21st CENTURY
实用规划教材

21世纪全国高等院校实用规划教材

高等数学学习指导

主　编　朱宝彦　刘玉柱
副主编　王小平　戚　中　王金宝
主　审　范弘毅

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校实用规划教材

高等数学学习指导

主　编　朱宝彦　刘玉柱

副主编　王小平　戚　中　王金宝

参　编　闫红梅　孙海义　隋　英

顾艳丽　赵恩良　李汉龙

高兴燕　付春菊

主　审　范弘毅

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前该门课程的实际教学情况编写，凝结了编写组教师多年的教学经验。本书与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)教材同步，共分12章，每章由教学基本要求、本章导学、知识点精要、疑难问题及常见错误例析、典型例题解析、同步习题及解答和数学史料7个部分组成。本书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出重点，质疑难点，既可以帮助学生解决教材中的一些重点难点问题，又能使学生学会举一反三、触类旁通，提高分析问题与解决问题的能力。

本书是高等数学学习指导书，可作为理工科院校本科或专科学生的学习指导书或考研参考书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/朱宝彦，刘玉柱主编. —北京：北京大学出版社，2008.8

(21世纪全国高等院校实用规划教材)

ISBN 978-7-301-14135-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①朱…②刘…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第118768号

书　　名：高等数学学习指导
著作责任者：朱宝彦　刘玉柱　主编
策 划 编 辑：房兴华
责 任 编 辑：魏红梅
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-14135-9/O · 0758
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787mm×1092mm　16开本　20印张　468千字
2008年8月第1版　2009年1月第2次印刷
定　　价：33.00元

前 言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用。

随着科学技术的迅速发展，高等学校各个专业对高等数学的要求不断提高，数学正在日益渗透到各个专业领域，已成为人们学习和研究各门专业知识的重要工具。掌握好高等数学的基础知识、基本理论及基本技能和分析方法，对学生后续课程的学习有很大帮助。同时，高等数学也是工科院校硕士研究生入学考试的必考科目。由于高等数学的内容繁多，习题浩如烟海，刚入大学校门的学生学习时会产生一定的难度。为了克服这种困难，我们组织了具有丰富教学经验的教师，以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前高等数学课程的实际教学情况，与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)教材同步，编写了《高等数学学习指导》一书。本书集编写组教师多年的教学经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中。它将会成为学生学习《高等数学》的良师益友。

本书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出重点，质疑难点，既可帮助学生解决教材中的一些难点内容，又能使学生学会举一反三、触类旁通，提高分析问题与解决问题的能力。

全书各章分为教学基本要求、本章导学、知识点精要、疑难问题及常见错误例析、典型例题解析、同步习题及解答和数学史料 7 个部分。

(1) 教学基本要求：根据教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》，明确指出对各章教学内容的要求，使学生了解教学目标。

(2) 本章导学：指出本章知识的结构和内在联系，以及与其他知识点的联系，同时指出本章要掌握的主要内容以及学习这些内容的方法。

(3) 知识点精要：给出该章的主要定义及重要命题，补充书上没有但在学习过程中经常利用的一些重要结论。

(4) 疑难问题及常见错误例析：对学生在学习过程中遇到的疑难问题及常见错误用例题或问答方式进行分析和解答，以帮助学生加深对概念的理解和运算方法的掌握。

(5) 典型例题解析：列举该章的重点题型，并归纳总结各种题型的解决方法、技巧和注意问题，以帮助提高学生分析问题和解决问题的能力。

(6) 同步习题及解答：每章最后都给出与教学内容同步的练习题及详细的解答，以帮助学生巩固内容，检查学习效果。

(7) 数学史料：对本章所涉及的数学内容的产生、发展进行简单介绍，以提高学生对数学的学习兴趣。

本书第 1 章由朱宝彦编写，第 2 章由闫红梅编写，第 3 章由王金宝编写，第 4 章由孙海义编写，第 5 章由隋英编写，第 6 章由顾艳丽编写，第 7 章由赵恩良编写，第 8 章由李汉龙编写，第 9 章由高兴燕编写，第 10 章由刘玉柱编写，第 11 章由付春菊编写，第 12 章

由王小平，戚中编写，全书由朱宝彦、刘玉柱统稿，范弘毅、朱宝彦、刘玉柱、戚中审稿。另外，本书的编写工作得到了沈阳建筑大学教务处领导和北京大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中如有不妥之处，敬请专家、同行和读者批评指正，以便不断完善。

编者

2008 年 5 月

目　录

第1章 函数与极限

1.1 教学基本要求

(1) 理解函数的概念；了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；理解复合函数的概念，了解反函数的概念；会建立简单实际问题中的函数关系式.

