广东省中学试用课本

数学

补充教材

（高中一年级用）

说　明

为了衔接全日制十年制学校高中一年级数学课本，我们编写了这册补充教材，供一九七九学年度我省九年制学校初中毕业生升上高中一年级时使用。《直线和圆的方程》可插在《二次曲线》之前讲授；《解斜三角形》可插在《三角函数》之前讲授。其余内容可根据实际情况适当安排。

广东省中小学教材编写组

一九七九年三月

目　录

第一章　简单的二元二次方程组…………………………1
第二章　解斜三角形 ……………………………………9
　第一节　三角函数…………………………………………9
　第二节　解斜三角形……………………………………17
第三章　直线和圆的方程 ………………………………47
　第一节　直线的方程……………………………………47
　第二节　圆的方程………………………………………85
第四章　统计初步…………………………………………97

第一章　简单的二元二次方程组

1—1　二元二次方程组的概念

我们看下面的方程：

$$3x^2-2xy+y^2-2x+5y+1=0;$$

$$x^2+y^2=25;$$

$$xy-x-y-1=0.$$

象这样，含有两个未知数，并且未知数的项的最高次数都是二次的方程叫做二元二次方程.

我们再看下面的方程组：

$$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\x+y=7;\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-y^2=8,\\x^2+y^2=10.\end{cases}$$

象这样，由一个二元一次方程和一个二元二次方程，或由两个二元二次方程组成的方程组，都叫做二元二次方程组.

1—2　简单的二元二次方程组的解法

1.由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组

这种形式的方程组，可用代入消元法来解.

例 1　解方程组：
$$\begin{cases}x^2+y^2=25, & (1)\\x+y=7. & (2)\end{cases}$$

解：由(2)，得

$$y=7-x. \qquad (3)$$

(3)代入(1)，得

$$x^2+(7-x)^2=25.$$

化简，得

$$x^2-7x+12=0.$$

解方程，得

$$x_1=3,\quad x_2=4.$$

分别把 $x_1=3$，$x_2=4$ 代入（3），得

$$y_1=4,\quad y_2=3.$$

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=4;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=3.\end{cases}$$

例 2 解方程组：$\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$

这个方程组除了可以用代入消元法来解外，还可以利用一元二次方程的根与系数的关系来解．因为两个未知数的和是 5，积是 6，所以可设这两个未知数是方程

$$z^2-5z+6=0$$

的两个根．

解：设 x 和 y 是方程

$$z^2-5z+6=0$$

的两个根．

解这个方程，得

$$z_1=3,\quad z_2=2.$$

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=2,\\ x_2=3.\end{cases}$$

例 3 解方程组：$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=1,\\[2ex] \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=25.\end{cases}$

439311

解：设$\frac{2}{x}=u$，$\frac{5}{y}=v$，那么$\frac{4}{x^2}=u^2$，$\frac{25}{y^2}=v^2$，
原方程组变形为

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2+v^2=25. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} u_1=4, \\ v_1=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=-3, \\ v_2=4. \end{cases}$$

就是
$$\begin{cases} \frac{2}{x_1}=4, \\ \frac{5}{y_1}=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{x_2}=-3, \\ \frac{5}{y_2}=4. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}, \\ y_1=-\frac{5}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-\frac{2}{3}, \\ y_2=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

经检验，知道这两组解都是原方程组的解。

2.由两个二元二次方程组成的方程组

这种形式的方程组，消去一个未知数以后，一般要得出一个一元四次方程。例如方程组

$$\begin{cases} y=x^2+1, \\ x=y^2-2. \end{cases}$$

消去y，就得出

$$x^4+2x^2-x-1=0.$$

这是一个四次方程，这个方程，我们现在还不会解，但是有些二元二次方程组，可以化成我们会解的方程组。

例4 解方程组：
$$\begin{cases} x^2+y^2=17, & (1) \\ y^2=16x. & (2) \end{cases}$$

解：　(2)代入(1)，得

$$x^2+16x=17,$$

$$x^2+16x-17=0.$$

解这个方程，得

$$x=1,\quad x=-17.$$

把$x=1$从入(2)，得

$y^2=16,$

$\therefore\quad y=\pm4.$

把　$x=-17$代入(2)，得

$y^2=-17\times16.$

这个方程没有实数解。

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-4.\end{cases}$$

例5　解方程组：
$$\begin{cases}x^2-y^2=8, & (1)\\ x^2+y^2=10. & (2)\end{cases}$$

解：　(1)＋(2)，得

$$2x^2=18,$$

$$x^2=9,$$

$$x=\pm3.$$

(2)　－(1)，得

$$2y^2=2,$$

$$y^2=1,$$

$$y=\pm1,$$

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=3,\\ y_2=-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-1. \end{cases}$$

