普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 高职高专数学教程

谢国瑞　汪国强　主编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

# 高职高专数学教程

谢国瑞　汪国强　主编



高等教育出版社

## 内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材，适合高等职业教育、高等专科教育及成人高等教育各专业作为高等数学(或经济数学)每周4学时一学期课程的教材之用. 作者们编写时努力贯彻高职高专教育培养目标对高等数学课程的特定要求. 考虑到有利于学生的学习与发展，本书起点较低、进展较为平缓，逐步提升学生的数学文化素质与数学感悟能力. 本书对教学内容的选取，力求兼顾为学生直接有用，也为"专升本"的继续学习或为其他途径的深造奠定必备的数学基础；在教材内容的处理上，注意淡化数学理论，避免冗长的论证，并做到重视对基本概念的解释与理解甚于计算；重视数学应用面的宽度甚于深度；重视日常的、经济的应用甚于专业的、理论的应用.

本书的具体内容为：第一篇线性数学入门，包括线性代数方程组、矩阵、线性不等式组、线性规划简介；第二篇微积分概要，包括函数、导数、导数应用、积分；第三篇概率初步，包括事件与概率、概率间接计算法、随机变量.

**图书在版编目(CIP)数据**

高职高专数学教程/谢国瑞，汪国强主编. —北京：高等教育出版社，2002.12 (2006 重印)
ISBN 7-04-011700-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①谢…②汪… Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 093254 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街4号 | **免费咨询** | 800-810-0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京凌奇印刷有限责任公司 | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 787×1092　1/16 | **版　　次** | 2002年12月第1版 |
| **印　　张** | 14.25 | **印　　次** | 2006年5月第6次印刷 |
| **字　　数** | 320 000 | **定　　价** | 15.40元 |



**物料号　11700-00**

# 出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要.为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批"教育部高职高专规划教材".

"教育部高职高专规划教材"计划出版500种,用5年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用2～3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2～3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

# 前　言

编写本书的目的是提供一本为高等职业教育、高等专科教育、成人高等教育（以下简称高职高专）专科各专业所适用的数学（或经济数学）课程的教材.

近年来，我们涉足高职高专数学课程的组织与教学，在实践中发现了一些教学上值得探讨的问题，问题之一就是教材问题.现行的高职高专数学课程教材几乎都是依本科相应课程教材的模式，在对内容作一些精简或压缩后编成.学生在学习数学的过程中往往备感困难，而学完之后又常感觉掌握不好，我们深感长此以往，既不利于学生的成才也有损数学的教学本身.适逢我等有幸参与教育部组织的“新世纪高职高专教育数学课程教学内容体系改革、建设的研究与实践”项目，有机会对一些问题做了较多的调研与思考.

高职高专是高等教育中以培养高级应用性人才为目标的一个重要组成部分，培养目标规定学生应具有较强的动手能力及一定的专业基础理论知识.依照我们的理解，这一定的专业基础理论知识，应该是由学生通过参加实验、实训等主要教学环节来获取，而不是在课堂里通过理论推导（特别是借助数学演算的推导）来获得.同培养本科大学生相比，这可能是由培养目标的不同所带来的教学要求的实质性差异之一.所以在高职高专各专业教学计划中的数学课，为专业课铺垫基础的作用应该是微乎其微的.那么，在高职高专教育的计划中是否还有必要设置数学课呢？答案是肯定的，而且，不仅理、工、农、医、财经等各专业要设置，就是文科、社会学科类的专业也应该设置数学课.