(2) 理解极限的概念；了解极限的$\varepsilon - N$、$\varepsilon - \delta$定义，并能在学习过程中逐步加深对极限思想的理解；了解极限的性质(唯一性、有界性、保号性)；掌握极限的四则运算法则，会用变量代换法则求某些简单函数的极限；了解两个极限存在准则(夹逼准则、单调有界收敛准则)；会正确运用两个重要极限求某些函数的极限.

(3) 了解高阶、等价无穷小等概念；会用等价无穷小求极限.

(4) 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念，了解函数间断点的概念，会判别函数间断点的类型.

(5) 了解初等函数在其定义区间内连续的结论，并会用此结论求函数在连续点处的极限；了解闭区间上连续函数的性质(有界性和最大、最小值定理，零点定理和介值定理)，会用这些性质解决有关问题.

1.2 本 章 导 学

本章主要介绍函数、极限、连续等基本概念及其性质，它们是学习高等数学的基础，也是从初等数学过渡到高等数学的桥梁.

函数是微积分学的研究对象，函数概念的实质是变量之间的一种对应关系，这种关系使得当其中一个变量给定时，另一个变量就能被唯一确定，这就是函数. 函数部分重点是复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算. 这里，主要是要掌握求函数的定义域的方法以及利用函数的概念求函数表达式的方法，这些方法都是在初等数学中所熟悉的方法.

极限理论是微积分的基础，研究函数的性质的实质是研究各类极限，如连续、导数、定积分等. 所以极限不仅是本章的重点也是本课程的重点. 在学习这部分内容时，要求会判断函数极限的存在，掌握运用极限存在准则、两个重要极限以及极限的四则运算法则求极限的方法. 注意不仅在本章中有很多求极限的方法，而且在后续章节中还要介绍一些求极限的方法(例如，利用洛必达法则、利用导数定义、利用定积分定义、利用收敛级数性质等求极限的方法)，读者在学习过程中，要善于适时归纳总结，以便寻求最简单的方法求极限.

由于作为本章重点内容的极限问题都可以归结为无穷小量的问题，所以无穷小的估计和分析也是极限方法的重要部分. 要求读者会确定无穷小的阶数并会比较无穷小的阶；熟记常见的等价无穷小，并会应用等价无穷小代换求极限.

连续函数或除若干点外是连续的函数是高等数学研究的主要对象. 而函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数的连续及函数的间断点类型等问题本质上还是求极限. 因此，

连续性也是本章的重点内容之一，要求掌握判定函数连续性的方法，并能指出所给函数的连续区间；会判断间断点的类型；注意在讨论分段函数在分界点处的连续性时，要用定义来讨论；会用闭区间上连续函数的性质判定方程根的存在，会证明相关的证明题.

由于后续各章内容仍然涉及极限、连续的概念以及闭区间上连续函数的性质等，所以学好本章内容会为后续章节的学习打下良好的基础.

1.3 知识点精要

1.3.1 函数

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 若对于每个数 $x\in D$，按一定的对应关系 f，变量 y 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

构成函数关系的决定因素一个是对应关系 f，另一个是定义域 D，只有两者都相同时，才表示同一个函数.

求函数的定义域和函数表达式是这部分的重要题型.

2. 函数的几种特性

1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，如果 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in X\subset D$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

注意： 无界与无穷大是不同的概念，例如 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间(0，1)无界，但不是无穷大.

2) 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subset D$，如果对 I 中任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少).

3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

4) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，若存在一个不为零的数 l，使得 $\forall x\in D$，有 $x\pm l\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的周期，一般指最小正周期.

3. 反函数和复合函数

1) 反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，值域为 W，若 $\forall y\in W$，$\exists x\in D$ 使得 $f(x)=y$，如此确定了 x 是 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，但习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

2) 复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_1，而函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_2，值域为 R_2，且 $R_2\subset D_1$，则称 $y=f[\varphi(x)]\,(x\in D_2)$ 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数.

注意：构成复合函数是有条件的，只有当函数 $u=g(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，或它们有交集时才能构成复合函数.

4. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤而构成的并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

一般来讲分段函数不是初等函数，但是，有些初等函数形式上是分段函数，实质上是初等函数(见例 1.1).

1.3.2 极限

1. 数列的极限

1) 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，此时称数列 $\{x_n\}$ 收敛；若不存在这样的数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 发散.

2) 数列极限的性质

(1) (唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限唯一.

(2) (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它一定有界.

(3) (保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$ (或 $a<0$)，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$).

*(4) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子数列也收敛于 a.[注]

3) 数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$ (当 $y_n\neq0\ (n=1,2,\cdots),B\neq0$ 时).