例6 解方程组：$\begin{cases} x^2+y^2=34, & (1) \\ x^2+(y-1)^2=29. & (2) \end{cases}$

解： (1)－(2)，得

$$y^2-(y-1)^2=5,$$

$$y^2-y^2+2y-6=0,$$

$$y=3.$$

用$y=3$代入(1)，得

$$x^2=25,$$

$$x=\pm 5.$$

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-5, \\ y_2=3. \end{cases}$$

例7 解方程组：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1, & (1) \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1. & (2) \end{cases}$

解： (1)＋(2)，得

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\right)x^2=2,$$

$$x^2=\frac{9\times 25}{17}$$

$$x=\pm\frac{15\sqrt{17}}{17}.$$

把 $x=\pm\dfrac{15\sqrt{17}}{17}$ 代入(2)，得

$$\frac{225}{25\times17}+\frac{y^2}{4}=1,$$

$$y^2=\frac{32}{17},$$

$$y=\pm\frac{4\sqrt{34}}{17}.$$

因此，原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{15\sqrt{17}}{17},\\ y_1=\dfrac{4\sqrt{34}}{17};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\dfrac{15\sqrt{17}}{17},\\ y_2=-\dfrac{4\sqrt{34}}{17};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=-\dfrac{15\sqrt{17}}{17},\\ y_3=\dfrac{4\sqrt{34}}{17};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_4=-\dfrac{15\sqrt{17}}{17},\\ y_4=-\dfrac{4\sqrt{34}}{17}.\end{cases}$$

练 习 一

1. （口答）下列 x 和 y 的值是不是方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\ x^2+y^2=13\end{cases}$ 的解？为什么？

(1) $x=2$，$y=3$；　(2) $x=3$，$y=2$；

(3) $x=4$，$y=1$；　(4) $x=-3$，$y=-2$。

2. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}x=y+5,\\ x^2+y^2=13;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2-y^2=48,\\ x+y=6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+y=8,\\ xy=7;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x+y=2,\\ xy=-15;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3. \end{cases}$

3. 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x^2=-y; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}y^2=28, \\ y^2-3x=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x^2-y^2=16; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2-2y^2=-14, \\ x^2+4y^2=40; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} (x-3)^2+y^2=6, \\ (x-3)^2+2y^2=10; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=4, \\ (x-1)^2+2(y-2)^2=5. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=0; \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1. \end{cases}$

习 题 一

解下列各方程组:

1. (1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=1+\sqrt{3}, \\ x^2-y^2=2. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} xy=2\sqrt{3}, \\ x+y=\sqrt{6}+\sqrt{2}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=a+2b, \\ xy=ab+b^2. \end{cases}$

第二章　解斜三角形

第一节　三 角 函 数

2—1　三角函数

在初二我们是用直角三角形中两边的比来定义锐角三角函数的。为了便于把三角函数由锐角推广到钝角，下面，我们用坐标法来研究三角函数。

如图2—1，我们把角α看作是由一条射线OA按逆时针方向绕端点O旋转到OB位置而成的。射线旋转的起始位置OA叫做角的始边，终止位置OB叫做角的终边，端点O就是角的顶点。

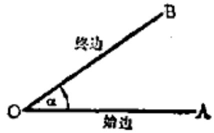

图2—1

把角α移入直角坐标系内，OX轴作为角α的始边，坐标原点O作为角α的顶点，OB是角α的终边。显然，如果角α是锐角，那么终边OB落在第Ⅰ象限内，如图2—2甲；如果角α是钝角，那么终边OB落在第Ⅱ象限内，如图2—2乙。