数学科学是一门有着悠久历史而又永远年轻的学科，单从数学应用的这个侧面来看，近数十年来的进展就十分惊人.在现时，有不少的数学方法能够直接为实际工作者更好地发挥应用技能与提高工作质量提供手段，从而产生效益.数学的概念、语言及思维方式，正日益渗入到人们工作、生活的方方面面.每天的天气预报告诉你，今天的降水概率是多少，你将怎样理解和利用这个信息呢？在报章杂志及传媒中更不时会出现各种使用数学语言的报道.如果把这看成是一种趋势，也是不足为怪的.事实上，数学语言本来就是人类深层次的语言，不通过必要的训练、熏陶是不能自然地为人们所理解、掌握和使用的.用数学语言来表达、解释事物的意义，既准确、可靠又简单明了.有时用数学语言寥寥数言表达的意思，可能用大块的文章也未必能够讲清楚.这些都说明了在知识经济社会里，每一个追求提高工作质量、生活质量、注重效率的人，都应不断提高其数学文化修养，都应终生与数学为伴，何况是作为高级专门应用性人才的高职高专毕业生呢？应当承认，在我们的学生中，有不少人是抱着一种既敬又畏的紧张心情在学数学的，这就为数学的教学提出了这样的问题：怎样通过教学提高其亲和力.在学生努力学习数学的同时，必须使他们不断地增长知识和才能而不只是学一堆枯燥的公式和定理，要使他们不断地得到启迪和受到鼓励.

高职高专的数学课应该致力于提高学生的数学文化修养（着重在建立一些有用的数学概念并通过合适的数学内容的学习进行数学语言和思维方法的训练），提供一些能在学生将来的实际工作中直接解决问题或产生效益的数学工具（或为学习、理解这类工具建立必要的数学基础）.这

样，我们选择了由目录所示的三个篇章来构成《高职高专数学教程》的内容. 下面对我们的想法作一些简单的介绍，供使用本书的师生们参考，并请批评指正.

第 1 篇线性数学入门. 我们从大家最熟知的等式和不等式切入话题，等式有恒等式与条件等式之分，其主题应包括恒等式的证明及条件等式（即通常所称的方程式）的求解：不等式也有绝对不等式与条件不等式之分，同样也涉及绝对不等式的证明及条件不等式的求解. 这一篇的重点是讨论线性代数方程组的求解、矩阵代数以及从线性不等式组求解引向的线性规划. 线性规划是 20 世纪 40 年代发展起来的一个重要的应用数学分支，这里对线性规划的模型与解法作了简明的介绍. 本篇介绍的不少应用示例，大都颇具启发性，若稍作由此及彼的联想，就有可能用这些方法解决你现在或将会面临的某些实际问题.

第 2 篇微积分概要. 享有电子计算机之父美誉的匈牙利裔美籍大数学家冯・诺依曼（John von Neumann，1903—1957）曾说："微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性作怎样的估计也不会过分."微积分自然是每一个接受高等教育的人都应该了解的数学分支. 这里从讨论汽车驾座前方两个仪表（总里程表和速度表）读数间的关系说起，引入微积分的概念和所要讨论的问题. 在这里看到，对线性函数，微积分的问题是用初等数学方法就可以解决的，因此微积分方法主要是对非线性函数在解决问题. 在讨论中，我们既涉及了解决非线性问题的一种常用的思维方法："线性化"，也涉及了近代应用数学中"嵌入法"思想最简单的形态：把一个待求的常量看作是个函数值，通过求函数表达式再确定这个常量的值. 这种化简为繁，从而可用上更为高级的工具以解决问题的思想方法，对其他领域也是一种有用的思想方法. 应该说，这一篇的内容是极为精炼的，重点在建立微积分的概念和介绍解决问题的思想方法，所讲的简单计算和应用主要是为此服务的，我们想，这样的处理对高职高专的学生可能是合适的.

