21世纪高等职业教育规划教材

高 等 数 学

GAO DENG SHU XUE

主　编　何春辉 邱长富

副主编　王长征 徐雅玲

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高等职业教育规划教材

高等数学

主　编　何春辉　邱长富
副主编　王长征　徐雅玲

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

全书主要内容包括初等函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、无穷级数等．节末有思考题、练习题，章末有习题，书末附有习题答案和附录．

本书适用于高等职业院校、成人高校以及本科院校附属的职业技术学院、继续教育学院和民办高校的学生使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/何春辉，邱长富主编．—北京：北京理工大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-5640-1637-1

Ⅰ．高… Ⅱ．①何…②邱… Ⅲ．高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 123113 号

出版发行／北京理工大学出版社
社 址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮 编／100081
电 话／(010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网 址／http://www.bitpress.com.cn
经 销／全国各地新华书店
印 刷／河北省昌黎县第一印刷厂
开 本／787 毫米×1092 毫米 1/16
印 张／13.5
字 数／315 千字
版 次／2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
印 数／1～3000 册
定 价／25.00 元

责任校对／申玉琴
责任印制／吴皓云

【前言】

高等数学课程是高等职业教育各类专业必修的重要基础课，它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学思想和方法解决实际问题的能力都具有非常重要的作用．为了适应高等职业教育快速发展的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，根据高等职业教育数学教学的特点，在充分汲取高等职业院校和成人高等学校的改革成果和教学经验的基础上，我们组织编写了这本教材．

在本书编写过程中，我们努力体现下述特点：

（1）本书采用以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生数学应用意识、兴趣及能力的培养，培养学生用数学的思想和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，加强数学建模教学内容，注重与实际应用的联系．

（2）本书充分考虑高职高专教育的特点和当前的教学实际，以“必需”、“够用”为度，加强基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求过分复杂的计算和变换．

（3）本书充分考虑高职高专学生的特点，便于学生自学，以符合高职高专学生的认知结构．在内容处理上兼顾学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题能力的培养，对课程的每个内容尽量从几何、数值和解析 3 个方面加以说明．注意有关概念及结论的实际背景说明，力求思路清晰、通俗易懂，立足综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学的能力．

本书由何春辉、邱长富担任主编，王长征、徐雅玲担任副主编，其中第一、二章由李富江执笔，第三章由徐雅玲执笔，第四章由邱长富执笔，第五章由何春辉执笔，第六章由张青执笔，第七章由王丽君执笔，第八章由孟凡伟执笔，第九章由王长征执笔．全书由何春辉统稿．

由于时间仓促及作者水平所限，书中不足之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见并批评指正．

编者

【目录】

第一章

初等函数

函数是描述变量之间依赖关系的数学模型，是高等数学中重要的基本概念之一，初等函数是高等数学的主要研究对象．本章在中学函数知识的基础上，对函数的概念进行总结，为以后的学习奠定必要的基础．

第一节　函　　数

在客观世界中，变量的变化并不是孤立的，一些变量之间按照一定的规律相互依赖，函数关系就是变量之间依赖关系的一种反映．

一、函数的概念

1. 函数的定义

首先通过两个实例来说明变量之间的依赖关系．

例 1.1　球的表面积 S 与半径 r 之间的关系用 $S=4\pi r^2$ 表示，半径 r 可取大于 0 的实数，当球的半径 r 变化时，表面积 S 也会发生相应的变化，这说明表面积 S 依赖于半径 r 变化．

例 1.2　自由落体运动规律为 $h=\frac{1}{2}gt^2$，式中 h 为下降距离，g 为重力加速度，t 为降落的时间，这个公式描述了物体在自由降落的过程中，下降的距离 h 与时间 t 之间的依赖关系．

在以上两个例子中，各个变量的实际意义和解析式虽然不相同，但它们都具有以下特点：所描述的变化过程有两个变量，变量之间有一个确定的依赖关系，或称为对应规则，虽然对应规则的表达式不同，但当其中一个变量在一定范围内取定一个数值时，按照对应规则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应．数学上将变量之间对应关系的实质进行了总结，就得到函数的概念．

定义 1.1　设 x 与 y 是某一变化过程中的两个变量，D 是一个非空数集，如果对于任意的 $x\in D$，按照某个对应关系 f，变量 y 总有唯一确定的值与其对应，则称 f 是定义在数集 D 上的 x 的**函数**，或简称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

数集 D 称为函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**．

当自变量 x 取某一个确定的数值 x_0 时，因变量 y 所得到的确定值称为函数 $y=f(x)$在 x_0

点的函数值，表示为 $f(x_0)$.