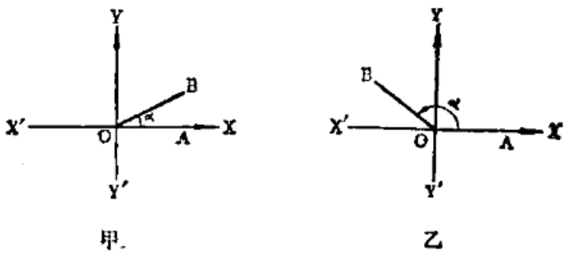

图2—2

如图2—3，在角α的终边上任意取一点P，设它的坐标为(x,y)，原点到这点的距离为r（规定$r>0$）。那末，x、y、r可以组成下列四个比：

$$\frac{y}{r}、\frac{x}{r}、\frac{y}{x}、\frac{x}{y}.$$

如果在角α的终边上另取一点$P'(x',y')$，设OP'的长是r'，同样可以得到四个比：

$$\frac{y'}{r'}、\frac{x'}{r'}、\frac{y'}{x'}、\frac{x'}{y'}.$$

因为x和x'、y和y'的符号相同，并且$\triangle POM\backsim\triangle P'OM'$，所以

$$\frac{y}{r}=\frac{y'}{r'},\quad \frac{x}{r}=\frac{x'}{r'},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}.$$

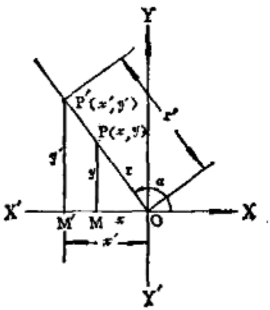

图2—3

由此可见，对于一个确定的角α，比值$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$和$\frac{x}{y}$与P点在角α的终边上所取的位置无关。对于角α的每一个确定的值，这四个比$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$和$\frac{x}{y}$都有确定的值和它对应。根据函数的定义，这四个比是角α的函数。我们把这四个比值分别叫做角α的正弦、余弦、正切和余切，并用符号表示：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$tg\,\alpha=\frac{y}{x},\quad ctg\alpha=\frac{x}{y}.$$

角 α 的正弦、余弦、正切和余切都叫做角 α 的三角函数。

当角 α 为锐角时，上面所规定的角 α 的三角函数与我们学过的锐角三角函数完全一样。

例 1　已知角 α 终边上P点的坐标是(4，3)，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$tg\alpha$、$ctg\alpha$ 的值。

解：如图 2—4，P 点的坐标是(4，3)。

$\because$　$x=4$，$y=3$，根据勾股定理得：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}=5.$$

根据三角函数定义得：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{4}{5},$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{3}{4},$$

$$ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

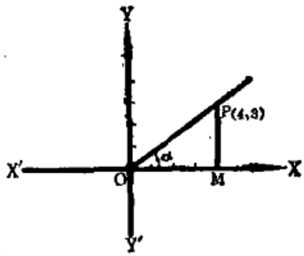

图 2—4

例2　已知角 α 的终边上P点的坐标是(－2，4)，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$tg\alpha$ 和 $ctg\alpha$ 的值。

解：　如图 2—5，P 点的坐标是(－2，4)。

$\because$　$x=-2$，$y=4$，根据勾股定理得：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(-2)^2+4^2}$$

$$=\sqrt{20}$$

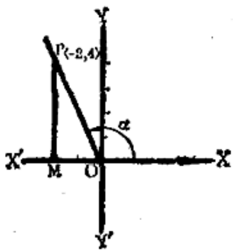

图 2—5

$$=2\sqrt{5}.$$

根据三角函数定义得：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{5}\sqrt{5},$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{-2}=-2,$$

$$ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

从例1、例2可以看到，角α的三角函数值的符号是由它的终边所在的象限决定的。当角α是锐角时，由于终边上任意一点的横坐标和纵坐标都是正的，所以锐角α的所有三角函数值为正；当角α是钝角时，由于终边上任意一点的横坐标是负的，纵坐标是正的，所以钝角α的正弦函数值为正，其余的三角函数值都为负。

例3 根据下列条件，确定角α的终边所在象限：

(1)$\sin\alpha$为正数，$tg\alpha$为负数；

(2)$\cos\alpha$、$ctg\alpha$同号。

解： (1)∵ $\sin\alpha>0$时，α的终边可能在第一或第二象限。

$tg\alpha<0$时，α的终边在第二象限。

∴ 当$\sin\alpha$为正数，$tg\alpha$为负数时，α的终边在第二象限。

(2)∵ 当α的终边在第一象限时，$\cos\alpha$、$ctg\alpha$同时为正，

当α的终边在第二象限时，$\cos\alpha$、$ctg\alpha$同时为负，

∴ α的终边在第一或第二象限。

例 4 求证：$tg\alpha=\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$；$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$。

证明：根据三角函数的定义，可得

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{y}{x}=tg\alpha;$$

$$sin^2\alpha+cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2},$$

$\because\quad y^2+x^2=r^2,$

$\therefore\quad sin^2\alpha+cos^2\alpha=\dfrac{r^2}{r^2}=1$。

练 习 一

1．已知角 α 终边上一点的坐标是：

(1) (7, 5)； (2) (−4, 3)； (3) (−8, 6)；

(4) $(-\sqrt{2}, 1)$。求角 α 的三角函数值.

