



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学 (二)

线性代数、概率统计

第2版

□ 姚孟臣 编



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学(二)

线性代数、概率统计

(第2版)



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二),线性代数、概率统计/姚孟臣编.—2版.
北京:高等教育出版社,2008.12
ISBN 978-7-04-024912-5

I. 高… II. 姚… III. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③概率论-高等学校-教材④数理统计-高等学校-教材
IV. O13 O151.2 O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 176408 号

策划编辑 马丽 责任编辑 崔梅萍 封面设计 张申申
责任绘图 杜晓丹 版式设计 王莹 责任校对 金辉
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	人民教育出版社印刷厂		
		版 次	2004年4月第1版 2008年12月第2版
开 本	850×1168 1/32	印 次	2008年12月第1次印刷
印 张	10.75	定 价	14.80元
字 数	260 000		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24912-00

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。全书共六章,内容包括:行列式,矩阵,线性方程组,随机事件及其概率,随机变量及其分布,数理统计基础。本书按章配备了适量的习题,供教师和学生选用。

本书精选内容、突出重点、条理清晰、题型丰富、强调应用,可以作为普通高等学校经济管理类各个专业的学生以及参加全国高等教育自学考试、学历文凭考试的考生学习线性代数、概率论与数理统计课程的教材和参考书,也可以满足成人高等教育以及高等职业教育各个专业的学生学习相关课程教学辅导的需要。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010) 58581118

第2版前言

随着教学改革不断深化,我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化,教学内容的更新、教学课时数的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。通过几年的教学实践,各院校结合实际情况对经济管理专业高等数学课程的教学内容、结构、方法、目的和要求进行了积极的探讨。为了适应对此类课程不同的需求,我们借鉴国内外经营类高等数学教材编写的经验教训,以多年来为北京大学等院校授课所用教材为基础重新修订了这套系列教材,增加了经管类学生必需的一些数学知识,使教材内容更加充实,使用面更广。

作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,本系列教材具有如下特色:

1. 选材合理,难易程度适当,能够满足各高校经管类专业基础数学课的不同需要,而又不显得庞杂和艰深;
2. 能以学生易于理解和接受的方式,确切地描述数学定义、概念,讲解理论和方法,而又不失数学的严谨性与系统性;
3. 内容安排层次分明、条理性强,讲解通俗易懂、深入浅出,不仅利于课堂教学,也便于学生自学;
4. 例题、习题的选配照顾到了理论、方法的练习和实际应用的练习,从整体上看数学的训练是充分的。

由于编者水平有限,书中难免有错漏之处,希望广大读者批评指正。

编者

2008年3月于世纪城

第 1 版前言

高等数学(包括微积分、线性代数、概率统计)是经济管理专业的一门基础课。根据高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的总目标的要求,参照教育部有关自学考试的大纲,结合作者多年来为北京大学等院校讲授高等数学课程的实践,我们编写了这套教材。其中包括主教材《高等数学(一)微积分》、《高等数学(二)线性代数、概率统计》以及与之配套的《高等数学附册(习题分析与解答)》共三册。本书是主教材《高等数学(二)线性代数、概率统计》。

这套教材内容涵盖了教育部对经济管理专业《高等数学(一)》和《高等数学(二)》自学考试大纲的全部要求,并考虑到目前绝大多数综合大学和工程院校都设立了经济或管理学科的有关专业,但各校的不同专业方向对数学基础的要求有一定的差异。为此本书力图在学时不多的情况下,让读者了解或掌握高等数学中有关的重要概念、理论和方法以及它们的实际背景,从而建立正确的数学概念,学会使用数学的方法分析、描述、进而定量地解决经济管理学科中的一些实际问题。因此,教材的内容选取注意了科学性和系统性,广度和深度比较恰当,避免了大量的理论推导,更突出有关理论和方法的应用。

《高等数学(二)线性代数、概率统计》全书分六章,内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、数理统计初步。本书按章配备了适量的习题,供教师和学生选用。

本书可以作为一般院校经济管理各专业的数学基础课教材,

又可作为自学考试的高等数学(二)线性代数、概率统计课程的主教材使用。对于要求较高的文科类各专业,也可选用本书。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请广大读者批评指正。

编 者

2003年10月6日

于北京大学中关园

目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1 行列式的定义	(1)
§ 2 行列式的基本性质	(10)
§ 3 行列式按行(列)展开	(16)
§ 4 克拉默法则	(21)
习题一	(26)
第二章 矩阵	(33)
§ 1 矩阵及其运算	(33)
§ 2 几种特殊矩阵	(42)
§ 3 矩阵的分块运算	(46)
§ 4 矩阵的初等变换	(53)
§ 5 逆矩阵	(60)
§ 6 矩阵的秩	(71)
习题二	(75)
第三章 线性方程组	(81)
§ 1 线性方程组的消元解法	(81)
§ 2 n 维向量空间	(92)
§ 3 向量间的线性关系	(95)
§ 4 向量组的秩	(103)
§ 5 线性方程组解的结构	(108)
习题三	(120)

第四章 随机事件及其概率	(127)
§ 1 随机事件与概率	(127)
§ 2 条件概率与乘法公式	(142)
§ 3 全概公式与逆概公式	(145)
§ 4 事件的独立性与二项概型	(149)
习题四	(155)
第五章 随机变量及其分布	(160)
§ 1 一维随机变量	(160)
§ 2 随机向量及其分布	(184)
§ 3 随机变量的数字特征	(196)
习题五	(212)
第六章 数理统计基础	(225)
§ 1 基本概念	(225)
§ 2 参数估计	(229)
§ 3 假设检验	(243)
习题六	(257)
附录 1 矩阵的特征值与特征向量	(264)
附录 2 二次型	(292)
附录 3 一元回归分析	(310)
附表 1 正态分布数值表	(325)
附表 2 t 分布临界值表	(326)
附表 3 χ^2 分布临界值表	(327)
附表 4 F 分布临界值表 ($\alpha = 0.05$)	(328)
附表 5 F 分布临界值表 ($\alpha = 0.025$)	(330)
附表 6 F 分布临界值表 ($\alpha = 0.01$)	(332)

