JINGJISHUXUE

经济数学

主　编　周　玮　钟　强　郑燕华
副主编　李庆堂　刘玉菡　赵成龙
主　审　顾晓夏

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

经济数学

主　编　周　玮　钟　强　郑燕华
副主编　李庆堂　刘玉蕊　赵成龙
主　审　顾晓夏

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是根据教育部最新制定的《高等教育经济数学基础课程教学基本要求》，为适应高等教育数学课程改革需要而编写的。

本书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，多元函数微分学，微分方程初步，行列式与矩阵，线性方程组与线性规划，数学实验共九章。

本书充分体现“贴近实际、面向专业、为专业服务”的思想，突出实用性、专业性、通俗性。在体系编排上注重模块化，根据专业需要将数学模块与经济内容融合；在内容选取上体现与专业结合的思想，注重培养学生应用数学解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校经济管理类专业的教材，也可供经济管理人员和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学／周玮，钟强，郑燕华主编．—北京：北京理工大学出版社，2008.8

ISBN 978－7－5640－1626－5

Ⅰ．经… Ⅱ．①周…②钟…③郑… Ⅲ．经济数学－高等学校－教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第114510号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／787毫米×960毫米　1/16
印　　张／17.75
字　　数／369千字
版　　次／2008年8月第1版　　2008年8月第1次印刷
印　　数／1～2000册
定　　价／32.00元

责任校对／陈玉梅
责任印制／母长新

前　言

本书在编写过程中，对经济管理类各专业所需的数学知识进行了深入调查，以服务为宗旨，以就业为导向，在教学内容上充分体现“贴近实际、面向专业、为专业服务”的思想，以“应用为目的”，以“必需够用”为度，本着重基础、重能力、重应用、开拓创新的思路，力求实现基础性、实用性、专业性的统一。

本书主要具有以下三方面特色。

1. 面向专业，突出高等教育数学课程的专业性与服务性

本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容，精选了一定数量的经济应用实例，将数学知识模块与经济案例充分融合，特别是教材中的数学建模知识，使学生能将所学的基本知识、基本理论应用到解决实际问题中，从而使学生充分感受到数学的应用价值，为后续专业学习打下良好的基础。

2. 以实例引出基本概念，注重数学的思想方法和应用，淡化理论证明

从现实、生动的实例引进数学概念，以简明通俗的语言阐述基本知识、基本理论，在保证数学概念的准确性及基本理论完整性的原则性下，减少抽象的理论证明，借助于几何直观图形和实际意义来解释这些概念和定理，使抽象的概念形象化，从而降低难度，精简内容，以适应高职高专院校的教学需要。

3. 结合计算机应用，增加数学实验

本书注重数学方法与计算机应用相结合，在第 9 章数学实验中介绍了 Mathematica 数学软件的应用，集中解决了在前面各章中的数学计算及数学建模求解问题，使学生能充分利用现代化计算手段有效地解决经济与管理实践中的复杂计算问题。各院校可根据实际情况进行演示或上机实习。

本书分微积分和线性代数两部分，共九章内容。微积分约需 90 学时，线性代数约需 30 学时，数学实验 8 学时，适用于三年制高职高专经济和管理专业，也可作为“2+1”学制的各类高职高专院校的公共数学基础课教材。本书每一节都配有练习题，供课堂练习选用。每章后配有复习题及习题答案与解法提示，供学生课后复习。每章还配有阅读材料，内容以数学建模为主，是本章知识的实际应用，供学生课后阅读，以拓展视野，强化应用能力。

本书主编周玮、钟强、郑燕华，副主编李庆堂、刘玉菡、赵成龙。各章编写人员：钟强、柯昌武（第 1、2 章）；郑燕华、赵成龙（第 3、4 章）；周玮、于秀萍（第 5、6 章）；李庆堂、

刘大莲、王栋（第 7、8 章）；刘玉菡、刘士艳（第 9 章）；阅读材料 1～6 由周玮执笔；阅读材料 7、8 由王栋执笔；全书插图由赵成龙绘制；全书框架结构安排、统稿、定稿由周玮承担。本书由顾晓夏担任主审。

尽管我们做出了很大努力，但由于水平有限，不当之处，恳请广大同仁及读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章

函数、极限与连续

初等数学研究的对象多数是常量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门科学. 函数关系就是变量之间的对应关系，极限方法是研究变量的一种基本方法，本章将介绍变量、函数、极限及函数的连续性，以及它们的一些性质.