4) 数列极限的存在准则

(1) (夹逼准则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，且 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) (单调有界数列收敛性准则) 单调有界数列必有极限.

2. 函数的极限

1) 函数极限的定义

对于函数 $f(x)$，给出下面几个典型的极限和单侧极限定义.

注：*号表示该项内容不在教学大纲要求范围内，后同.

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限 A，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时有极限 A，即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有左极限 A，即 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有右极限 A，即 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 存在且相等，即 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

2) 函数极限的性质

下面给出当 $x\to x_0$ 时函数极限的性质，其他形式极限的性质只要相应做一些修改即可得出.

(1) (唯一性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则这个极限唯一.

(2) (局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) (局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ (或 $A<0$)，则存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

由此可得推论：若在 x_0 的某个去心邻域 $U(x_0)$ 内 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

(4) (函数极限与数列极限的关系) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且 $x_n\neq x_0 (n\in N^+)$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

3) 函数极限的运算法则及两个重要极限

(1) 函数极限的四则运算法则.

以下运算法则对 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 均成立.

若 $\lim f(x)=A$ 和 $\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$，$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

注意： 上述法则成立的条件是各自的极限都存在，否则不可以进行极限的四则运算.

(2) 复合函数的极限运算法则.

设函数 $f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成的，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且 $\exists\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

4) 函数极限的存在准则及两个重要极限

(1) (夹逼准则) 若当$x\in \mathring{U}(x_0, \delta)$(或$|x|>X$)时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=a$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=a$.

(2) (单调有界函数收敛性准则) 若函数$f(x)$在点x_0的某个左邻域内单调有界，则$f(x)$在点x_0的左极限$f(x_0^-)$必存在.

注意： 自变量的其他变化过程($x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$)的准则形式，请读者总结.

5) 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，特点是$\dfrac{0}{0}$型极限，并且$\sin[\cdot]$与分母的变量$[\cdot]$形式相同；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，特点是$1^\infty$型极限，括号中1后的变量(包括符号)与幂互为倒数.

3. 无穷小与无穷大

1) 无穷小与无穷大的定义

(1) 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，则称函数$\alpha(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小.

(2) 若对$\forall M>0$，$\exists\delta>0$(或 $X>0$)，当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时，总有$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大，记为$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$.

2) 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；若$f(x)$为无穷小且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

3) 无穷小与函数极限的关系

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$(其中$\alpha$是当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小).

4) 无穷小的比较

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\beta\sim\alpha$.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小.

若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

当$x\to 0$时，有下面常用的等价无穷小公式.

$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x)\sim x$；

$e^x-1\sim x$；$a^x-1\sim x\ln a$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

5) 等价无穷小代换

(1) 若$\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

(2) 设当$x\to 0$时，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\gamma\sim\gamma'$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=a\neq 1$. 如果$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'}$存在(或无穷大)，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$存在(或无穷大)，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'}$.

注意：当无穷小α作为因子出现在极限式中时，可以用它的等价无穷小代换求极限，但在加减情况下，要注意上边命题(2)的条件，只有在满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=a\neq 1$时，才可以用等价无穷小代换，否则会出现计算错误(见例 1.5).

6) 无穷小的阶数

判定无穷小阶数的基本方法是用定义：若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，则$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

此外，下面命题也是用来判定无穷小阶数的命题.

(1) $\beta=o(\alpha)\Rightarrow\alpha+\beta\sim\alpha$，即无穷小的阶不因为加上高阶无穷小而改变.

(2) 设当$x\to 0$时，α是x的m阶无穷小，β是x的n阶无穷小，则$\alpha\beta$是x的$m+n$阶无穷小；当$m>n$时，$\alpha+\beta$是x的n阶无穷小.

(3) 设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^n}=c_1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{x^n}=c_2\neq 0$，且$c_1+c_2\neq 0$，则$\alpha+\beta$仍是$x$的$n$阶无穷小.

1.3.3 函数的连续性

1. 函数的连续性

1) 函数在一点连续的定义

设$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$处连续.

连续的等价定义为：

设$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，则称$y=f(x)$在点$x_0$处连续.

2) 单侧连续的定义

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$存在且等于$f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处左连续；若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$存在且等于$f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处右连续.

3) 区间上的连续函数

若$f(x)$在$(a，b)$内任一点均连续，则称$f(x)$在$(a，b)$内连续. 若$f(x)$在$(a，b)$内连续，并且$f(x)$在a点右连续，在b点左连续，则称$f(x)$在$[a，b]$上连续.

4) 函数连续性的运算

(1) (连续函数的和、差、积、商的连续性) 两个在某点连续的函数的和(差)、积及商(当分母在该点不为零时)仍在该点连续.