当自变量 x 在定义域内取遍每个数值时，对应函数值的集合称为函数的**值域**，记作 $M=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$，如图 1.1 所示.

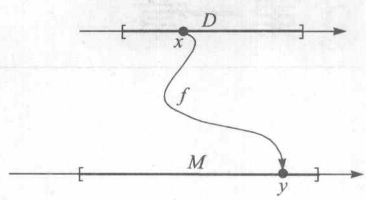

图 1.1

2. 确定函数的两个要素

确定函数的两个要素有函数的定义域 D 和对应规则 f. 只有当两个函数的定义域和对应规则都相同时，才认为两个函数是相同的，而与自变量或因变量用什么字母表示无关. 因此，在研究函数时，除了确定的对应规则之外，还要明确函数的定义域.

如 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$与 $g=t^2$，$t\in(0,+\infty)$表示同一函数，它们的定义域均为全体正数，对应规则都是将自变量的取值进行平方运算.

在通常情况下，函数的定义域并不明确标出，此时函数的定义域是使相应的数学表达式有意义的自变量取值的集合.

求函数的定义域时应遵守以下规则：

（1）代数式中的分母不能为零；

（2）偶次根式内表达式非负；

（3）对数运算中真数的表达式大于零；

（4）反正弦函数和反余弦函数符号后的表达式要在$[-1,\ 1]$之间取值；

（5）表示实际问题的解析式应该符合实际意义.

例 1.3 求 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)+\arcsin(2x-3)$ 的定义域.

解 该函数由 3 部分相加得到，先分别求出每一部分的取值范围，然后求其公共部分即可.

要使 $\sqrt{4-x^2}$ 有意义，应满足 $4-x^2\geqslant 0$，即$-2\leqslant x\leqslant 2$；

要使 $\ln(x^2-1)$ 有意义，应满足 $x^2-1>0$，即 $x<-1$ 或 $x>1$；

要使 $\arcsin(2x-3)$有意义，应满足$-1\leqslant 2x-3\leqslant 1$，即 $1\leqslant x\leqslant 2$.

取上述 3 个范围的公共部分，于是所求函数的定义域为 $(1,\ 2]$.

3. 邻域

在研究变量的变化趋向时，有些概念要涉及自变量的微小变化范围，我们经常使用邻域来描述.

定义 1.2 设 δ 是任一（很小的）正数，称开区间（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$）为 x_0 点的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 记作 N（x_0，δ），即

$$N(x_0,\ \delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ \delta>0\}$$

在有些情况下，考虑函数在 x_0 点附近的变化情况时，并不要求函数在 x_0 点必须有定义，此时研究的范围可以将领域的中心 x_0 去掉，所形成的区间（$x_0-\delta$，x_0）∪（x_0，$x_0+\delta$）称为 x_0 的去心邻域，记为 $N(\hat{x_0},\delta)$.

二、函数的表示

我们已经知道，根据问题的不同特点，函数可以用表格、图形和解析式等方法来表示. 为了研究方便，不同表示法还可以组合使用. 在高等数学中，函数还有以下的表示方式.

1. 隐函数

在研究变量的变化规律时，根据问题的实际特点，用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来描述变量之间的依赖关系可能更方便. 当 x 在某个数集 D 内取定某一数值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则通过方程 $F(x,y)=0$，在数集 D 上可以确定一个函数，称此函数为**隐函数**. 以前研究的函数，因变量 y 都能用含有 x 的解析式表示，称之为**显函数**. 有些隐函数能方便地化成显函数，而有的隐函数则难以化成显函数的形式. 如隐函数 $e^{xy}-\sin(x+y)-y=0$ 则无法化成显函数. 虽然有些隐函数无法化成显函数的形式，但在有些情况下并不影响函数的某些变化规律.

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内，对应关系用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**.

例 1.4　旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品，超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每 1 kg 交费 a 元，超过 50 kg 的部分每 1 kg 交费 b 元，求运费与携带物品质量的函数关系.