第 3 篇概率初步. 本篇的主题讨论随机性问题，在人们工作和生活中会接触到太多的随机现象，如在抛掷一枚硬币时，结果是正面朝上还是反面朝上是随机的，如果没有随机意识，而试图找出抛掷时硬币的初始位置与出现结果的关系，那就走进了无法得出规律的死胡同. 所以首先要建立随机意识，这样，对面临的随机现象就能正确地提出问题. 例如，一名射手要对某目标进行多次独立的射击，你就不会问"射手将命中几次"的问题，而是问成"射中目标次数的概率分布是什么？"那么什么是概率呢？在实际问题中必须依照不同情况分别做出统计概率或主观概率的解释，既然概率可以有不同的解释，那就有理由怀疑从概率论引出的结果是否可靠，故而要简略地介绍有公理化概率论的背景，使能确信理论的正确与可靠. 本篇介绍的"贝叶斯决策"、"求职面试"等不少应用示例也是颇具启发性的，并在方法上透视了处理确定性问题的方法是怎样在解决随机问题时发挥作用的. 这一篇占用了全书较多的篇幅，一则因为要建立全新的随机意识和视角，再则是要培养对待随机性提出问题、解决问题的方式和方法.

本书的内容与相应题材的"标准"教材相比，是极为"简化"的，用这样的素材，经过任课老师的再创造，用于每周 4 学时的一学期课程，应该是能够完成的. 而从以上对本书内容的粗略介绍可以看出，本书所包含的内容相对于所花的学时来说还是较为丰富的. 根据这样的教材来组织教学，可能会比学生花同样的时间还尚未能从微积分的公式和定理中解脱出来的实效会好一点；也可能会让更多一些学生能略微放松一下紧张的心情走向数学课堂；甚至还可能会造就一部分学生产生用"标准"的教材再继续学习数学的要求和能力！

我们对项目课题的研究刚刚起步，调研不够，对问题的认识是很不全面和非常肤浅的，很可

能在试图解决一个问题的时候会引发出更多的问题,甚至可能连问题都没有找准.但我们还是大胆地将这些极不成熟的看法提出并编写成教材公开出版希望抛砖引玉,我们殷切地期待着专家,特别是广大读者们的批评.我们希望能听到、看到和了解更多的专家和读者们对高职高专数学课程的看法和意见,更希望能早日出现更多的高职高专的数学好教材.让我们共同努力推进高职高专数学课程的教学改革和教材建设.

最后,我们要对组织和帮助我们进行项目研究和教材编写的教育部高教司及高等教育出版社的领导,华东理工大学成人教育学院的领导表示衷心的感谢,也要对上海工商外国语职业学院各级领导们的支持表示由衷的感谢.项目组的全体成员对本书的框架进行了细致的讨论,特别是徐州建筑职业技术学院焦曙光老师、上海交通大学孙薇荣教授、华东理工大学张建初教授等都参与了具体的工作.还要感谢华南理工大学理学院院长郝志峰教授对本书定稿所发表的指导性意见,这种种帮助使本书增色不少,但终为我们的水平所限,书中的错、漏、不妥之处仍在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

2002.9

**责任编辑** 蒋　青
**封面设计** 杨立新
**责任绘图** 尹　莉
**版式设计** 陆瑞红
**责任校对** 胡晓琪
**责任印制** 宋克学

# 郑重声明

# 目　录

## 第一篇　线性数学入门



## 第二篇　微积分概要

## 第三篇 概率初步

# 第一篇 线性数学入门

本篇主要介绍线性代数方程组及线性代数不等式组，在这里还引入了矩阵的概念，这些都是数学应用中最基础的知识．讨论的方式是初等的，力求能显示其应用广泛性的一面．

# 第一章 线性代数方程组（消元法）

## 1.1 基本概念

### 1.1.1 方程及其解

表示两个代数表达式相等关系的等式是**代数方程式**，如

$$3x+1=7,$$
$$2x+y=8,$$
$$\frac{1}{x+1}=0,$$
$$3(x+2)=3x+6,$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

等都是代数方程式（以下简称方程式），方程式含一个或多个**变量**（今后也称**未知数**）．方程式可区分为**恒等式**及**条件方程式**两类．以变量的任意容许值代入时都能成立的方程式称为**恒等式**，这里变量的容许值是指以其代入表达式时使表达式有意义的任一值．容易看出，上列方程式中的最后两个是恒等式．对变量以容许值代入并不总能成立的方程式为条件方程式，以下说到**方程**时一般就指条件方程式．

