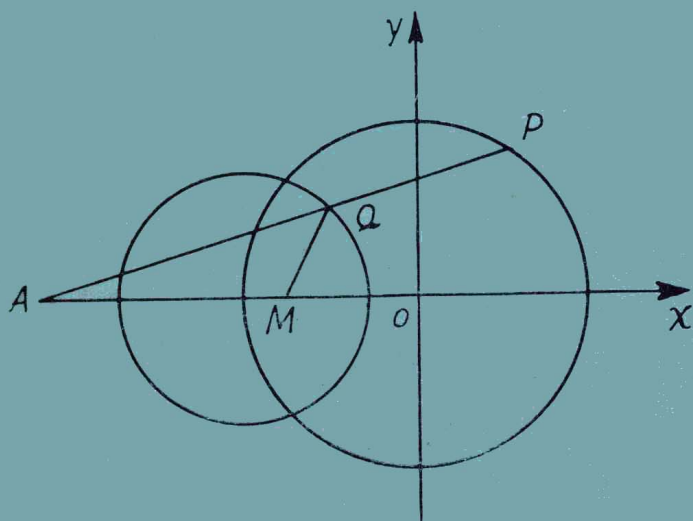


代数

北京市教育科学研究所 编

《高中数、理、化教与学指导丛书》



教育科学出版社

高中数、理、化教与学指导丛书

代 数

徐有标 刘治平 付以伟 编著

教育科学出版社

责任编辑：余淳林

封面设计：王四海

高中数、理、化教与学指导丛书

代 数

北京市教育科学研究所 主编

教育科学出版社出版

(北京·北太平庄·北三环中路 46 号)

新华书店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本：787 毫米×1092 毫米 1/32 印张：19.25 字数：431,000

1990 年 6 月 第 1 版 1990 年 6 月第 1 次印刷

印数：00,001—11,000 册

ISBN 7-5041-0344-6

G · 311 定 价：7.40 元

前 言

在努力提高中小学教育教学质量，不断改革陈旧的教育思想和教学方法的过程中，我市有一批中学骨干教师，他们在各级教育行政部门的支持下，以辩证唯物主义的认识论为指导思想，以教育心理学、逻辑学和科学方法论为理论基础，根据各学科的特点，对“教材的处理、教法的选择、知识的理解、师生双边活动的特点、理论与实践的关系、掌握知识与发展能力、解题操作与形成技能技巧”等问题，进行了不同程度的教改实验，并取得了可喜的成果。1983年，我所教学科学实验组的同志，在他们教改实验的基础上，与其中十几位高中数、理、化教师，按照教育科学实验的方法和步骤，又作了深入的探索，使这部分同志的实验工作日臻科学化、系列化。

为了使这些同志的教改成果有助于面上的教学工作，在教育科学出版社的支持下，我们编了这套《高中数、理、化教与学指导丛书》。这本《代数》是其中的成果之一。

本书的主要特点是，根据国家教委颁布的《高中数、理、化教学纲要》的要求，结合高中数学教改实践的经验，对如何教好与学好高中数学，提出了自己的看法、做法和教学建议。全书结构完整、内容具体、观点明确、方法实用、教与学兼顾。

全书各章基本上是按以下七个方面来阐述的：

一、本章知识的历史演进。作者从知识的发展由来，简

要地介绍了史料，以便教师从历史的角度来看本章知识的来龙去脉，加深对这部分知识的理解。

二、本章知识在该知识系统中的地位和作用。作者以整体的观点，阐述了本章知识在该系统中所处的环节，以利教师更好地发挥本章知识的承上启下的作用。

三、知识结构与教学目的。作者阐述了本章知识构成的相互关系，以利教师更好地把握重点，明确层次，有利于比较和记忆；并简练地提出了本章知识的教学目的，有利于教师集中力量，围绕目的，开展教学活动。

四、学生学习本章知识时易出现的错误。作者从多年的教研实践中积累、概括出学生在学习本章知识时出现的一些典型错误，这为教师教好本章知识，提供了具体背景。

五、教学建议。这是作者要说的重点。书中提出的各项教学建议，是广大教师在教学中经常遇到的一些问题。如对教材处理、教法选择、知识理解、概念引出、意境创立、难点突破、师生活动、知识掌握、能力形成、解题操作、技能技巧、教书育人等，从理论与实践的结合上作了不同程度的阐述。这对教师开阔教学思想是十分有益的。