1.1 函　数

1.1.1 函数的概念

1. 变量

在现实世界中，会遇到各种各样的量，其中有些量在变化过程中保持不变，即取一定的数值，而另外一些量却有变化. 我们把某一变化过程中可取不同值的量称为**变量**；在某一变化过程中保持不变的量称为**常量**（**或常数**）. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量.

例 1 金属圆周的周长 l 和半径 r 的关系为 $l=2\pi r$，当圆周受热膨胀时，半径 r 发生变化，周长 l 也随之变化，当 r 在其变化范围内有确定值时，周长 l 也就确定. 在这里 r 和 l 是变量，π 和 2 是常量.

例 2 某一时期银行的人民币定期储蓄存期与年利率如表 1–1 所示.

表 1–1

存期	三个月	六个月	一年	二年	三年	五年
年利率/%	1.71	2.07	2.25	2.70	3.24	3.60

这张表格给出了年利率与存期的关系.

上述两例的实际意义、表达方式虽不相同，但具有共同之处：都表达了两个变量在变化过程中的对应关系.

2. 邻域

我们在高中已学过数集及区间的概念，下面给出高等数学中常用的邻域的概念.

给定实数 a，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 为给定的正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**. 如图 1–1 所示.

由于 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时会用到点 a 的 δ 邻域中把 a 去掉，如图 1–2，此时称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

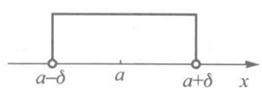

图 1–1

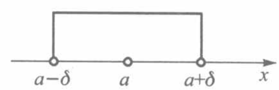

图 1–2

3. 函数概念及其表示方法

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，若对于任意的 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 都有唯一确定的实数与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的**定义域**，即 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为**函数 $f(x)$ 的值域**，记作 M，即

$$M=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可知，函数的定义域与对应关系是确定函数的两个要素，函数与自变量、因变量选用的字母无关. 两个函数只有在定义域相同、对应关系也相同时，才是同一个函数.

函数的表示法通常有三种：解析法、表格法、图像法.

如例 1 表明周长 l 是半径 r 的函数，为解析法；例 2 表明了年利率与存期之间的对应函数关系，这是表格法. 下面再介绍图像法.

例 3　某出租车公司规定收费标准如下：路程不足 3 km，车费 5 元，超过 3 km 的部分每千米加收 1.5 元，出租车车费与千米数的函数关系如图 1–3 所示.

这种表示函数关系的方法叫做图像法.

研究任何函数都要首先考虑其定义域，函数的定义域是使其有意义的一切实数组成的集

合. 求函数定义域时，一般需要考虑以下几个方面：

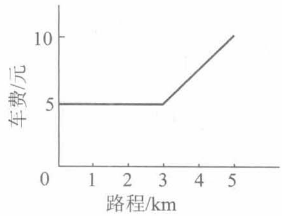

图 1–3

（1）分式的分母不能为零；

（2）开偶次方时，被开方部分非负；

（3）指数函数和对数函数中，底数大于零且不等于 1，对数函数真数部分大于零；

（4）含反三角函数的 $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ ，要满足 $|x|\leqslant 1$.

若函数同时含有以上几种情况，则取其交集.

例 4　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域.

解

要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}1-x\neq 0,\\ 9-x^2\geqslant 0.\end{cases}\qquad 即\qquad \begin{cases}x\neq 1,\\ -3\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant 3且x\neq 1\}$ 或 $[-3,1)\cup(1,3]$.

