n = (R^{n+1} - \{0\})/\sim$。

（2） 研究的对象——图形，如点P，直线L，平面π，它们都可以视为线性平移子空间——各种维数的“平面”。

（3） 研究的内容，如射影空间中的结合关系$x \cdot \xi = 0$（x表示点，ξ表示直线或平面），无论对于x还是ξ都是线性的。又如欧氏空间中讨论的内积$\langle x, y\rangle$无论对于x还是y也都是线性的。

（4） 研究的变换群G多是与全线性群$Gl(n, R)$有关的群或其子群，如欧氏度量群（或正交群）就是全线性群中满

足正交条件的子群。又如射影变换群在非齐次坐标表示时，其中的变换并非线性，而是分子分母都为一次的分式。但如果换为齐次坐标表示时，却也是线性的。不过这时齐次坐标的个数比空间维数增加一个。

也许有人提出异议说，经典几何中还研究了二次曲线与二次曲面，它们的方程并非线性。但是，按二次曲线的射影定义，它是两个线束（线性图形！）在射影对应下对应线交点的轨迹，因此我们可视二次曲线为线性的产物。关于二次曲面也有类似结果。

如果解脱线性的约束，向各种非线性方面发展，得到各种几何学。如微分几何研究的是一般曲线与曲面，当然是对经典几何的推广。目前称之为“线性几何”的一门学科是在保持线性概念前提下对经典几何向各方面的推广。在某种意义下讲，线性几何又可理解为对线性代数与线性群的理论赋于几何语言和几何内容的一门学科。这里所说各种推广主要有如下几方面：

（1） 底空间 M 从一，二，三维向高维 n 发展，即讨论一般与 n 维向量空间 R^n 有关的几何学。基域也不限于实数域 R，而可以涉及复数域 C 或一般域 F。

（2） 研究的对象是高维空间 M 中的各维线性平移子空间——平面 A^k，$k=0, 1, \cdots, n-1$。如讨论两个平面 A^k 与 A^l 的相互关系。

（3） 研究的内容有各种形式的推广。如结合关系，在 n 维射影空间 P^n 中，我们就可以定义 A^k 与 B^{n-1-k} 的结合关系，它们的维数和是 $n-1$。这正是在 P^2 中点与线的结合或在 P^3 中点与面的结合的自然推广。又如内积 $\langle x, y\rangle$ 关于 x，y 的对称性是欧氏内积的条件之一，我们也可以讨论具

有反称性

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 0。$$

的辛内积，从而得到辛几何。

（4） 研究的变换群 G 可以是全线性群的各种子群或与它有关的群，如辛群，厄尔米群等等。

关于线性几何的主要参考书计有：

[1] K. W. Gruenberg, A. J. Weir
Linear Geometry 2-Edition 1977
（有江苏师院唐起汉的油印中译本 1981）

[2] 黄用诹（香港大学）
Linear Geometry of 4-dim Euclidean spaces 1977
（有中山大学黄树棠、杨淦的油印中译本 1980）

[3] A. Doneddu
Espaces Euclidiens et Hermitiens Geometries 2-Edition 1980 法国出版的《新数学教程》中第3卷
（据所知，上海科技出版社已组稿准备出版《新数学教程》第1—6卷中译本）

[4] R. Artzy Linear Geometry
（有兰州大学赵继游的油印中译本 1984）

[5] H. Weyl Classical Groups

第一章 线 性 几 何

本章主要介绍线性几何中各种必要的代数知识，如群、域、向量空间、线性型、双线性空间、线性映射、线性群等，最后给出线性几何的定义。

§1 群、域与向量空间

1.1 群

定义1.1 设 G 是一个集合，有一个映射 φ 使笛卡尔积 $G\times G$ 映到 G：

$$\varphi: G\times G \longrightarrow G,\ (a,\ b) \longmapsto \varphi(a,\ b) \equiv ab \in G,$$