方程 $3x+1=7$ 含一个变量 $x$（即为一元方程），它只对 $x$ 的一个容许值 $x=2$ 成立，称数 2 是这个方程的**解**或**根**，也称数 2 **满足方程**．一般，对于一元方程，变量以其某容许值代入时能使方程成立，就称该容许值为方程的**解**或**根**，也称该容许值**满足方程**，**解方程**就是要求出方程所有的解．对于多元方程（含多个变量或未知数的方程），其**解**或**根**应是有序的多维数组，当依序将数组的各分量代各变量时，能使方程成立．例如，对于二元线性方程（关于变量的幂次最高为一次幂）

$$2x+y=8,$$

它的解应是二维数组. 可以验证，二维数组$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$是它的一个解，事实上，用 3 代 $x$，用 2 代 $y$，方程是成立的：$2\cdot 3+1\cdot 2=8$，而数组$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$就不是此方程的解，因为 $2\cdot 2+1\cdot 3\neq 8$. 当然，这个方程实际上有无限多个解. 如$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}$，……等都是它的解.

当然，不是每个方程都有解的. 例如，方程

$$\frac{1}{x+1}=0$$

就没有解，因为用 $x$ 的任一容许值($x\neq -1$)代入方程时，方程都不能成立.

方程如果有解，应怎样求出其解的呢？解方程的最重要手段就是对方程作**等价(即同解)运算(或变形)**.

通常称两个具有完全一样的解的方程是**等价(或同解)方程**，例如

$$3x+1=7 \qquad 与 \qquad 3x=6$$

是等价的，因为它们都只有惟一的解 $x=2$，又如

$$2x+y=8 \qquad 与 \qquad y=8-2x$$

也是等价的，因为满足一个方程的任一数组也必满足另一个方程.

最常用的方程同解变形(或称等价运算)是：

1. 方程两端加(减)同一个常数；
2. 方程两端乘(除)同一个非零常数；
3. 方程的任一项可在改变其正、负号后，由方程的一端移到另一端(移项).

例如可以认为方程 $3x+1=7$ 是这样经一系列等价运算而解出的：

$$3x+1=7,$$
$$3x=6,\ \text{两端加常数}-1\text{，或作为移项}$$
$$x=2.\quad \text{两端乘常数}\frac{1}{3}$$

类似地，方程 $2x+y=8$ 的几个解也可以认为是经一系列等价运算后再算出的：

$$2x+y=8,$$
$$y=8-2x,\ \text{移项}$$

用 $x=3$ 代入后一方程，得 $y=2$，从而得原方程的一个解$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，再用 $x=2$ 代入后一方程得 $y=4$，从而得原方程的另一个解$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$，等等.

### 1.1.2 集合概念、方程的解集

上一节看到方程可以有确定的解，也可能有无限多个解，还可能没有解，用集合概念可统一描述方程的解. 为此，先简要复习集合的概念，这在以后的两篇中也都要用到.

一组对象的汇集或汇总，称为**集合**或**集**.

例如，生长在某座山上的所有树木；在一块草地上放牧的所有的羊；全体自然数等等，都是集合.

常用大写英文字母 $A,B,\cdots$ 记集合(set)，而称集合 $A$ 中的任一对象 $x$ 为 $A$ 的元素(element)，记作 $x\in A$，而当另一对象 $y$ 不是集合 $A$ 的元素时，可用记号 $y\overline{\in}A$ 表明此事. 例如，若用 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数的集合，则显然有：$3\in\mathbf{N}_+$，$5\in\mathbf{N}_+$ 以及 $-1\overline{\in}\mathbf{N}_+$，$0\overline{\in}\mathbf{N}_+$ 等.