六、能力培养。作者根据本章知识的特点，结合自己的教改实践，对于培养哪些能力，以及怎样去培养能力，作了探索性的回答。

七、例题分析。全书各章均精选了一些为本章教学目的服务、对巩固知识、加深理解、发展智力、培养能力等具有一定作用的典型例题。对这些例题的解法都作了详细的分析。这对提高解题能力会起到一定的促进作用，并可供教师在教学中举例选用。

本书第一、二、三、四、五、六章由徐有标撰写；第七、八章

由刘治平撰写;第九、十章由付以伟撰写。全书由徐有标统一修订。

鉴于我们水平有限,本书难免存在着缺点和错误,我们热切希望广大读者予以批评指正。

北京市教育科学研究所

一九八九年十一月

目 录

第一章 集合	1
一、集合论的历史演进.....	1
二、集合论在中学数学中的地位和作用.....	1
三、知识结构与教学目的.....	3
四、学生学习集合论时易出现的错误.....	4
五、教学建议.....	7
(一) 集合定义.....	7
(二) 关于符号“ $\in$ ”、“ $\subseteq$ ”的教学.....	10
(三) 有限集、无限集、空集.....	11
(四) 子集、包集、真子集、真包集、等集.....	13
(五) 交集、并集、补集.....	14
(六) 巩固新形成的认知结构.....	17
六、能力的培养.....	21
(一) 抽象概括能力.....	21
(二) 逻辑思维能力.....	22
(三) 集合运算能力.....	23
七、例题分析.....	25
第二章 函数	38
一、函数定义的历史演进.....	38
(一) “古典”定义.....	38

(二) 传统定义	38
(三) 近代定义	39
二、函数在中学数学中的地位和作用	40
三、知识结构与教学目的	41
四、学生学习函数时易出现的错误	43
五、教学建议	55
(一) “对应”与“单值对应”	55
(二) 函数与单值函数	57
(三) 单映射与满映射	59
(四) 一一映射	61
(五) 对应、映射与函数的关系	64
(六) 反函数	64
(七) 奇函数与偶函数	70
(八) 幂函数图象的分析方法	75
(九) 指数函数与对数函数	79
(十) 对数换底公式	82
六、能力的培养	85
七、例题分析	89
第三章 数学归纳法	117
一、数学归纳法的历史演进	117
二、数学归纳法在中学数学中的地位和作用	118
三、知识结构与教学目的	120
四、学生学习数学归纳法时易出现的错误	121
五、教学建议	125
(一) 概念引出	125
(二) 数学归纳法的原理分析	126

(三) 为什么证明时两步缺一不可.....	128
(四) 验证第一步 n_0 的取值问题	130
(五) 在动态中理解原理.....	131
六、能力培养.....	136
(一) 递推归纳思维能力.....	136
(二) 演绎推理能力.....	136
(三) 简缩思维能力.....	136
七、例题分析.....	137
第四章 不等式	151
一、不等式符号的历史演进.....	151
二、不等式在中学数学中的地位和作用.....	153
三、知识结构与教学目的.....	154
四、学生学习不等式时易出现的错误.....	156
五、教学建议.....	161
(一) 不等式的一些基本概念.....	161
(二) 不等式定义的基础及实数的有关性质.....	164
(三) 不等式的基本性质.....	166
(四) 不等式的八种证明方法.....	173
(五) 含有绝对值不等式的性质.....	186
(六) 解不等式.....	188
(七) 解不等式的几种主要方法.....	195
(八) 解含有绝对值的不等式.....	206
六、能力培养.....	209
(一) 观察能力.....	209
(二) 转化能力.....	210
(三) 深化能力.....	210