$$a,\ b \in G,\ (a,\ b) \in G\times G$$

若满足下列条件，则称 G 为**群**，φ 称为**乘法**，元素 ab 为 a 与 b 的**乘积**，

（1） 结合律，$(ab)c = a(bc)$；

（2） 存在单位元（么元）e，$\forall a \in G$，$ae = ea = a$；

（3） 存在逆元，$\forall a \in G$，$\exists$ 唯一的 a^{-1}，称为 a 的**逆元**，有

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e。$$

定义1.2 设 $\forall a,\ b \in G$，有 $ab = ba$，称 G 为**互换群**或 Abel 群。

附注 在定义群的术语中，有时将“乘”，“积”“单

85—1111

位元”，“逆元”分别用“加”，“和”，“零元”，“负元”代替，如同数的乘法运算的一套术语换为数的加法运算的相应术语一样。后者多采用于互换群，采用两套不同术语的群分别称为**乘群**和**加群**。

例 1 整数集 $\boldsymbol{Z}$ 关于加法成一可换群。

例 2 有理数集 $\boldsymbol{Q}$，实数集 $\boldsymbol{R}$，复数集 $\boldsymbol{D}$ 关于加法成可换群。这些集合中去掉零得到的集合 $\boldsymbol{Q}-\{0\}$，$\boldsymbol{R}-\{0\}$，$\boldsymbol{C}-\{0\}$关于乘法也成可换群。

例 3 集合 $S=\{1,2,\cdots,k\}$的所有置换

$$G=\{\sigma\},\ \sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\cdots\sigma(k))$$

构成一个含 $k!$ 个元素的乘群，这是一个有限群。

例 4 平面上的等距变换群 M，其中变换

$$\varphi:\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta+x_0 \\ y'=\pm(x\sin\theta+y\cos\theta+y_0). \end{cases} \tag{1}$$

此变换的系数行列式为±1。当以上第二式取正号，得正常（或第一类）变换，取负号得反常（或第二类）变换，这两类变换所成的集合分别记为 M_+，M_-，显然 M_+是 M 的子群，但 M_-不是 M 的子群，这是由于两个第二类变换的乘积是第一类变换，而不是第二类的。

定义 1.3 设群 G 的子集 $H(\subset G)$ 关于映射 φ 也满足定义1.1 的条件（换其中 G 为 H），称 H 为 G 的**子群**。

显然子群 H 的子群 $K(\subset H)$仍是 G 的子群。

定义 1.4 设 H 为 G 的子群，对于每一个 $g\in G$，集合

$$gH=\{gh|h\in H\},\ Hg=\{hg|h\in H\}$$

分别称为关于子群 H 的**左**或**右旁集**。

定理 1.4 设 H 为 G 的子群，关于 H 的两个左（或右）旁集 aH 与 bH（或 Ha 与 Hb）或是重合，或是无公共元素，即

$$aH = bH \text{ 或 } (aH)\cap(bH)=\phi \ .$$

证 若 $(aH)\cap(bH)\neq\psi$，存在 $c\in aH$ 且 $c\in bH$，于是 $c=ah=bk(h,\ k\in H)$，从而 $b=ahk^{-1}=ak'$，其中 $k'=hk^{-1}\in H$，故 $b\in aH$。对于任意 $h'\in H$，有 $bh'\in aH$，于是 $bH\subset aH$。另一方面，又可得 $aH\subset bH$，于是 $aH=bH$。▌

定理 1.5 设 H 为 G 的子群，则

$$a,\ b\in cH\ (\text{或 } Hc\ ) \longleftrightarrow a^{-1}b\in H\ (\ ab^{-1}\in H\ )$$