第一章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,在线性方程组、矩阵中都需要用到行列式.本章从二阶、三阶行列式出发,引出 n 阶行列式的概念,进而讨论 n 阶行列式的基本性质及其计算方法,最后介绍用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§1 行列式的定义

1.1 二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是在研究二元、三元线性方程组的解时引出的一种数学符号.

对于二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

采用加减消元法,消去 x_2 ,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

同法消去 x_1 ,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

因此,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

为了便于记忆这个表达式,引进下面的记号.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式,它表示代数和

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中 a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 称为二阶行列式的元素, 横排的称为行, 纵排的称为列.

例如 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 11.$

根据定义, (1.2) 式中两个分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

分母记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为方程组 (1.1) 的系数行列式.

于是, 当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 的惟一解可以表示为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (1.3)$$

类似地, 为了讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

的解, 也可以由相应的三阶行列式简化表示.

定义 1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式. 它表示代数

和:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (1.5)$$

例 1 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-2) + 3 \times 1 \times 2 + 5 \times 1 \\ \times (-4) - 5 \times 3 \times 2 - 2 \times 1 \times 1 - 3 \times (-4) \times (-2) \\ = -82.$

对于三元线性方程组(1.4),令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.4)的系数行列式,令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D_1, D_2, D_3 是把 D 中第 1, 2, 3 列分别换成常数项 b_1, b_2, b_3 得到的行列式.

用加减消元法可以验证: 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 方程组(1.4)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

解 这里

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

故方程组有惟一解.

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 33, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -22.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{33}{11} = 3, \quad x_2 = \frac{11}{11} = 1, \quad x_3 = \frac{-22}{11} = -2.$$

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式, 需要先介绍下面的预备知识.

1.2 排列与逆序

定义 1.3 由自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ 组成的一个有序数组, 称为一个 n 级排列.

例如, 1234 和 2134 都是四级排列; 25413 和 23415 都是五级

排列.

由 $1, 2, \dots, n$ 组成的 n 级排列的总数为 $n!$. 所有这些排列中只有一个排列 $123 \dots n$ 是按自然顺序排列的, 称之为自然序排列.

定义 1.4 在一个 n 级排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 中, 如果有较大的数 j_i 排在较小的数 j_s 的前面, 则 j_i, j_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为该排列的逆序数, 记作 $N(j_1 j_2 \dots j_n)$.

逆序数是奇数的排列称为奇排列, 是偶数的排列称为偶排列.

例如, 在排列 25413 中, 2 后面有 1 个数字比 2 小, 5 后面有 3 个数字比 5 小, 4 后面有 2 个数字比 4 小, 故

$$N(25413) = 1 + 3 + 2 = 6,$$

同法可求得 $N(23415) = 3$.

排列 25413 是偶排列, 排列 23415 是奇排列. 因 $N(12 \dots n) = 0$, 故自然序排列是偶排列.

例 3 写出由 1, 2, 3 这三个数码构成的所有三级排列, 并确定它们的奇偶性.

解 由 1, 2, 3 这三个数码构成的三级排列共有 $3! = 6$ 个, 其排列情况如下:

排 列	逆序数	排列的奇偶数
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

其中偶排列有 3 个: 123, 231, 312.

奇排列有 3 个: 132, 213, 321.

例 4 求 n 级排列 $n(n-1) \dots 321$ 的逆序数.

解 因为在这个排列中, n 后面比它小的数有 $n-1$ 个,

$(n-1)$ 后面比它小的数有 $n-2$ 个, \dots , 3 后面比它小的数有 2 个, 2 后面比它小的数有 1 个. 因此

$$\begin{aligned} N(n(n-1)\cdots 321) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

1.3 n 阶行列式的定义

观察三阶行式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

从中可以发现:

(1) 它的每一项都是不同行、不同列的三个元素的乘积, 每一项除符号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, $j_1j_2j_3$ 为三级排列;

(2) 当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列(共 6 个)时, 就得到三阶行列式的所有项(每项冠以的符号除外)共 $3! = 6$ 个项;

(3) 每一项的符号是: 当这一项中元素的行标按自然顺序排列时, 如果对应的列标构成的排列为偶排列, 冠以“+”号, 为奇排列则冠以“-”号.

综上所述, 作为三阶行列式的展开式中的一项可以表示为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

因而, 三阶行列式可简写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中“ \sum ”表示对所有的三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据三阶行列式的内在规律,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 排成 n 行 n 列构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示一个数值. 此数值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是: 当这一项的行标按自然顺序排列后, 如果对应的列标构成的 n 级排列是偶排列则冠以正号, 是奇排列则冠以负号. 其一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时, 得到代数和中的所有项, 共有 $n!$ 个.

n 阶行列式可简记为 $D = |a_{ij}|$, 用“ \sum ”表示对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 所有的 n 级排列求和, 则 n 阶行列式可简写成

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (1.6)$$

由上述定义可知: 当 $n = 2$ 时即二阶行列式, 当 $n = 3$ 时即三阶行列式, 一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

例 5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

这种主对角线(从左上到右下的对角线)下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式.