解　设物品质量为 x kg，运费为 y 元，依题意，y 与 x 的函数关系应考虑 3 种情况：

（1）物品质量不超过 20 kg 时，

$$y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 20$$

（2）物品质量超过 20 kg 而不超过 50 kg 时，

$$y=a(x-20),\quad 20<x\leqslant 50$$

（3）物品质量超过 50 kg 时，

$$y=a(50-20)+b(x-50),\quad x\in(20,\ 50]$$

于是所求函数是一个分段函数，为

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0,20]\\ a(x-20), & x\in(20,50]\\ 30a+b(x-50), & x>50\end{cases}$$

分段函数在工程技术及日常生活中都会遇到. 分段函数是定义域内的一个函数，不要理解为是多个函数，在求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入到相应取值范围的表达式进行计算.

例 1.5　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2, & x=0\\ 2x, & x<0\end{cases}$，作出函数的图形，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-3)$.

解　函数图形如图 1.2 所示.

$f(2)=2^2+1=5$，　$f(0)=2$，　$f(-3)=2\times(-3)=-6$.

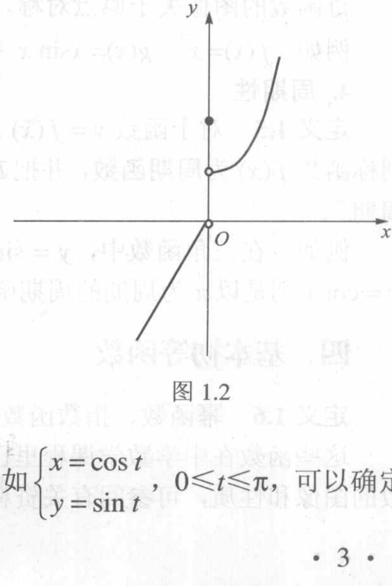

图 1.2

3. 由参数方程确定的函数

用参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$，（$t\in$D）的形式来表示 y 与 x 之间依赖关系的函数，称为**由参数方程确定的函数**.

由参数方程表示的函数，有些可以化成显函数的形式. 如 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant\pi$，可以确定

函数

$$y=\sqrt{1-x^2}，x\in[-1,1].$$

三、函数的几种特性

在研究函数的变化规律时，经常需要考虑函数的部分特性，这些特性都与函数的几何图形有关，有时也称为函数的几何特性.

1. 有界性

定义 1.3 若存在正数 M，使得函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**；否则，若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

在定义域内有界的函数称为**有界函数**，如 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\mathrm{arccot}\, x$ 等都是有界函数.

函数 $f(x)$ 在（a, b）内有界，在图形上表现为 $f(x)$ 在（a, b）内的一段图像必介于两条平行线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间，如图 1.3 所示.

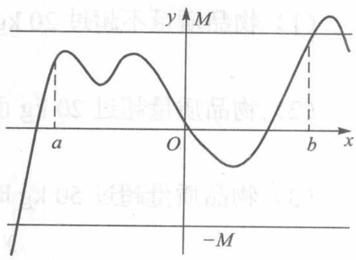

图 1.3

2. 单调性

对于函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**；

若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，而在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义，

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

若 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x)=x^2$，$g(x)=x\sin x$ 都是偶函数，而 $h(x)=x$，$\varphi(x)=x\cos x$ 则是奇函数.

4. 周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对一切 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，并把 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常讲的函数周期指的是函数的最小正周期.

例如，在三角函数中，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

四、基本初等函数

定义 1.6 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

这些函数在中学数学课程里已经学过，此处只从形式上做简要介绍，要详细了解这些函数的图像和性质，可参阅有关资料.

1. 幂函数　$y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$

形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$ 的函数称为幂函数，其中 α 为常数.不同幂函数的定义域和值域以及相应的图像和性质依 α 的取值而不同，但无论 α 取何值，幂函数在（0，+∞）内总有定义.

2. 指数函数　$y=a^{x}(a>0,\ a\neq1)$

形如 $y=a^{x}$ (a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为指数函数，所有指数函数的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，值域均为 $(0,+\infty)$. 其图像均在 x 轴上方，且过（0，1）点，当 $a>1$ 时函数单调递增，$0<a<1$ 时函数单调递减.

3. 对数函数　$y=\log_{a}x\ (a>0,\ a\neq1)$

形如 $y=\log_{a}x$ (a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为对数函数，所有对数函数的定义域均为 $(0,+\infty)$，值域均为 $(-\infty,+\infty)$. 其图像均在 y 轴的右侧，且过（1，0）点，当 $a>1$ 时函数单调递增，$a<1$ 时函数单调递减.