即两个元素 a 与 b 属于同一左旁集的条件是 $a^{-1}b$ 是 H 中元素。

例 在例 4 中给出的平面上等距群

$$M = M_+ \cup M_-$$

由两类等距变换构成，而第一类等距变换所成集合 M_+ 为子群，但第二类等距变换所成集合 M_- 则是关于 M_+ 的左旁集。事实上，我们取 M 中一个变换

$$\alpha:\ \begin{cases} x' = x \\ y' = -y, \end{cases} \qquad (2)$$

它是关于 Ox 轴的一个反射，且 $\alpha\in M_-$，如果记 φ_+ 与 φ_- 分别表示(1)中第二式取“+”与“-”号的变换，于是有 $\varphi_{-1}=\alpha\varphi_+$，从而 $M_-=\alpha M_+$，这样一来，M_{-1} 是关于 M_+ 与

元素 α 的左旁集。

1.2 域

定义 1.6 设 F 是一个集合，有两个映射 φ 与 ψ 使笛卡尔积 $F\times F$ 映到 F：

$$\varphi,\ \psi: F\times F \longrightarrow F,\ a,\ b\in F,\ (a,\ b)\in F\times F$$

$$\varphi(a,\ b)\equiv ab\in F,\ \psi(a,\ b)\equiv a+b\in F,$$

若满足下列条件，则称 F 为**域**（或**体**），φ 称为**乘法**，ψ 称为**加法**，ab 与 $a+b$ 分别为 a 与 b 的**积**与**和**。

（1） 分配律 $\forall a,\ b,\ c\in F$，

$$b(a+b)=ca+cb,\ (a+b)c=ac+bc;$$

（2） F 关于加法成一个可换群；

（3） $F-\{0\}$关于乘法成一个可换群，其中0是加法的么元。

例 有理数集 $\boldsymbol{Q}$，实数集 $\boldsymbol{R}$，复数集 $\boldsymbol{C}$ 都是域，称为**数域**。

域中元素具有加法与乘法两个运算，关于这两个运算的么元分别记为0与 e，如果有满足

$$\underbrace{e+\cdots+e}_{p\text{个}e}=0$$

的最小正整数 p，称 p 为域的**特征**。我们不讨论特征 $p=2$ 的域。

例 由四个元素组成的集合

$$F=\{0,\ 1,\ x,\ 1+x\}$$

按下列加法与乘法表进行运算，

+	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

×	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

易于验证，F 构成一个特征为2的有限域。

1.3 向量空间

定义 1.7 设 V 是一个集合，F 是一个域，有两个映射分别使

$\varphi: V\times V \longrightarrow V$，$\varphi(a, b)\equiv a+b\in V$，$\forall a, b\in V$，

$\psi: F\times V \longrightarrow V$，$\psi(\lambda a)\equiv \lambda a\equiv a\lambda\in V$，$\forall \in V$，$\lambda\in F$

若满足下列条件，则称 V 为域 F 上的**向量空间**或**线性空间**，φ 称为**加法**，ψ 称为**数乘**，统称为**线性运算**。称 V 中元素为**向量**，F 虽不一定是数域，但它的元素仍称为**数**或**纯量**。

（1） V 关于加法成一个可换群；

（2） 分配律 $\forall \lambda, \mu\in F$，$a, b\in V$，

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b, \quad (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a;$$

（3） 结合律 $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)$；

（4） 对幺元 $e\in F$， $\forall a\in V$，有 $ea=ea=a$。

我们分别记 F，V 中零元为 0_F 与 0_V，容易证明：

$$\lambda 0_V = 0_V \qquad (\forall \lambda\in F) \tag{3}$$

$$0_F a = 0_V \qquad (\forall a\in V) \tag{4}$$

由此可见可以不加区别地记 $0=0_F=0_V$。

例 1 设 F 是一个域，记集合

$$F^n=\{x=(x^1,\ \cdots,\ x^n)\,|\,x^i\in F,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$$

对 F^n 定义加法与数乘：

$$(x^1,\ \cdots,\ x^n)+(y^1,\ \cdots,\ y^n)=(x^1+y^1,\ \cdots,\ x^n+y^n),$$

$$\lambda(x^1,\ \cdots,\ x^n)=(\lambda x^1,\ \cdots,\ \lambda x^n),\ \lambda\in F.$$