例 5　说明函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是否相同？

解

因为函数 $y=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ，而函数 $y=2\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$ ，因此两个函数不相同.

4. 分段函数

前面出租车收费的例子，路程数 x 与费用 y 的关系可以表示为

$$y=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 3,\\ 5+1.5(x-3), & x>3.\end{cases}$$

绝对值函数可以表示为 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 需要注意的是，分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，函数 y 只能有唯一的值与之对应. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 3x, & x>1. \end{cases}$$

求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$ 及函数定义域，并做出其图形.

解

因为 $\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$；因为 $2\in(1,+\infty)$，所以 $f(2)=6$，函数定义域为 $[0,+\infty)$，图像如图 1–4 所示.

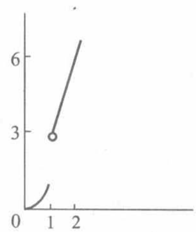

图 1–4

5. 函数的特性

（1）有界性

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**.

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；而函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，对于任意给定的正数 $M(M>1)$，当 $0<x<\dfrac{1}{M}$ 时，$x\in(0,1)$，$|\varphi(x)|=\dfrac{1}{x}>M$，因此 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

（2）单调性

定义 2 若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，区间 I 称为**单调增区间**；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少，区间 I 称为**单调减区间**，单调增区间和单调减区间统称为**函数的单调区间**.

我们将在后面的章节专门介绍函数单调性的判别方法.

（3）奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数图像关于 y 轴对称，奇函数图像关于坐标原点对称.

（4）周期性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称其为**周期函数**. T 为函数的周期，周期函数的图像每隔周期的整数倍重复出现.

例 7　判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=2^{x}+2^{-x}$；　　（2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3）$f(x)=x+\cos x$.

解

（1）因为 $f(-x)=2^{-x}+2^{x}=f(x)$，所以 $f(x)=2^{x}+2^{-x}$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$

$$=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x).$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

（3）因为 $f(-x)=-x+\cos(-x)$，$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以 $f(x)=x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数，称作非奇非偶函数.

6. 反函数

设函数的定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y\in M$，总有唯一确定的 $x\in D$，通过 $y=f(x)$ 与 y 对应，则得到以 y 为自变量，以 x 为因变量的新函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**. 习惯上，$y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为 M，值域为 D，在同一直角坐标系里，函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 8　求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并做出图像.

解

由 $y=2x-1$ 得 $x=\dfrac{y+1}{2}$，将变量 x 与 y 交换，得：$y=\dfrac{x+1}{2}$，这就是函数 $y=2x-1$ 的反函数. 图像如图 1–5.

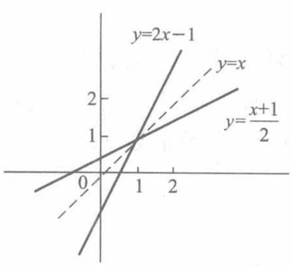

图 1–5

并不是所有函数都有反函数，但是单调函数的反函数总是存在.

1.1.2 初等函数

我们通常遇到的函数是初等函数，而初等函数是由基本初等函数通过一定的运算关系构成的，本节主要介绍基本初等函数、复合函数和初等函数的概念.

1. 基本初等函数

定义 4 如下六种函数统称为基本初等函数：

（1）常数函数 $y=C$（C 为常数）；

（2）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）；

（3）指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq 1,a$ 为常数）；

（4）对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq 1,a$ 为常数）；

（5）三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

（6）反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot} x$.

基本初等函数的性质及图形在中学已经学过，在后面的学习中还要经常涉及，希望同学们熟练掌握，灵活应用.

2. 复合函数

在实际应用中，我们常见的有基本初等函数，以及由基本初等函数通过四则运算或组合而成的函数. 例如：$y=\sin(x+1)$ 就不是基本初等函数，它是由基本初等函数 $y=\sin u, u=x+1$ 通过中间变量 u 连接而成的一个函数. 这种通过基本初等函数组合而成的函数称作复合函数.

定义 5 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，则 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 称为**中间变量**.