七、例题分析	211
第五章 行列式和线性方程组	223
一、行列式的历史演进	223
二、行列式和线性方程组在中学数学中的地位和作用	225
三、知识结构与教学目的	225
四、学生学习行列式和线性方程组时易出现的错误	228
五、教学建议	231
(一) 二阶行列式和二元线性方程组	231
(二) 关于二元线性方程组的讨论	232
(三) 三阶行列式及其性质	234
(四) 按一行(或一列)展开三阶行列式	239
(五) 三元线性方程组	240
(六) 三元齐次线性方程组	245
(七) 用顺序消元法解线性方程组	246
(八) 做好总结归纳工作	247
六、能力培养	248
(一) 正逆思维能力	249
(二) 变通能力(或称变形能力)	250
(三) 应用能力	252
七、例题分析	263
八、附录	286
第六章 复数	291
一、复数集的历史演进	291

二、复数在中学数学中的地位和作用	295
三、知识结构与教学目的	298
四、学生学习复数时易出现的错误	302
五、教学建议	307
(一) 复数概念的引出	308
(二) 复数的代数式	311
(三) 虚数单位 i	312
(四) 复数的模与辐角	313
(五) 复数的三角函数式与指数式	314
(六) 复数的相等与共轭	318
(七) 复数的加减运算	321
(八) 复数的乘除运算	325
(九) 复数的乘方与开方	329
(十) 关于复数集内的大小问题	331
(十一) 关于复数开方多值性与运算唯一性的处理	334
(十二) 关于复平面与笛卡尔平面的联系与区别	338
六、能力培养	338
七、例题分析	343
第七章 排列,组合,二项式定理	360
一、排列,组合,二项式定理的历史演进	360
二、排列,组合,二项式定理在中学数学中的地位和作用	362
三、知识结构与教学目的	363
四、学生学习排列,组合,二项式定理时易出现的错误	

.....	365
五、教学建议.....	374
(一) 两个基本原理.....	374
(二) 排列、组合.....	376
(三) 排列数、组合数.....	378
(四) 组合数的两个性质.....	380
(五) 几个公式的恒等变形.....	382
(六) 排列、组合的应用题.....	386
(七) 二项式定理.....	390
六、能力的培养.....	393
(一) 抽象概括能力.....	393
(二) 逻辑演绎能力.....	394
七、例题分析.....	396
第八章 一元多项式和高次方程	417
一、一元多项式和高次方程的历史演进.....	417
二、一元多项式和高次方程在中学数学中的地位和作用.....	420
三、知识结构与教学目的.....	421
四、学生学习一元多项式和高次方程时易出现的错误.....	424
五、教学建议.....	426
(一) 一元 n 次多项式的有关概念.....	426
(二) 综合除法.....	428
(三) 余数定理, 因式定理.....	431
(四) 利用综合除法, 因式定理分解因式.....	436
(五) 一元 n 次方程根的个数.....	445

(六) 一元 n 次方程根与系数的关系	447
(七) 实系数方程虚根成对定理	455
六、能力的培养	459
(一) 代数推理论证能力	459
(二) 运算能力	460
(三) 学习迁移能力	462
七、例题分析	463
第九章 数列	478
一、数列在中学数学中的地位和作用	478
二、知识结构与教学目的	479
三、学生学习数列时易出现的错误	481
四、教学建议	487
(一) 数列概念的教学	487
(二) 等差数列	493
(三) 等比数列	495
(四) 数列求和	498
(五) 递归数列的教学	509
五、能力的培养	518
(一) 逻辑概括能力	518
(二) 逻辑表达能力	520
(三) “转化”能力	520
六、例题分析	522
第十章 极限	546
一、极限的历史演进	546
二、极限在中学数学中的地位和作用	547

三、知识结构与教学目的·····	548
四、学生学习极限时易出现的错误·····	549
五、教学建议·····	554
(一) 数列极限定义·····	554
(二) 数列极限四则运算·····	559
(三) 无穷递缩等比数列·····	565
(四) 函数极限定义·····	568
(五) 函数极限四则运算·····	571
(六) 两个重要函数的极限·····	574
六、能力的培养·····	580
(一) 逻辑推理能力·····	580
(二) 恒等变形能力·····	582
(三) 辩证思维能力·····	584
七、例题分析·····	585

第一章 集 合

一、集合论的历史演进

集合论作为现代数学的一个分支,其出现是比较晚的,但人们对集合概念的认识则比较早.自古希腊时代以来,集合这个概念一直被数学家和哲学家们所注意.由于那时对无穷集合的认识受到限制,再加上古典的数学分析无需以集合论作为其理论基础,因而集合的理论没有得以发展.