关于上述运算易证 F^n 成一向量空间，称 F^n 为域 F 上的 n 元**向量空间**。

这是域 F 上的最重要的向量空间。如同线性代数中已证，任意 n 维的实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间同构于 n 数组空间 $\boldsymbol{R}^n$，下面也将证明何意 n 维的域 F 上的向量空间"同构"于 F^n。

例 2 当 F 取数域 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$，得到实数域或复数域上的向量空间。

我们将限于讨论有限维向量空间，因此还给出关于维数的定义。

定义 1.8 设在向量空间 V 中存在一组向量 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 使得 $\forall x\in V$，可唯一地表示成

$$x=\sum_{i=1}^{n}x^i e_i\equiv x^i e_i \tag{5}$$

我们称 V 是 n **维的**，记为 V^n，或 $\dim V = n$。（5）式右边已采用了求和记号的 Einstein 约定，即当同一项中出现上、下相同两指标时表示对它求和。

1.4 向量的坐标

定义 1.9 向量空间 V 中向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 称为**线性无关**的，如果

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^i x_i = 0,\ \lambda^i \in F,\ \longrightarrow \lambda^i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, k),$$

否则称组是**线性相关**的。

定义 1.10 n 维向量空间 V 中任意 n 个线性无关的向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，记为 $\{e_i\}$，称为 V 的一个**基**或**标形**，任意向量 x 表示为

$$x = x_i e^i, \tag{6}$$

称 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 为 x 在这基中的**坐标**。

如果记基与坐标分别为

$$e = (e_1, e_2, \cdots, e_n),\quad \hat{x} = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

于是（6）改写为

$$x = \hat{x}\, e^T, \tag{6$'$}$$

其中上指标"T"表示矩阵的转置。

在基的变换下同一向量的坐标如何变换？有如下定理。

定理 1.11 设 V 中两基 $\{e_i\}$ 与 $\{e'_i\}$ 之间基向量变换式为

$$e' = eA,\quad e'_i = a_i^j e_j, \tag{7}$$

$$A=(a_i^j)=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},\ \det A\neq 0$$

则同一向量在两系中的坐标变换式为

$$\hat{x}=\hat{x}'A^T;\quad x^i=a_j^i x'^j \tag{8}$$

$$\hat{x}'=\hat{x}(A^{-1})^T,\quad x'^j=\tilde{a}_j^i x^j$$

其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵，$A^{-1}=(\tilde{a}_j^i)$，有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E,\quad a_k^i\tilde{a}_j^k=\tilde{a}_k^i a_j^k=\delta_j^i \tag{9}$$

证　按定义

$$x=\hat{x}e^T=\hat{x}'e'^T$$

将(7)代入上式右边，得

$$\hat{x}e^T=\hat{x}'(eA)^T=(\hat{x}'A^T)e^T,$$

由于 e 是基，从上式得 $\hat{x}=\hat{x}'A^T$，即(8)式。▌

1.5 向量空间的同构

为了说明域 F 上任意 n 维向量空间 V^n 与 F^n 是"同构的"，我们给出如下定义。

定义 1.12 设域 F 上两个向量空间 V 与 V' 之间有一映射

$$\rho: V\longrightarrow V',\quad V\ni x\longmapsto \rho(x)=x'\in V',$$

且 ρ 满足条件

（1）　$\rho(x+y)=\rho(x)+\rho(y)$，$\forall x, y\in V$

（2）　$\rho(\lambda x)=\lambda\rho(x)$，$\forall \lambda\in F$，$x\in V$　　(10)

称 ρ 为 V 到 V' 的**同态**。条件(1)与(2)表明 ρ 保持向量的线性关系不变。

定义 1.13 如果同态 $\rho: V \to V'$ 是 V 到 V' 的双射，，即 ρ 既是一一对应，且又是满射（$\rho(V)=V'$），称 ρ 是 V 到 V' 的**同构**。两个向量空间之间如果存在一个同构映射，则称它们是**同构的向量空间**。