在工程中，常以无理数 e＝2.718 281 828 495 045…作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^{x}=\exp x$，$\log_{e}x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

4. 三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 及余割函数 $y=\csc x$，它们均为周期函数.

5. 反三角函数

反三角函数包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 及反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数在高等数学中占有非常重要的地位，是进一步学习高等数学的基础，我们应该熟练掌握这些函数的定义形式、简单性质和函数图像.

将基本初等函数和常数进行有限次四则运算所得到的函数称为**简单函数**.

五、反函数

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于数集 M 中的每个 y 值，在数集 D 中都有使等式 $y=f(x)$成立的唯一的 x 值与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，即变量 x 是 y 的函数. 这个定义在数集 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的**反函数**. 记为

$$x=f^{-1}(y)$$

此时函数的定义域为 M，值域为 D，并且函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$的图形在同一坐标系内是相同的.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此约定将反函数 $x=f^{-1}(y)$的自变量记号改为 x，因变量的记号改为 y，以后用 $y=f^{-1}(x)$来表示 $y=f(x)$ 的反函数. 反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域仍为 M，值域仍为 D，此时由于改变了变量的记号，因此函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标系内是关于直线 $y=x$ 对称的.

由定义可知，指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$，$a\neq1$)与对数函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0$，$a\neq1$)互为反函数.

六、复合函数

在实际问题中，我们常会遇到由几个基本初等函数组合而成的较为复杂的函数.例如，在

对一个球形气球充气的过程中，球的体积 V 是半径 r 的函数 $V=f(r)$，如果将球的半径 r 设定为充气时间 t 的函数 $r=g(t)$，则球的体积 V 也是充气时间 t 的函数. 为了描述这类依赖关系，引入复合函数的定义.

定义 1.8 设函数 $y=f(u)$的定义域为 U_1，$u=g(x)$的值域为 U_2，如果 $U_1 \cap U_2 \neq \Phi$，对于变量 x，通过函数 $u=g(x)$和 $y=f(u)$，则有确定的 y 与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数，称其为由函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f[g(x)].$$

称变量 u 为**中间变量**.

如 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin^2 x$，而 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin x^2$.

注意，并不是任意两个函数都可以构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1，1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域为$[2，+\infty)$.

在可能的情况下，更多的函数也可以构成复合函数，此时的中间变量为两个或更多.

对于复合函数，应该明确其复合与分解的过程. 函数的复合就是把中间变量依次代入的过程，而分解就是把复合函数分解为几个简单函数，而这些简单函数往往都是基本初等函数，或者是基本初等函数与常数的四则运算的形式.

七、初等函数

由基本初等函数或常数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的并且可以用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

后面所讨论的函数大多数都是初等函数，但分段函数一般不是初等函数.

思考题 1.1

1. 确定一个函数有哪些基本要素？
2. 任意两个函数都能构成复合函数吗？试举例说明.

练习题 1.1

1. 在下列各对函数中，哪两个是相同的函数，为什么？

（1） $y=\lg x^5$ 与 $y=5\lg x$；

（2） $y=\ln x^4$ 与 $y=4\ln x$；

（3） $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

2. 求下列函数的定义域.

（1） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$；　　（2） $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1 &, x\leqslant -1 \\ 2x+1 &, x>-1 \end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(4)$.

第二节　函数模型

用数学方法解决实际问题时，先要建立函数关系，或称为建立数学模型，为此需要明确实际变化过程中的自变量与函数，然后根据题意建立等式，从而得出函数关系.

一、数学模型的概念

人类的生活是丰富多彩的，在千变万化的现实世界，有些实际问题是较为复杂的，人们经常利用模型的思想来简化问题，以便更好地认识和利用客观世界的规律性. 在社会实践活动中，人们所关心和研究的实际现象称为原型，在科技领域有些问题用系统来描述，如电力系统、生态系统，有些问题则用过程来描述，如导弹飞行过程、污染物的扩散过程等.

针对现实世界的原型，根据一些特定的现象，为实现某个特定的目的，根据原型特有的内在规律，将原型的信息进行必要的假设、简化和提炼，运用适当的数学工具，采用形式化的语言，概括地描述原型的一种数学结构称为**数学模型**.