(2) (反函数的连续性) 若函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x),\ x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

(3) (复合函数的连续性) 若函数 $u=g(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

5) 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都是连续的. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的. 连续函数的图形是一条连续不间断的曲线.

注意：(1) 初等函数连续性的结论提供了求极限的一种方法，即如果 $f(x)$ 是初等函数，而 x_0 是其定义区间内的一点，那么求 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，就是求函数值 $f(x_0)$.

(2) 由初等函数及复合函数的连续性可得幂指数极限运算法则.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=A^B$.

2. 函数的间断点

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为间断点.

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处出现如下情况之一，则 x_0 是间断点.

(1) $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在，但至少有一个不等于 $f(x_0)$.

(3) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在.

间断点有以下几种常见类型.

(1) 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，若左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，则 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，其中当左极限 $f(x_0^-)$、右极限 $f(x_0^+)$ 存在并相等时，称 x_0 为可去间断点；当左、右极限存在但不相等时，称 x_0 为跳跃间断点.

(2) 不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点，其中当左极限 $f(x_0^-)$ 和右极限 $f(x_0^+)$ 至少有一个为无穷时，称 x_0 为无穷型间断点；当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 无限地在两个不同数之间变动，称 x_0 为振荡型间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) (有界性与最大、最小值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界且一定能取到最大值和最小值.

(2) (零点定理) 若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

(3) (介值定理) 若 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且在$[a,b]$端点处取不同的函数值，即 $f(a)=A$，$f(b)=B$，且 $A\neq B$，则对介于 A、B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=C$.

由介值定理可得推论：闭区间上的连续函数必取得介于最大、最小值之间的任何值.

1.4　疑难问题及常见错误例析

例 1.1　分段函数一定不是初等函数吗？

解　不一定. 一般地说，分段函数不是初等函数，但是有些函数形式上是分段函数，而实质是初等函数. 例如，设函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

因为在 $[0,\ 2]$ 上，$f(x)=1-|x-1|=1-\sqrt{(x-1)^2}$，所以 $f(x)$ 为初等函数.

又因为当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=\dfrac{-|x|}{x}=\dfrac{-\sqrt{x^2}}{x}$，所以 $g(x)$ 为初等函数.

由于 $h(x)$ 在其定义域内不能用一个式子表示，所以函数 $h(x)$ 不是初等函数.

例 1.2　指出下列所论数列的收敛性.

(1) 设 $\{u_n\}$ 收敛，$\{v_n\}$ 发散，则 $\{u_n+v_n\}$__________；

(2) 设 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 均发散，则 $\{u_n+v_n\}$__________；

(3) 设 $\{u_n\}$ 收敛，$\{v_n\}$ 发散，则 $\{u_nv_n\}$__________.

解　(1) $\{u_n+v_n\}$ 发散. 事实上，如果 $\{u_n+v_n\}$ 收敛，则 $\{v_n\}=\{(u_n+v_n)-u_n\}$ 也收敛，这与假设 $\{v_n\}$ 发散矛盾，所以 $\{u_n+v_n\}$ 发散.

(2) $\{u_n+v_n\}$ 收敛性不确定. 例如，令 $u_n=n+\dfrac{1}{n}$，$v_n=-n+\dfrac{1}{n}$，$w_n=n^2-\dfrac{1}{n}$，则 $u_n+v_n=\dfrac{2}{n}$，$u_n+w_n=n+n^2$，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 均发散，但 $\{u_n+v_n\}$ 收敛，而 $\{u_n+w_n\}$ 发散.

(3) $\{u_nv_n\}$ 收敛性不确定. 例如，令 $u_n=\dfrac{1}{n}$，$v_n=n$，$w_n=(-1)^nn^2$，则 $\{u_n\}$ 收敛，$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 均发散，但 $\{u_n\cdot v_n\}=\{\,1\,\}$ 收敛，而 $\{u_n\cdot w_n\}=\{(-1)^nn\}$ 发散.

例 1.3　设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下面 4 个陈述中哪些是对的？哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$，$n\in N^+$；(2) $b_n<c_n$，$n\in N^+$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解　(1)错误. 例如，设 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n}{n+1}$，$n\in N^+$，而当 $n=1$ 时，有 $a_n>b_n$. (2) 错误. 例如，设 $b_n=1+\dfrac{1}{n}$，$c_n=n$，$n\in N^+$，而当 $n=1$ 时，有 $b_n>c_n$. (3) 错误. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$，$c_n=n$，$n\in N^+$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，说明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是存在的. (4) 正确. 事实上，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 也存在，与已知条件矛盾.