集合常用的表示法有两种：**列举法和描述法**. 列举法是将集合的元素一一列写于一个大括号之内，如：

$$A=\{3,5\}, \tag{1-1}$$

表示了由两个数字 3,5 组成的集合. 要说明的是，对于这样给定的集合，元素的排列次序应该是不重要的，而且出现的元素也应该是互不相同的，亦即同一对象如果出现多次也只当作出现一次. 故而集合 $\{5,3\}$ 就是上面给出的集合 $A$，而集合 $\{5,3,3\}$ 仍然是(1-1)的集合 $A$，而且一般都不让同一元素被多次列举出来而必将其化简成 $\{5,3\}$ 或 $\{3,5\}$.

用描述法给定的集合，常表成

$$B=\{x\,|\,P\} \tag{1-2}$$

的形式，其中 $x$ 是集合 $B$ 的代表性元素，而竖线后面的 $P$ 是描述 $x$ 所具有的属性. 例如，用描述法可将(1-1)的集合 $A$ 表成：

$$\{x\,|\,x^2-8x+15=0\}.$$

若根本不存在具有性质 $P$ 的对象，则形如(1-2)的集合称为空集，并以专用的符号 $\varnothing$ 记之. 引进空集的概念对讨论集合的运算也会带来方便.

数学中常用的一些数集，也各有专用符号，如用

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

表示**自然数集**或非负整数集，符号 $\mathbf{Z}$ 表示**整数集**

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\},$$

$\mathbf{Q}$ 表示**有理数集**，$\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{C}$ 分别表示**实数集**及**复数集**. 从这些集合分别去掉数字 0 后所得的集合，就在相应的记号加上标 * 号或下标 + 号表示，例如有

$$\mathbf{N}^*=\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots\}$$

为正整数集合.

一个方程全体解构成的集合称为**解集**，于是解方程的问题就是要确定方程的解集. 通过上节的讨论，可知方程 $3x+1=7$ 的解集是 $\{2\}$，也说数 2 是这个方程的解. 当然，单个元素的集合与这个元素本身应是不同的概念，这是在对两者作这样的混用时必须要清楚的. 方程 $\frac{1}{x+1}=0$ 的解集是空集，记为 $\varnothing$；对于方程 $2x+y=8$ 有无限多个解，可将其解集表为 $\left\{\begin{bmatrix}k\\8-2k\end{bmatrix}\middle|\,k\in\mathbf{R}\right\}$ 或者就用 $\begin{bmatrix}k\\8-2k\end{bmatrix}$ 表示这个方程全体的解，其中 $k$ 是可取任意值的常数. 这样，即使方程有无限多个解也找到了表示其**全体解(通解)**的方式，上一节所列举该方程的那几个解只是令 $k$ 分别取值为 $2,1,0,-1$ 所得出的解.

# 1.2 解线性代数方程组的消元法

## 1.2.1 二元线性代数方程组

在平面直角坐标系中，二元线性方程的图像（坐标能满足方程的点集）是一条直线．例如，方程

$$2x+y=8, \text{即 } y=8-2x,$$

在将它的两个解$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$在坐标平面上用点表示后，联结两点的直线即为此方程的图像（图 1-1）．理由是此直线上任一点的坐标正是该方程的一个解，反之，以方程的任一解作为坐标，也正是这条直线上的一个点．这样从几何上也看出一个二元线性方程有无限多解的事实．

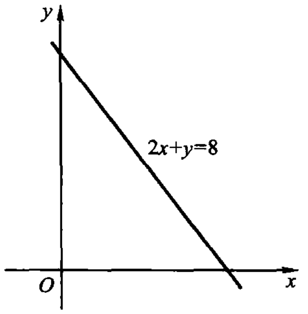



图 1-1

有的实际问题中常要对同时出现的若干个线性方程作为一个整体来考虑，此时常要求出满足所有方程的未知数，这就是解线性代数方程组．例如，将

$$x+y=3, \tag{1-3}$$

$$2x-3y=-4 \tag{1-4}$$

两个方程作为整体来讨论，就成一**线性方程组**（system of linear equations）．(1-3)是方程组的第1个方程，而(1-4)是第2个方程．对于线性方程组，其重要的求解方法仍是**等价运算**，即同解变形．此时上一节提到的方程的等价运算（或变形）固然可用于方程组中的任一个方程，但作为方程组，**等价变形**最常用的是以下三类：