利用数学模型，可以解释原型的现实状态，或者预测未来的变化趋势及结果，或者提供处理对象的最优决策方案或控制方法. 数学模型既源于现实又高于现实，是对现实变化规律的一种模拟，在数值上可以作为公式应用，并且可以推广到与原型相近的一类问题，可以作为描述某个状态或过程的数学语言，可以转化为算法语言，利用程序语言编写出计算机程序，并用计算机进行准确的计算和处理.

二、建立数学模型的过程

建立一个实际问题的数学模型，需要一定的观察力和想象力，要突出影响实际状态的主要因素，去掉无关因素或次要因素，做出适当的抽象和简化. 解题过程可以分为表述、求解、解释和验证几个阶段，并通过这些阶段实现从原型到数学模型，再从数学模型到原型的循环. 这个流程如图 1.4 所示.

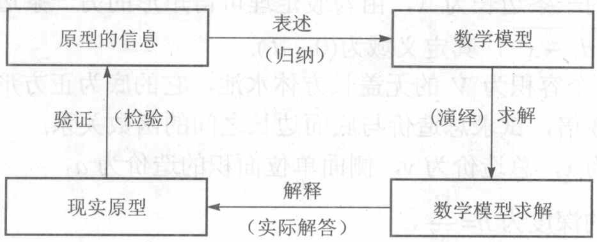

图 1.4

表述：由原型出发明确建立数学模型的目的，对原型表现出来的信息进行分析和比较，舍弃次要因索，抓住主要因素，明确各主要因素在问题中的作用，并以变量和参数的形式表示这些因素，运用有关的专业知识、数学概念、数学符号和表达式，将实际问题转化为数学问题，用数学语言明确地表述出来. 如力学中的自由落体运动，主要的因素是时间与下降的距离，而物体的形状和大小则可以忽略.

求解：选择适当的方法求解数学问题，如利用解方程或方程组、作图证明或逻辑运算、

数值计算等方法，或者利用相应的数学软件如 Matlab、Mathematica 等求解.

解释：将数学问题的解转译为更易理解的非数学语言，对实际问题进行解答.

验证：检验利用数学模型解决问题的正确性. 验证一个模型是否反映了客观实际，需要对模型的解进行误差分析、对数的稳定性和灵敏度进行分析，并与实际观测情况进行比较，如果模型的结果与实际状况相吻合或基本一致，这表明数学模型是符合现实原型的，可以将它应用于实际问题，或者根据需要再进行深入的分析与讨论. 如果模型的结果与实际问题不相符合，表明这个模型不能用于所研究的实际问题，这时就需检查关于问题的假设是否恰当，对假设给出必要的修正，再重复前面的建模过程，直到建立的数学模型符合现实原型为止.

三、函数模型的建立

用数学方法解决实际问题时，先要建立函数关系，或称函数模型，然后利用适当的数学工具加以解决. 建立函数模型的一般步骤为：

（1）分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用不同的字母来表示，并确定哪个变量为自变量.

（2）根据问题所给的条件，运用数学知识或结合专业知识，确定变量之间的等量关系.

（3）写出函数的具体解析式，并指明函数的定义域.

例 1.6 设存款金额本金为 p，计息期的利率为 r，n 为计息期数，R 为计息期满的利息，I 为 n 个计息期应付的单利，A 为本利和，求本利和 A 与计息期 n 的函数模型.

解 计息期满的利息=本金×计息期的利率

即 $$R=pr$$

n 个计息期应付的单利 $$I=nR=npr$$

则本利和 A 与计息期 n 的函数模型为 $A=p+I=p+npr=p(1+nr)$

例 1.7 将直径为 d 的圆形木料锯成截面为矩形的木材，求出矩形截面的面积 S 与其中一条边长之间的函数模型.

解 设矩形截面的一条边长为 x，由勾股定理可得矩形的另一条边长为 $\sqrt{d^2-x^2}$，则矩形截面的面积为 $S=x\sqrt{d^2-x^2}$，其定义域为$(0, d)$.

例 1.8 要建造一个容积为 V 的无盖长方体水池，它的底为正方形，如池底的单位面积造价为侧面积造价的 3 倍，试求总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位面积的造价为 a，

由已知可得水池的深度为 $h=\dfrac{V}{x^2}$，

侧面面积为 $4xh=4x\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，

则总造价与底面边长的关系为 $y=3ax^2+4a\dfrac{V}{x}\ (0<x<+\infty)$.