2．已知角 β 的终边经过(−5, 12)，求 $sin\beta$、$cos\beta$、$tg\beta$ 和 $ctg\beta$。

3．已知角 φ 的终边经过 (1) (0, 1)；(2) (−4, 0)。求 $sin\varphi$、$cos\varphi$。

4．决定下列三角函数值的符号，并把它填在括号里：

$sin116°$(　　)；　$cos43°$(　　)；　$tg97°$(　　)；

$ctg84°30'$(　　)；$cos175°$(　　)；$sin85°25'$(　　)；

$tg3°06'$(　　)；　$ctg155°$(　　)；　$cos105°$(　　)。

5．确定下列式子的符号：

(1) $sin89°\cdot cos121°$；(2) $sin145°\cdot tg130°$；

(3) $tg135°\cdot ctg160°\cdot cos60°$； (4) $\dfrac{sin150°\cdot cos150°}{tg150°\cdot ctg150°}$。

6．根据下列条件，确定 α 的终边所在象限：

(1) $ctg\alpha$为负数，$sin\alpha$ 为正数；

(2) $sin\alpha=\dfrac{1}{2}$， $cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $tg\alpha$、$ctg\alpha$ 同号，且 $0°<\alpha<180°$。

7．证明： $ctg\alpha=\dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$； $tg\alpha=\dfrac{1}{ctg\alpha}$。

2—2 化钝角三角函数为锐角三角函数

锐角三角函数的值，可以查«数学用表»中的三角函数表得到，而钝角三角函数的值，就不能直接查表求得。但是钝角三角函数与锐角三角函数是紧密联系的，下面我们来研究它们之间的关系，从而把求钝角三角函数值转化为求锐角三角函数的值。

如图2—6，OB和OB′分别是角 α 和 $180°-\alpha$ 的终边。在OB上任取一点 $P(x, y)$，$OP=r$，并过P点画X轴的垂线交X轴于M。再在OB′上取一点 $P'(x', y')$，使 $OP'=OP$，并过P′点画X轴的垂线交X轴于M′。

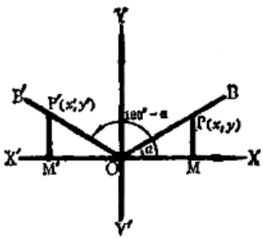

图2—6

根据三角函数的定义，对于角 α，有

$$sin\,\alpha=\frac{y}{r},\qquad cos\,\alpha=\frac{x}{r},$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x},\qquad ctg\,\alpha=\frac{x}{y}.$$

对于角$(180°-\alpha)$，有

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y'}{r},\quad \cos(180°-\alpha)=\frac{x'}{r},$$

$$tg(180°-\alpha)=\frac{y'}{x'},\quad ctg(180°-\alpha)=\frac{x'}{y'}.$$

而在直角三角形OPM与直角三角形OP′M′中，$\angle POM=\angle P'OM'$，$OP=OP'=r$，所以$\triangle OPM\cong\triangle OP'M'$，

即 $y'=y$，$x'=-x$。

因此，得下面一组公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha\\&tg(180°-\alpha)=-tg\alpha\\&ctg(180°-\alpha)=-ctg\alpha\end{aligned}}$$

利用这组公式，可以把钝角三角函数化为锐角三角函数。

例1 求155°的三角函数值。

解： $\because\ 155°=180°-25°$，

$$\therefore\ \sin155°=\sin(180°-25°)=\sin25°=0.4226;$$

$$\cos155°=\cos(180°-25°)=-\cos25°=-0.9063;$$

$$tg155°=tg(180°-25°)=-tg25°=-0.4663;$$

$$ctg155°=ctg(180°-25°)=-ctg25°=-2.145.$$

例2 求$2\cos135°+4\sin^2120°+tg135°$的值。

解： $2\cos135°+4\sin^2120°+tg135°$

$$=2\cos(180°-45°)+4\sin^2(180°-60°)$$