1. 交换组内任两个方程的次序（或编号）；
2. 任一方程乘一非零常数；
3. 任一方程经数量倍（即在两端乘同一常数）后加到另一方程去．

**例 1** 试用方程组等价变形法，解方程组

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ 2x-3y=-4. & (1-4) \end{cases}$$

**解** 作第 3 类变形，将(1-3)乘$(-2)$后加到(1-4)去，得到

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ -5y=-10. & (1-4') \end{cases}$$

这是与原方程组同解的．在$(1-4')$两端乘$\left(-\frac{1}{5}\right)$，得

$$\begin{cases} x+y=3, & (1-3) \\ y=2. & (1-4'') \end{cases}$$

再作第 3 类变形，将$(1-4'')$乘$(-1)$后加到(1-3)去，得

$$\begin{cases} x=1, & (1-3') \\ y=2. & (1-4'') \end{cases}$$

这显然与原给方程组也同解，但目前已明显表出了解，故方程组的解是$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

与单个方程的情形一样，方程组的解也有三种可能的情形：有确定的解；无解；或者有无限多个解.

**例 2** 试用方程组等价变形，解方程组

$$\begin{cases}2x-3y=-4, & (1-4)\\ -4x+6y=2. & (1-5)\end{cases}$$

**解** 作第 3 类等价变形，将(1-4)乘 2 后加到(1-5)去，得

$$\begin{cases}2x-3y=-4, & (1-4)\\ 0x+0y=-6. & (1-5')\end{cases}$$

如果方程组有解则必成立

$$0=-6, \qquad (1-5')$$

而这是不可能的，故知方程组无解.

**例 3** 解方程组

$$\begin{cases}2x-3y=-4, & (1-4)\\ -4x+6y=8. & (1-6)\end{cases}$$

**解** 作第 3 类等价变形，将(1-4)乘 2 后加到(1-6)去，得等价方程组

$$\begin{cases}2x-3y=-4, & (1-4)\\ 0x-0y=0. & (1-6')\end{cases}$$

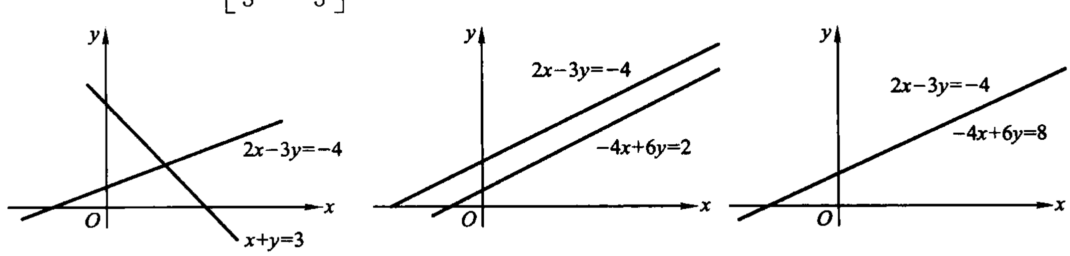
这时方程(1-6′)是个平凡等式 $0=0$，于是未知数 $x,y$ 所应适合的条件是方程组变成与其等价的单个方程

$$2x-3y=-4, \qquad (1-4)$$

实质上等价于

$$y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x.$$

这样，所给方程组有无限多个解，解集是$\left\{\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}\middle| k\in\mathbf{R}\right\}$；或表示解为$\begin{cases}x=k,\\ y=\frac{2}{3}k+\frac{4}{3},\end{cases}$其中 $k$ 是任意实数；或$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\ \frac{2}{3}k+\frac{4}{3}\end{bmatrix}$，$k$ 是任意实数.




(a) 一对相交直线有惟一公共点 (b) 一对平行直线无公共点 (c) 重合直线每一点都是公共点

图 1-2