下列几个定理告诉我们同构的向量空间之唯一特征是它们具有相同的维数。

定理 1.14 域 F 上的任意 n 维向量空间 V 与 F^n 同构。

证 设 V 的基是$\{e_i\}$，任意 $x=\hat{x}e^{\mathrm{T}}\in V$，作映射

$$\rho: V \longrightarrow F^n,\ x \longmapsto \rho(x)=\hat{x}\in F^n$$

易知 ρ 是一一对应的满射，且保持 V 上线性运算即(10)成立，因此 V 与 F^n 同构。▌

由于同构概念具有传递性，因此可得

推论 1.15 同一域上的任意两个同维数向量空间互相同构。

推论1.15之逆也真，即

定理 1.16 如果向量空间 V 与 V' 同构，则它们的维数相同。

练　　习

1． E^2 或 E^3 中旋转群是否为可换群？

2． 证明置换群 G(见例 3)当 $k>2$ 不是可换群。

3． 证明

(1) $(a^{-1})^{-1}=a$;

（2） $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$；

（3） $ac=bc$ 或 $ca=cb$，则$a=b$。

4. 证明定理1.5。

5. 如果群G关于子群H的左旁集共有有限多个，证明右旁集也恰有这么多个。

6. 证明关于向量空间零元的（3）与（4）式。

7. 证明推论1.15。

8. 证明定理1.16。

9） 设$M^{n\times n}$是域F上元素构成的$n\times n$阶方阵：

$$M^{n\times n}=\{A\mid A=(a_{ij}),\ a_{ij}\in F\}$$

证明（1）在$M^{n\times n}$中定义$A+B$与λA为加法与数乘运算，则$M^{n\times n}$构成向量空间；

（2） $\dim M^{n\times n}=n^2$，并求$M^{n\times n}$的一组基。

10. 证$\boldsymbol{Q}$为有理数的集合，证明

（1） 实数域$\boldsymbol{R}$是域$\boldsymbol{Q}$上的向量空间；

（2） 复数域$\boldsymbol{C}$是域$\boldsymbol{R}$上的向量空间；也是域$\boldsymbol{Q}$上的向量空间。

§2 子空间与商空间

向量空间的子空间与商空间是线性几何中讨论空间的各维平面所不可少的知识。

2.1 子空间

定义2.1 设向量空间V的子集合K，如果满足

$$\forall x,y\in K,\ \forall\lambda,\mu\in F\longrightarrow\lambda x+\mu y\in K$$

则称 K 是 V 的（**线性**）**子空间**。

定义2.2 设向量空间 V 的一组向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，所有形如

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k, \lambda_i \in F$$

的向量全体显然构成 V 的一个子空间 K，称为由这组向量**张成的子空间**，记为

$$K = [x_1, x_2, \cdots, x_k]。$$

容易验证，当这组向量线性无关时，则子空间 K 的维数是 k，当这组中最大无关组的个数是 r，则 K 的维数是 r。

n 维向量空间 V^n 的子空间 K^m，$\dim(K^m) = m$，有 $0 \leqslant m \leqslant n$，当 $m = 0$ 或 n 时，$K^m = \{0\}$ 或 V^n，称为**假子空间**，其余情况有 $0 < m < n$，称 K^m 为**真子空间**。

定义2.3 设 K 与 H 是 V 的两个子空间，集合

$$K \cap H = \{x \in V \mid x \in K \text{ 且 } x \in H\},$$

$$K + H = \{x + y \in V \mid x \in K, y \in H\}$$

分别称为 K 与 H 的**交**与（**线性**）**和**。

附注 两个子空间的和与它们的并

$$K \cup H = \{x \in V \mid x \in K \text{ 或 } x \in H\}$$

是不相同的概念。显然任意两个子空间的和与交都是子空间，但它们的并一般不是子空间。

关于子空间和与交的维数有如下维数定理。它是建立线性几何中平面的维数定理的主要依据。

定理2.4 设向量空间 V 的两个子空间 K 是 H，则它

 85—1111