思考题 1.2

1. 描述建立函数模型的方法和步骤.
2. 试述用数学模型解决实际问题的流程.

练习题 1.2

1. 某厂生产的 500 件产品，每件定价 30 元，销售量在 200 件以内时，按原价出售，超过 200 件时，超过部分按 9 折出售，试求销售总收入与销售量的函数关系.

2. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，将它的全面积表示成底面半径的函数.

3. 将一块边长为 a 的正方形铁皮的四角各剪去一个相等的小正方形，然后折成一个无盖的盒子，试求盒子的容积与剪去的小正方形边长的函数关系.

4. 某市出租汽车的起步价为 5 元，超过 3 km 时，超出部分每千米付费 2 元，试求付费金额与乘车距离的函数关系.

习　题　一

1. 在下列各对函数中，哪两个是相同的函数，为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $f(x)=x-1$；

（2）$y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；

（3）$y=\ln\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$；

（4）$y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

（5）$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{\sin x}{1-x}$；　（2）$y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{3x-x^2}}$；　（3）$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

（4）$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$；　（5）$y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$；

（6）$y=\arcsin(2x-5)$；　（7）$y=\lg(x^2-5x+6)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant -1 \\ \sqrt{x^2+1}, & -1<x\leqslant 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$.

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1，2)$，求函数 $f(2x-1)$ 的定义域.

5. 确定下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=\sqrt[3]{x^2\sin x}$；　（2）$f(x)=a^x-a^{-x}$；

（3）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　（4）$f(x)=x^4+\cos x$.

6. 求下列函数的反函数.

（1）$f(x)=\sqrt{2x}$；（2）$f(x)=x^2$　$(0\leqslant x<+\infty)$；（3）$f(x)=2^x+1$；

（4）$y=\dfrac{2x}{x-1}$；　（5）$y=\ln\dfrac{1}{x+2}$.

7. 设$f(\sin x)=\cos 2x+1$，求$f(\cos x)$.

8. 指出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=\cos 2x$；（2）$y=\sin^5 x$；（3）$y=\sqrt{3x-2}$；（4）$y=\sin\sqrt{x}$；

（5）$y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$；（6）$y=(1+x)^2$；（7）$y=\sqrt[3]{\sin x^2}$；（8）$y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

（9）$y=\ln(x^2-\sin x)$；（10）$y=2^{\sqrt{\sin x}}$.

第二章

极限与连续

极限是高等数学的一个重要概念，也是学习高等数学的一个重要工具，高等数学的后续概念如连续、导数、定积分等都是用极限来描述的. 连续则是很多函数的一个重要形态，连续函数是高等数学的主要研究对象. 本章首先介绍极限的概念，极限的运算方法，然后研究函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质.

第一节　极限的概念

在客观世界中，我们经常会遇到一些变量的变化趋势问题，例如手机电池充电后，在下一次充电之前，电池的电量会变得越来越小. 又如烧热的铁块放在温度为 T 的空气中冷却，铁块的温度将随着时间的无限增大而趋于常数 T. 这两个问题说明在自变量的某一变化过程中，函数值趋向于某个确定的常数. 为此，我们需要研究极限的概念.

一、数列的极限

1. 数列的概念

定义 2.1　将自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$的函数值按自变量 n 由小到大的顺序排成的一列数

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

称为**数列**. 记为$\{u_n\}$，其中 $u_n=f(n)$为数列$\{u_n\}$的**通项**或**一般项**. 由于一个数列$\{u_n\}$完全由其一般项 u_n 所确定，有时也将数列$\{u_n\}$简写成 u_n.

定义 2.2　对于数列$\{u_n\}$，若存在一个常数 $M>0$，使得$|u_n|\leqslant M$ ($n=1，2，\cdots$)恒成立，则称数列 u_n 为**有界数列**，或称**数列有界**.

如果数列$\{u_n\}$有界，也可理解成存在两个数 M 和 m，使得 $m\leqslant u_n\leqslant M$，也称 M 为数列的**上界**，m 为数列的**下界**.

定义 2.3　对于数列$\{u_n\}$，若数列的各项满足 $u_n\leqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调增加的数列**；若数列的各项满足 $u_n\geqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调减少的数列**. 单调增加的数列或单调减少的数列统称为**单调数列**.

下面通过几个实例说明数列单调的情况：

$\{u_n\}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{2^n}$，$\cdots$为单调减少的数列；