到了十九世纪末,现代科学的迅猛发展向古典的数学分析提出了挑战.为了适应这一潮流的需要,经数学家们的不懈努力,完成了现代数学分析的一套严密的逻辑结构,从而使数学知识满足了当时科技发展的需要.现代数学分析的严密化要求数学家们必须理解实数集合的结构.为了解决这个问题,康托尔(德国人,1845—1918年)引进了关于无穷点集的一些概念.与此同时,康托尔对三角级数和傅立叶(Fourier)级数的唯一性问题产生了极大兴趣,他创造性地运用了有关点集的概念,证明了某些函数 $f(x)$ 对一切 x 可用三角级数表示,这就为用集合论的观点来证明当时数学分析上存在的某些理论问题指明了方向.因此,现在人们称康托尔是科学的集合论的奠基人,这是当之无愧的.

二、集合论在中学数学中的地位和作用

数学的抽象性和应用的广泛性是相互联系的,现代数学

尤其是这样。现在若是仅仅研究数字和几何图形已远远不能满足科学技术发展的需要,而要研究更多、更广泛的对象就必须以更普遍的理论作为基础,集合论就是这样的理论。它是现代数学的基础理论。现在集合论不但在数论、代数学、实变函数论、拓扑学等方面已产生了深远的影响,而且它也是概率统计、电子计算机、应用数学等方面不可缺少的理论基础。因此对于现代科技人员来说,若不熟悉集合论的原理,就不可能对近代数学获得正确的理解。

近年来,各国中学数学教材中都增添了或渗透了“集合”的内容,这样可以扩大中学生的知识面,加深对某些传统数学内容的理解,有利于进一步学习数学和现代科学技术。中学教学实践已证明,运用集合的思想进行数学概念教学,有利于对概念的本质属性(内涵)及其所反映的具体对象的理解;有利于讲清四种命题之间的一些逻辑联系;有利于丰富学生对数学研究对象的认识;有利于培养学生既简洁又严密的思维品质;有利于发展智力,培养能力。例如运用集合的运算来处理某些应用题时就有这一特点。如某班有学生 45 人,其中 20 个学生有哥哥, 10 个学生有姐姐,有哥哥也有姐姐的学生只有一人,求下列学生人数:

- (1) 有哥哥没有姐姐; (2) 有姐姐没有哥哥;
(3) 有哥哥或有姐姐; (4) 哥哥、姐姐都没有。

解: 设 $S = \{\text{某班学生}\}$, $A = \{\text{该班有哥哥的学生}\}$,

$B = \{\text{该班有姐姐的学生}\}$,

则 $A \cap B = \{\text{该班有哥哥也有姐姐的学生}\}$

又设 $n(S)$ 、 $n(A)$ 、 $n(B)$ 、 $n(A \cap B)$ 分别表示集合 S 、 A 、 B 、 $A \cap B$ 的元素个数,由题设知: $n(S) = 45$, $n(A) = 20$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 1$

于是 (1) 有哥哥无姐姐学生数 $= n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 1 = 19$

(2) 有姐姐无哥哥学生数 $= n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 1 = 9$

(3) 有哥哥或有姐姐学生数 $= n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 10 - 1 = 29$

(4) 哥哥姐姐都没有的学生数 $= n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 45 - 29 = 16$

由此可见, 集合论的有关初步知识在中学课程里已经到了不得不讲的时候了。

三、知识结构与教学目的

本章的教学内容是: 学生在初中学习基本数集(自然数集、整数集、有理数集、实数集)与点集(几何图形)的基础上, 正式介绍集合的定义、集合的表示法, 并讨论子集、真子集、等集、包集、真包集、交集、并集、补集、全集的概念以及它们的一些简单性质。还介绍了集合的应用。

本章的重点是有关集合的基本概念。难点是有关集合的各个基本概念的内涵以及它们相互间的联系和区别。

知识逻辑结构图如下, 见图 1-1 (图中双箭头表示前后有推出关系; 单箭头表示前后有相互关系。两者亦含学习进程的顺序。以下各章含意相同):

教学目的:

1. 引导学生建立新的知识结构, 使学生理解集合、子集、真子集、包集、真包集、等集、交集、并集、补集、全集等概念, 并能正确使用有关的术语和符号。