由复合函数的定义可知：

（1）只有满足定义中所述条件的两个函数才可以复合，例如，$y=\arcsin u, u=x^2+2$，由于 $u=x^2+2$ 的值域为 $[2,+\infty)$ 与 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集为空集，故不能复合；

（2）中间变量可以是多个，例如，$y=\sqrt{u}, u=v^2+1, v=\cos x$，则 $y=\sqrt{\cos^2 x+1}$，这里 u,v 都是中间变量.

值得注意的是，如何将一个较复杂的复合函数分解为几个简单函数（即基本初等函数或由基本初等函数经过有限次的四则运算而成的函数），则是我们经常遇到的问题.

例 9 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

（1）$y=\ln\sin x$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$.

解

（1）$y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u, u=\sin x$ 复合而成的；

（2）$y=\mathrm{e}^{\cos\sqrt{\ln x+1}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u}, u=\cos v, v=\sqrt{t}, t=\ln x+1$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 6　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成的，并由一个解析式表示的函数，叫做**初等函数**. 显然，分段函数不是初等函数.

习　题　1.1

1. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

（1）$f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

（2）$f(x)=\sin x$，　$g(x)=\sqrt{\sin^2 x}$；

（3）$f(x)=\ln[x(x-1)]$，　$g(x)=\ln x+\ln(x-1)$.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$；　　（2）$y=\sqrt{x^2-5x+4}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$；　　（4）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

3. 已知 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f(-2), f(0), f(a), f(-a), f\left(\dfrac{1}{a}\right), f(a^2), f(a+1), f(a+h)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=x^2\cos x$；

（2）$f(x)=\sin x-\cos x+x$；

（3）$f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 指出下列函数的复合过程.

（1）$y=(2x-1)^3$；　　（2）$y=2^{\sin^3 x}$；

（3）$y=\lg\cos(x^2-1)$；　　（4）$y=\sqrt{\ln(\ln\sqrt{x})}$.

6. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f[f(f(x))]$.

7. 若 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ -1, & x=0, \\ (x-1)^2, & x>0. \end{cases}$ 求 $f[f(-1)]$.

1.2 经济中常用的函数

在用数学方法来分析经济变量间的关系时,需要找出变量间的函数关系，然后用微积分等知识分析这些经济函数的特性. 本节主要介绍几个常见的经济函数.

1.2.1 需求函数与供给函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量，与消费者人数、消费者收入、人们的习惯、季节以及商品的价格等因素有关. 为简化问题的分析,我们只考虑商品的价格对商品需求量的影响. 商品需求量 Q 与该商品价格 p 的函数关系，称为**需求函数**，记为 $Q=Q(p)$. 这里价格 $p>0$ 是自变量.

一般需求量随价格的上涨而减少，故需求函数通常是价格的单调减函数.

如图 1–6 所表示的是一条需求曲线.

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数就是价格函数，记作 $p=p(Q)$.

价格函数也反映了商品需求与价格的关系.

2. 供给函数

某种商品的供给量也受该商品价格高低的影响，我们记商品的供给量为 S， p 为商品价格，则商品供给量 S 也可看作价格 p 的函数，称为**商品供给函数**，记作 $S=S(p)$.

一般供给量随价格上涨而增加，故供给函数通常是价格的单调增函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等.

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0，称为**均衡价格**，当价格 p 高于 p_0 时，供给量将增加而需求量将相应地减少，这时产生“供过于求”的现象；当价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量减少而需求量增加，这时会产生“供不应求”的现象，使价格上升（图 1–7）.

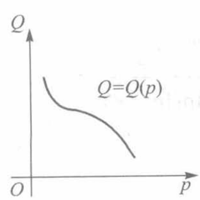

图 1–6

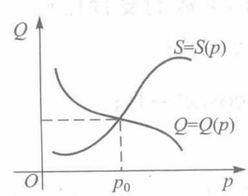

图 1–7

例 1 已知某商品的供给函数是 $S=-5+3p$，需求函数是 $Q=11-p$，试求该商品的均衡价格.